Matematica II (Chimica) – 10 Giugno 2019

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1. Determinare e classificare i punti estremanti della funzione $f(x,y) = y^3 - y + 1 + x^2 y$ nel suo dominio di definizione; calolare poi, se esistono, i massimi ed i minimi assoluti di f lungo il vincolo: $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'(t) = x(t) + y(t) \\ x'(t) = x(t) \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

3. Calcolare
$$\iint_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy,$$
quando $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 - 2x \leq 0,\, x^2 + y^2 \geq 1\}$.

Cenni di svolgimento

1. La funzione è un polinomio, dunque $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ed i punti estremanti vanno ricercati solo tra i punti critici. Si ha: $f'_x(x,y) = 2xy$; $f'_y(x,y) = x^2 + 3y^2 - 1$; allora
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1/\sqrt{3} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$
I candidati ad essere punti di massimo o di minimo relativo sono: $(0, \pm 1/\sqrt{3})$, $(\pm 1, 0)$. Per stabilirne la natura calcoliamo la matrice hessiana:
$$\det H_f(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x,y) = 2y & f''_{xy}(x,y) = 2x \\ f''_{yx}(x,y) = 2x & f''_{yy}(x,y) = 6y \end{vmatrix} = 12y^2 - 4x^2.$$
Si ha:

$\det H_f(0, \pm 1/\sqrt{3}) = 4 > 0$ e $f''_{xx}(0, \pm 1/\sqrt{3}) = \pm 2/\sqrt{3}$, per cui $(0, 1/\sqrt{3})$ è punto di minimo relativo, mentre $(0, 1/\sqrt{3})$ è punto di massimo relativo;

$\det H_f(\pm 1, 0) = -4 < 0$, quindi $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ sono entrambi punti di sella.
Infine, per quanto riguarda i punti di massimo e di minimo assoluti in $x^2 + y^2 = 4$ basta osservare che la circonferenza è un compatto e quindi essi esistono per Weierstrass. Se imponiamo $x = 2\cos t, y = 2\sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$, otteniamo $g(t) := f(r, t) = 8\cos^2 t \sin t + 8\sin^3 t - 2\sin t - 1 = 6\sin t - 1$ e quindi il massimo assoluto è ottenuto per $t = \pi/2$, il minimo assoluto per $t = 3/2\pi$. Quindi il massimo assoluto è il punto (0,2) mentre il minimo assoluto è il punto (0,-2).

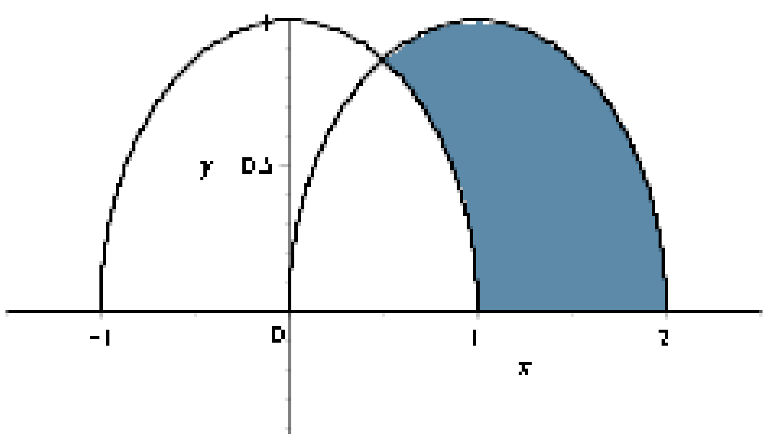
2. L'equazione differenziale (a variabili separabili) $x'(t) = x(t)$ fornisce come soluzioni $x(t) = ae^t$. Se la sostituiamo nella prima equazione otteniamo $y'(t) - y(t) = ae^t$ (lineare del primo ordine) che ammette come soluzione:

$$y(t) = be^t + ate^t.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene:

$$x(t) = e^t, \qquad y(t) = e^t(1 + t).$$

3. L'insieme E è la parte del disco di centro $(1, 0)$ e raggio 1 (perché $x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$) contenuta nel primo quadrante ($y \geq 0$), esterna al disco di centro l'origine e raggio 1.



Se scriviamo tale insieme in coordinate polari otteniamo: $E' = \{(r, t) : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3},\ 1 \leq r \leq 2\cos t\}$. Infatti, $2\cos t$ si ottiene come lunghezza del cateto del triangolo rettangolo di base il diametro della circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e vertice sulla circonferenza stessa, mentre da:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy &= \iint_{E'} \frac{1}{\rho} \rho d\theta d\rho = \iint_{E'} d\theta d\rho. = \int_0^{\pi/3} \left(\int_1^{2\cos t} dr \right) dt = \\ &= \int_0^{\pi/3} (2\cos t - 1) dt = 2[\sin t]_0^{\pi/3} - \pi/3 = \sqrt{3} - \pi/3. \end{aligned}$$

Matematica II (Chimica) – 24 Giugno 2019

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1. Dire se la curva $x(t) = \dfrac{2t}{\pi}\cos t,\ y(t) = \dfrac{2t}{\pi}\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ è regolare e disegnarla

2. Determinare l'area racchiusa dalla curva $x(t) = \dfrac{2t}{\pi}\cos t,\ y(t) = \dfrac{2t}{\pi},\ 0 \le t \le 2\pi$ e che si trova nel semipiano delle $y \ge 0$.

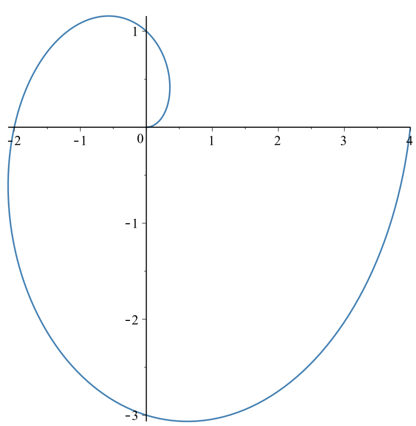
3. Determinare massimi e minimi relativi della funzione: $f(x,y) = x^4 - y^4 - 4xy^3 + 4x^2y^2$.

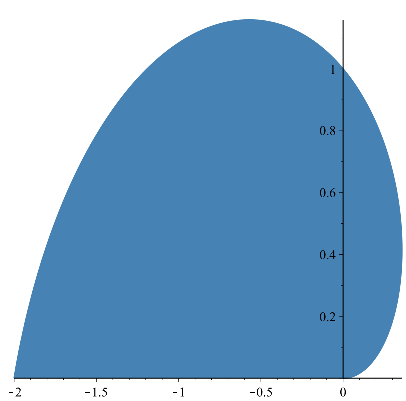
Cenni di svolgimento

1. La curva $x(t) = \dfrac{2t}{\pi}\cos t,\ y(t) = \dfrac{2t}{\pi}\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ è di classe $C^1([0,2\pi])$ (le componenti sono continue e derivabili, con derivate continue). Inoltre

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{2}{\pi}(\cos t - t\sin t) \\ y'(t) &= \frac{2}{\pi}(\sin t + t\cos t) \\ x'^2(t) + y'^2(t) &= \frac{4}{\pi^2}\left(1+t^2\right) > 0 \quad \forall\, t \in [0,2\pi] \end{aligned}$$

Infine la curva è semplice perché se imponiamo la condizione $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$ per il principio di identità dei polinomi risulta $t_1 = t_2$. Abbiamo così provato che la curva è regolare. per disegnarla possiamo osservare che $(x(t), y(t))$ sono espresse in forma polare e che $r(t) = \dfrac{2t}{\pi}$. Il grafico della curva sarà allora il seguente:





2. Nel disegno precedente risulta già individuata la porzione di piano di cui dobbiamo calcolare l'area. L'insieme è un dominio regolare

$$D := \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{\frac{4t^2}{\pi^2} - y^2}\} \cup \{(x,y) : -2 \le x \le 0,\ 0 \le y \le \sqrt{\frac{4t^2}{\pi^2} - x^2}\}.$$

Calcoliamo l'area facendo uso della formula

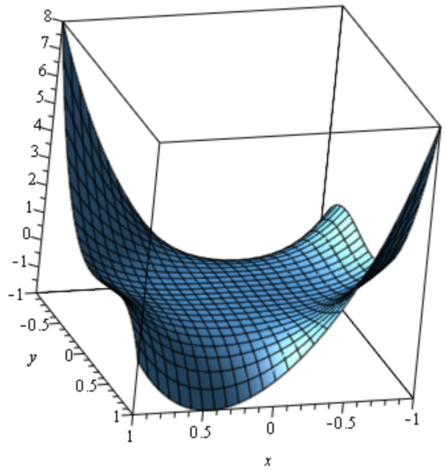
$$area(D) = \int_{+Fr(D)} x dy$$

$$\begin{aligned}
+Fr(D) &= \{(\frac{2t}{\pi}\cos t,\ \frac{2t}{\pi}\sin t),\ 0 \le t \le \pi\} \cup \{(t,0),\ -2 \le t \le 0\} \\
area(D) &= \int_{+Fr(D)} x dy = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\,(\sin t + t\cos t)\,dt = \\
&= \frac{4}{\pi^2}\left\{\int_0^\pi t\cos t\sin t + \int_0^\pi t^2\cos^2 t dt\right\} = \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi t\sin 2t dt + \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi t^2\cos^2 t dt = \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi t\left(\frac{-\cos 2t}{2}\right)' dt + \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \left(\frac{t^3}{3}\right)' \cos^2 t dt = \\
&= -\frac{1}{\pi} + \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

3. La funzione è un polinomio, duque di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. I punti di massimo e di minimo dovranno allora soddisfare il teorema di Fermat. Il gradiente della funzione è $(4x^3 + 8xy^2 - 4y^3, 8x^2y - 12xy^2 - 4y^3)$. Imponendo la condizione

$$\begin{cases} 4x^3 + 8xy^2 - 4y^3 = 0 \\ 8x^2y - 12xy^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x(4x^2 - 8xy + 20y^2) = 0 \quad (\Delta < 0)$$

si ottiene che l'unica soluzione è il punto (0,0). Visto che f è un polinomio omogeneo di grado 4 si capisce subito che la matrice Hessiana in tale punto si annulla. Lungo le restrizioni $x = 0$ la funzione $f(0,y) = -y^4$ ha un massimo, mentre lungo la restrizione $y = 0$ la funzione $f(x,0) = x^4$ ha nell'origine un punto di minimo. Dunque l'origine è un punto sella per f.



x
y

Matematica II (Chimica) – 15 Luglio 2019

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1. Sia dato il campo vettoriale piano
$$\vec{F}(x,y) = \left(x\,\log(1+y^2), \frac{x^2 y}{y^2+1} \right) \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$
Provare che è conservativo; determinarne la famiglia dei potenziali; calcolarne il lavoro sulla curva γ parametrizzata da $\vec{r}(t) = (1, t^2)$, $0 \le t \le 1$.

2. Dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' - y\dfrac{\cos x}{\sin x} = \sin x \\ \\ y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$
scrivere l'equazione della retta tangente alla curva soluzione $y(x)$ nel punto $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Cenni di svolgimento

1. Osserviamo che, per come è definito, $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$; inoltre il campo è irrotazionale essendo
$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+1} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) \ .$$
Poiché poi $\mathbb{R}^2$ è ovviamente privo di buchi, $\vec{F}$ è anche conservativo.

Determiniamo il potenziale da
$$\begin{cases} U_x(x,y) = F_1(x,y) \\ U_y(x,y) = F_2(x,y) \end{cases} \iff \begin{cases} U_x(x,y) = x\,\log(1+y^2) \\ U_y(x,y) = \dfrac{x^2 y}{y^2+1} \end{cases}$$
Integrando la prima equazione rispetto ad x si ha
$$U(x,y) = \int x\,\log(1+y^2)\,dx = \frac{x^2}{2}\,\log(1+y^2) \ + \ k(y) \ ;$$

derivando questa rispetto ad y si ottiene

$$U_y(x,y) = \frac{x^2 y}{1+y^2} + k'(y);$$

quindi, sostituendo nella seconda equazione, si ricava $k'(y) = 0 \Rightarrow k(y) = c \in \mathbb{R}$. Allora la famiglia dei potenziali del campo dato è

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} \log\left(1+y^2\right) + c\ ,\ c \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo ora il lavoro del campo lungo la curva assegnata, la quale è il segmento congiungente $(0,1)$ a $(1,1)$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(1,1) - U(0,1) = \log\sqrt{2}\ .$$

2. Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine; visto il dato iniziale e la condizione di tangenza possiamo supporre che $x \in [a,b]$ con $0 < a < \pi/4 < \pi/2 << b < \pi$, $y \in \mathbb{R}$. La soluzione è data dalla formula

$$y = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} dx}\left(\int \sin x e^{-\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} dx + C\right).$$

In $[a,b]$ la funzione $\sin x$ è positiva, dunque

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log(\sin x)$$

si ha

$$\begin{aligned} y &= e^{\log(\sin x)}\left(\int \sin x e^{-\log(\sin x)} dx + C\right) = \sin x\left(\int \sin x \frac{1}{\sin x} dx + C\right) \\ &= \sin x(\int dx + C) = \sin x(x+C) = x\sin x + C\sin x. \end{aligned}$$

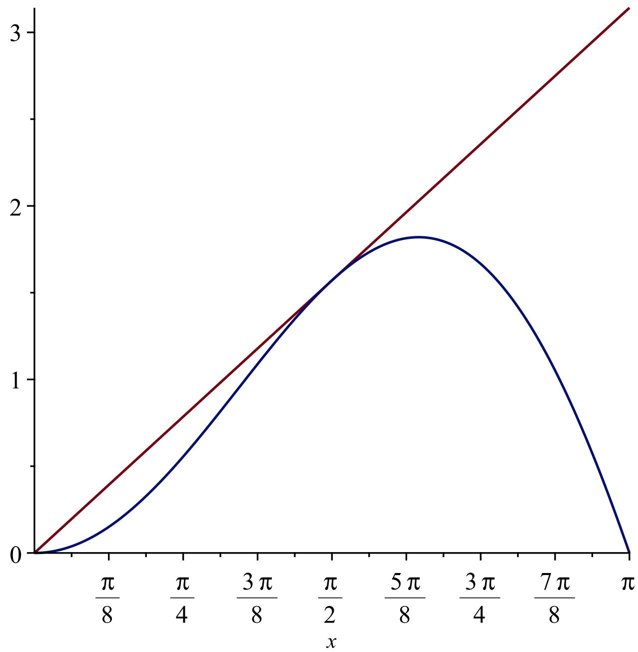
Determiniamo la costante C. Si ha

$$y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - C\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{8}\sqrt{2} \Rightarrow C = 0.$$

Quindi

$$y = x\sin x \quad \text{e} \quad y' = x\cos x + \sin x$$

e allora $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ e $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$. La retta tangente al grafico della soluzione è la bisettrice del primo e terzo quadrante.


3
2
1
0
π/8
π/4
3π/8
π/2
5π/8
3π/4
7π/8
π
x

Matematica II (Chimica) – 3 Settembre 2019

1. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' + 3y = e^t \\ y'(0) = 2 \\ y(0) = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

2. Disegnare la curva $\gamma := \{(\cos t, \sin t) : \quad 0 \le t \le \frac{3}{2}\pi\} \cup \{(t, t-1), 0 \le t \le 1\}$ e provare che è generalmente regolare e chiusa.

3. Calcolare il lavoro svolto dal campo di forze $F := (y^2 + \cos x, 2xy + y^2 + x)$ per spostare un punto materiale lungo la curva γ.

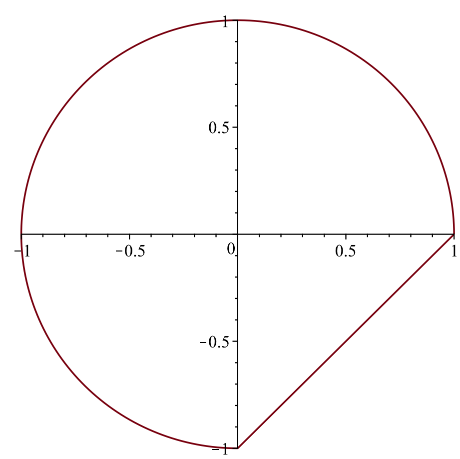
Cenni di svolgimento

1. Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine, completa e a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $\alpha^2 + 3 = 0$ che ammette come soluzioni $\pm\sqrt{3}i$. L'integrale generale della equazione omogenea pertanto è dato da $y(t) = c_1 \sin(\sqrt{3}t) + c_2 \cos(\sqrt{3}t)$. Cerchiamo ora una soluzione particolare della equazione completa della forma $z(t) = ae^t$. Se la deriviamo due volte e la sostituiamo nella equazione differenziale otteniamo $4a = 1$ da cui $a = \frac{1}{4}$. L'integrale generale della equazione completa è dato da:
$$y(t) = c_1 \sin(\sqrt{3}t) + c_2 \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{4}e^t.$$
Derivando si ottiene
$$y'(t) = \sqrt{3}c_1 \cos(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}c_2 \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{4}e^t.$$
Imponendo il dato inziale si ottiene il sistema:
$$\begin{cases} c_2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} \\ \sqrt{3}c_1 + \dfrac{1}{4} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = \dfrac{7}{12}\sqrt{3}. \end{cases}$$
Pertanto la soluzione cercata è
$$y(t) = \frac{7}{12}\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) + \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{4}e^t.$$

2. La curva γ è l'unione del segmento che congiunge i punti $(-1,0)$ e (1.0) e dell'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio 1 che si trova nei primi 3 quadranti. Sia il segmento che l'arco di circonferenza hanno una rappresentazione di classe C^1 e le derivate delle rappresentazioni non si annullano contemporaneamente:

$$\begin{aligned} &r(t) := (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le \frac{3}{2}\pi, \quad r'(t) = (-\sin t, \cos t),\ \|r'(t)\| = 1 \quad 0 \le t \le \frac{3}{2}\pi; \\ &s(t) := (t, t-1), \qquad 0 \le t \le 1, \qquad s'(t) = (1,1),\ \|\ s'(t)\| = \sqrt{2} \quad 0 \le t \le 1. \end{aligned}$$

Pertanto le due porzioni della curva γ sono regolari. Gli unici due punti in cui non esiste la tangente alla curva γ sono i punti $(-1,0)$ e (1.0). Dunque la γ è generalmente regolare.



3. La forma differenziale $\omega = (y^2 + \cos x)dx + (2xy + y^2 + x)dy$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ non è esatta in quanto non è chiusa e $\mathbb{R}^2$ è privo di buchi. Ma può essere vista come $\omega = (y^2 + \cos x)dx + (2xy + y^2)dy + xdy$. La prima parte è esatta ed essendo γ una curva generalmente regolare e chiusa il suo integrale è nullo; basta allora calcolare $\int_\gamma xdy$.

$$\begin{aligned} L &= \int_\gamma xdy = \int_0^{3\pi/2} \cos^2 t dt - \int_0^1 t dt = \\ &= \left[\frac{1}{2}\cos t \sin t + \frac{1}{2}t\right]_0^{3\pi/2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Matematica II (Chimica) – 19 Dicembre 2019

Nome: ________________ Cognome ________________________ Matr. _________
email ______________________________

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1. Determinare e classificare i punti estremanti della funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ nel suo dominio di definizione.

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = x(t) - y(t) \\ x'(t) = x(t) \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

3. Calcolare l'area del dominio regolare piano $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 - 2y \leq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x \geq 0\}$.

Cenni di svolgimento

1. La funziona data è un polinomio e pertanto è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, pertanto i punti di massimo o di minimo relativi, se esistono, annulleranno il gradiente della funzione.

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + y = 0 \\ f'_y = 27y^4 + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3y^2 \\ y(27y^3 + 1) = 0 \end{cases} \iff (0,0); (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$$

Risulta:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \det H(0,0) = -1 < 0 \\ \det H(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 3 > 0, \quad f''_{xx}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) < 0 \end{cases}$$

pertanto l'origine è un punto sella, mentre l'altro è un massimo relativo.

2. L'equazione differenziale (a variabili separabili) $x'(t) = x(t)$ fornisce come soluzioni $x(t) = ae^t$. Se la sostituiamo nella prima equazione otteniamo $y'(t) + y(t) = ae^t$ (lineare del primo ordine) che ammette come soluzione:

$$y(t) = be^{-t} + \frac{a}{2}e^t.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene:

$$x(t) = 2e^t, \qquad y(t) = e^t - e^{-t}$$

3. L'insieme E è la parte del disco di centro $(0,1)$ e raggio 1 (perché $x^2+y^2-2y \le 0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 \le 1$) contenuta nel primo quadrante ($x \ge 0$), esterna al disco di centro l'origine e raggio 1.

   Se scriviamo tale insieme in coordinate polari otteniamo: $E' = \{(r,t) : \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le r \le 2\sin t\}$. Infatti, $2\sin t$ si ottiene come lunghezza del cateto del triangolo rettangolo iscritto nella semicirconferenza $x^2+y^2-2y=0$ contenuta nel primo quadrante ($x \ge 0$), mentre da:

$$\begin{cases} (y-1)^2+x^2=1 \\ x^2+y^2=1 \\ y \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

   Pertanto:

$$\begin{aligned} area(E) &= \iint_E dxdy = \iint_{E'} rdtdr = \int_{\pi/2}^{\pi/6} \left(\int_1^{2\sin t} rdr \right) dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi/6} (4\sin^2 t - 1)dt = \int_{\pi/2}^{\pi/6} 2\sin^2 t dt - \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

   (si fa integrazione per parti: $\sin^2 t = \sin t(-\cos t)'$).

Matematica II (Chimica) – 30 Gennaio 2020

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1. Calcolare l'area dell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 9 \leq x^2 + y^2 \leq 8y\}$.
2. Stabilire se la funzione $f(x, y) = |x| \log(1 + y)$ è differenziabile in $(0, 0)$.
3. Risolvere l'equazione $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, y + 1$ determinando le soluzioni che verificano
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty.$$
(Per calcolare l'integrale $\int e^{-2\sqrt{x}}dx$ utilizzare il cambiamento di variabili $x = t^2$).

Cenni di svolgimento

1. L'insieme E è la parte esterna del disco di centro $(0, 0)$ e raggio 3 intersecata con la parte interna al disco di centro $(0, 4)$ e raggio 4. Passando a coordinate polari si ha
$$9 \leq x^2 + y^2 \leq 8y \Longleftrightarrow 9 \leq \varrho^2 \leq 8\varrho \sin t$$
e quindi $3 \leq \varrho$ e anche $\varrho \leq 8 \sin t$ per cui il dominio E si trasforma in
$$E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \leq t \leq \pi, \, 3 \leq \varrho \leq 8 \sin t\}.$$
Allora si ha
$$\begin{aligned} Area &= \iint_E dxdy = \iint_{E'} \varrho d\varrho dt = \int_0^\pi dt \int_3^{8\sin t} \varrho d\varrho = \int_0^\pi \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_3^{8\sin t} dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (64\sin^2 t - 9)dt = \frac{1}{2}\left[64(\frac{t - \sin t \cos t}{2}) - 9t\right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{2}\left[32(t - \sin t\cos t) - 9t\right]_0^\pi = \frac{1}{2}(32\pi - 9\pi) = \frac{23}{2}\pi. \end{aligned}$$
2. Prima di tutto si ha $f(0, 0) = 0$. Inoltre
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

e analogamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Infine calcoliamo il seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|x|\log(1+y)}{\sqrt{h^2+k^2}}\le\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|x||y|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

e passando a coordinate polari nell'ultimo limite si ha

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^2|\sin t\cos t|}{\varrho}\le\lim_{\varrho\to 0}\varrho=0.$$

Quindi la funzione è differenziabile.

3. Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine. La formula risolutiva fornisce l'espressione

$$y(x) \;=\; e^{\int\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\int e^{-\int\frac{1}{\sqrt{x}}}dx+C\right)=e^{2\sqrt{x}}\left(\int e^{-2\sqrt{x}}dx+C\right).$$

Calcoliamo l'integrale $\int e^{-2\sqrt{x}}dx$. Utilizzando il cambiamento di variabili $\sqrt{x}=t\leftrightarrow x=t^2$ si ha

$$\int e^{-2\sqrt{x}}dx=\int te^{-2t}dt=-\frac{t}{2}e^{-2t}+\int\frac{e^{-2t}}{2}dt=-\frac{t}{2}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}=-\frac{\sqrt{x}}{2}e^{-2\sqrt{x}}-\frac{1}{4}e^{-2\sqrt{x}}.$$

Pertanto la soluzione è

$$y(x)=e^{2\sqrt{x}}(-\frac{\sqrt{x}}{2}e^{-2\sqrt{x}}-\frac{1}{4}e^{-2\sqrt{x}}+C)=-\sqrt{x}-\frac{1}{2}+2Ce^{2\sqrt{x}}.$$

Imponendo la condizione si ha

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=-\infty\quad\Longleftrightarrow\quad C=0$$

quindi la soluzione cercata è data da

$$y(x)=-\sqrt{x}-\frac{1}{2}.$$

Matematica II (Chimica) – 12 Febbraio 2020

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1. Determinare massimi e minimi liberi della funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

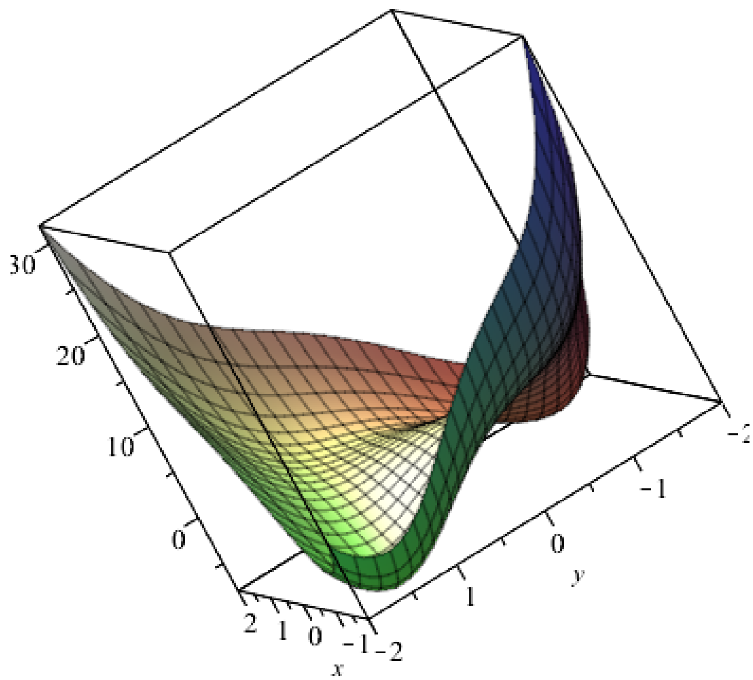
2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ x'(t) = x(t) + y(t) \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

3. Calcolare il lavoro compiuto dal campo di forze $F = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 + 4x - 4y)$ per spostare un punto materiale lungo il tratto di parabola $y = x^2$ che congiunge il punto iniziale $(0, 0)$ con il punto $(1, 1)$.

Cenni di svolgimento

1. La funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo devono annullare il gradiente ∇f (non ci possono essere altri punti). Risulta
$$\nabla f = (0, 0) \iff \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$$
Ricavando $x - y$ dalle due equazioni si ottiene $y^3 = -x^3$ cioè $y = -x$ che sostituito nella prima equazione dà $x^3 - 2x = 0$. Otterremo pertanto tre punti critici: $(0, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Studiamo ora la natura di questi punti con la matrice Hessiana: risulta:
$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$
Siccome $detH(0, 0) = 0$ dobbiamo studiare il punto in modo diverso: consideriamo la restrizione $y = x$ che passa per $(0, 0)$. Risulta $g(x) = f(x, x) = 2x^4$ che ha un minimo in $x = 0$.
Consideriamo ora la restrizione $y = 0$; si ha $h(x) = f(x, 0) = x^4 - 2x^2$ che invece ha un massimo in $x = 0$ (provarlo attraverso lo studio della derivata prima di h), pertanto l'origine è un punto sella. Risulta poi $detH(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = detH((\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ ed

anche le derivate seconde f''_{xx} valutate in questi due punti sono positive, quindi sono due minimi relativi. Il grafico qualitativo della f nell'insieme $[-2,2]^2$ è sotto riportato.



2. Risolviamo innanzitutto la prima equazione $y'(t) = y(t)$, (lineare del primo ordine, omogenea a coefficienti costanti, ma può essere vista anche come a variabili separabili). Banalmente l'integrale generale di questa equazione è $y(t) = c_1 e^t$ e visto il dato iniziale si ottiene $c_1 = 1$. Sosituiamo questo risultato nella seconda equazione: $x'(t) = x(t)+e^t$. L'integrale generale della equazione omogenea è $x(t) = c_2 e^t$ e siccome $\alpha = 1$ è soluzione della equazione caratteristica, una soluzione particolare della equazione completa avrà la forma $x(t) = ate^t$ e derivando e sostituendo nella equazione completa si ottiene $a = 1$. Quindi l'integrale generale della seconda equazione è $x(t) = c_2 e^t + te^t$. Imponendo $x(0) = 2$ si ottiene:
$$\begin{cases} y(t) = e^t \\ x(t) = e^t(2+t). \end{cases}$$

3. Avendo svolto l'esercizio 1 già sappiamo che il campo di forze F è conservativo e che un suo potenziale è la funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. Allora il lavoro compiuto dal campo di forze non dipende dal percorso, ma solo dal verso di percorrenza e dagli estremi del percorso per cui $L = f(1,1) - f(0,0) = 2$.