

Un problema proposto da Bernoulli: la brachistocrona

Anna Rita Sambucini¹

Sunto: in questa nota viene presentata la soluzione al problema della brachistocrona proposta da Giovanni Bernoulli.

Abstract: here we present the solution given by Jean Bernoulli to the problem of brachistochrone.

Parole chiave: *cicloide, brachistocrona*

1. Un problema di minimo tempo

Nel 1696 Giovanni Bernoulli proponeva e risolveva, dalle pagine della rivista *Acta Eruditorum* diretta da Leibniz, una sfida ai suoi colleghi matematici. Il problema proposto, detto della *brachistocrona* consisteva nel trovare la curva che deve

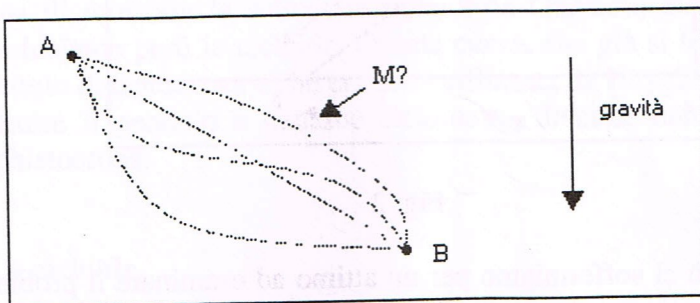


Fig. 1

¹ Università degli Studi di Perugia - Dipartimento di Matematica e Informatica Via Pascoli, 1 - 06123 Perugia, Italy e-mail: matears1@unipg.it

seguire un corpo pesante **M** per scendere da un punto **A** ad un punto **B** nel minor tempo possibile, partendo da una posizione di quiete.

In realtà il problema era già stato formulato da Galileo nel 1630 e, in seguito nel 1638, probabilmente nei "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*". Galilei stesso propose, come curva soluzione (errata) un arco di circonferenza, vedi [5]. È facile immaginare che il corpo impiegherà tempi diversi per percorrere cammini distinti.

Ad un primo esame potremmo pensare che il cammino più breve sia quello più corto e cioè la geodetica che, nel caso di un moto piano, è il segmento che congiunge i punti **A** e **B**.

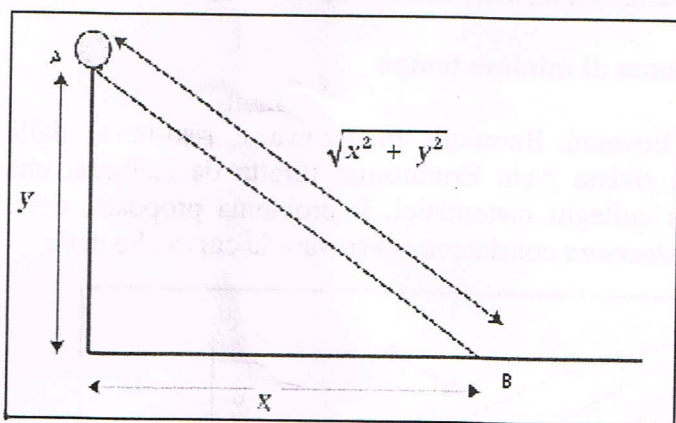


Fig. 2

Se però ci soffermiamo per un attimo ad esaminare il problema ci accorgiamo che se facciamo percorrere al corpo un percorso un poco più lungo ma con una pendenza maggiore nel punto di partenza allora acquisterà una velocità maggiore e potrà arrivare più velocemente al punto di arrivo **B**.

Questo problema affascinò moltissimo i matematici di quel periodo, i quali riconobbero subito nella brachistocrona un

elemento di novità. Fino ad allora infatti, con il calcolo differenziale, si riuscivano a trattare problemi in cui la variabile da minimizzare dipendeva solo da uno o più parametri. In questo caso invece la quantità da minimizzare, *il tempo*, dipende dall'intera curva descritta dal punto materiale e proprio questo fatto rendeva inutilizzabili i metodi fino ad allora conosciuti.

La sfida lanciata da Giovanni Bernoulli fu raccolta da quattro grandi matematici dell'epoca e, nel 1697, sempre nella rivista *Acta Eruditorum* comparvero le soluzioni dello stesso Giovanni, di suo fratello Giacomo, di Newton e di L'Hôpital.

La curva che risolve il problema è nota in letteratura con il nome di cicloide.

Delle quattro soluzioni citate, la più interessante dal punto di vista didattico è sicuramente quella di Giovanni Bernoulli ed è quella che esporremo in questa nota. Nonostante l'inegabile valore didattico e l'ingegnosità della costruzione, la dimostrazione non risulta molto rigorosa: nel ragionamento di Giovanni Bernoulli furono fatte alcune implicite ammissioni che egli non dimostrò, quali ad esempio il fatto che il problema ammettesse soluzioni e che una soluzione del problema semplificato sia una approssimazione della soluzione della brachistocrona.

Prima di mostrare la soluzione trovata da Giovanni Bernoulli introduciamo però la cicloide. Questa curva, che già si fregiava del titolo di tautocrona e che era stata utilizzata da Huyghens per costruire il pendolo a ganasse cicloidalì, divenne dunque la brachistocrona.

2. La cicloide.

La cicloide, che deve il suo nome a Galileo Galilei che per primo ne studiò il problema della quadratura, è la curva descritta da un punto di una circonferenza che rotola su una retta che possiamo supporre orizzontale ed il suo aspetto è quello di una serie di archi che poggiano su tale retta.

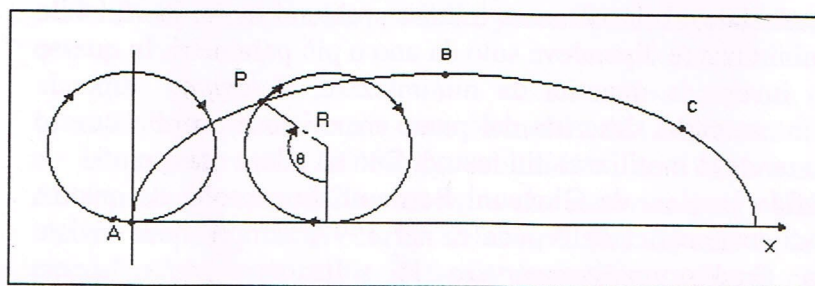


Fig. 3

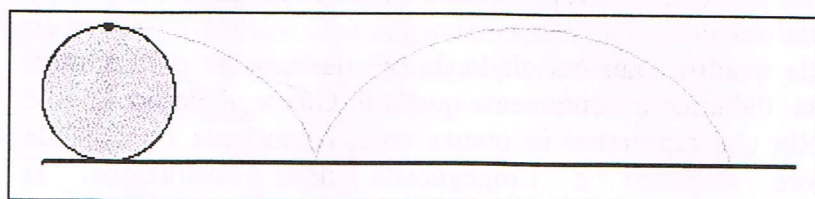


Fig. 4

Se supponiamo che il cerchio abbia raggio unitario e denotiamo con φ la misura in radianti dell'angolo PCB,

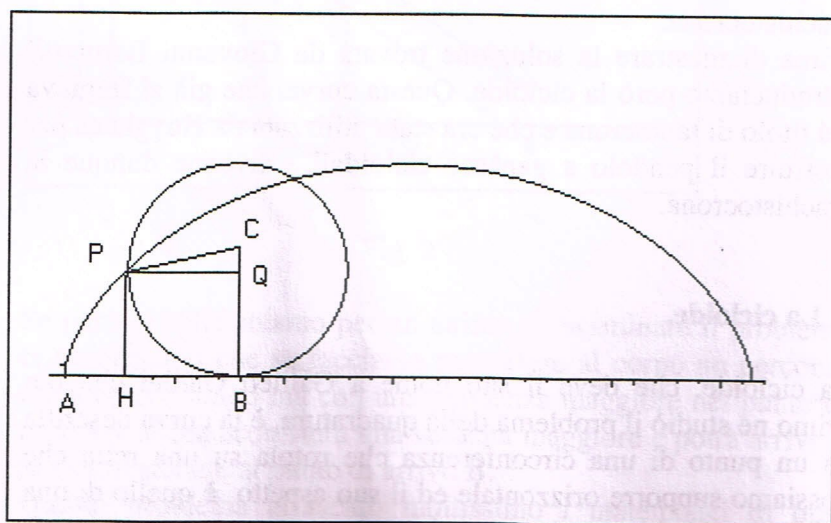


Fig. 5

l'equazione parametrica della cicloide si può determinare osservando che il segmento AB e l'arco PB coincidono poiché il cerchio rotola senza strisciare e $BH = PQ$ e $PH = QB$. Si avrà dunque

$$\begin{aligned}x &= AH = AB - HB = \varphi - \sin\varphi \\y &= PH = QB = CB - CQ = 1 - \cos\varphi.\end{aligned}$$

3. La soluzione proposta da Giovanni Bernoulli

Giovanni Bernoulli determinò la soluzione del problema sfruttando una analogia tra il movimento di caduta dei gravi e il movimento di propagazione della luce studiato da Fermat nel 1629 il quale aveva osservato che la legge di rifrazione della luce può essere formulata come un principio di minimo.

È noto che il cammino di un raggio luminoso che attraversa due mezzi con densità ottiche differenti subisce una deviazione.

Se v , w sono le velocità di propagazione della luce nei due mezzi rispettivamente, allora la legge di Snell stabilisce che il cammino della luce è dato da due segmenti che formano con la normale al piano di separazione due angoli α , β tali che

$$\sin \alpha / \sin \beta = v/w.$$

(1)

In realtà, la formulazione della legge di rifrazione che si conosceva all'epoca non era esattamente quella scritta in (1). Fu Snell per primo, nel 1621 (vedi [8]), ad osservare sperimentalmente che il rapporto in (1) è costante. Snell non pubblicò mai questo risultato ma lo fece soltanto circolare in forma di manoscritto.

Questa sua osservazione fu poi ripresa da Cartesio che, nel 1638, formulò e dimostrò, in appendice al suo "*Discorso sul metodo*" la legge di rifrazione. Fermat fece il passo successivo

ed osservò che la legge della rifrazione della luce può essere enunciata come un principio di minimo (vedi [7]), ma è soltanto all'inizio dell'800, con Fresnel, che si risolve per via sperimentale il calcolo della costante in (1) come rapporto tra le velocità di propagazione della luce nei due mezzi.

Giovanni Bernoulli decise di sfruttare il principio di Fermat dell'ottica geometrica e sostituì il problema iniziale con un problema lievemente diverso.

Suppose di dividere lo spazio in tanti strati sottili di spessore d e suppose anche che in ciascuno strato la particella materiale avesse velocità costante. In questo modo la velocità del punto materiale varierà non con continuità ma con dei piccoli salti da uno strato all'altro. Grazie al principio di Fermat, il percorso dovrà essere rettilineo e la soluzione cercata, che esiste, dovrà essere una poligonale di cui dovremo determinare i vertici.

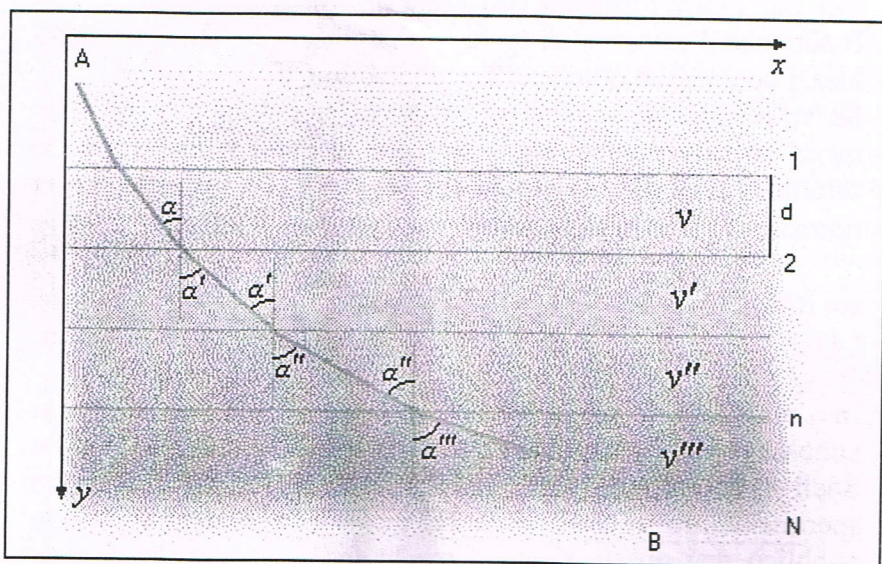


Fig. 6

È noto che la velocità di un punto materiale che parte da una posizione di riposo $A(x_A, y_A)$ è direttamente proporzionale alla radice quadrata della distanza verticale percorsa; pertanto nell' n -esimo strato risulterà:

$$\sin\alpha_n / \sqrt{nd} = \text{costante}, \quad n=1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Immaginiamo ora che lo spessore di ciascuno strato divenga sempre più piccolo fino a tendere a zero. Questa operazione di passaggio al limite non modifica l'uguaglianza (2) e dunque Bernoulli ne dedusse che la soluzione del problema iniziale era una curva γ tale che se α è l'angolo formato dalla tangente alla curva con la verticale in un qualsiasi punto $P(x_P, y_P)$ e $h = y_A - y_P$, allora

$$\sin\alpha / \sqrt{h} = \text{costante per ogni punto } P \in \gamma. \quad (3)$$

Proviamo ora che la cicloide soddisfa la (3), senza ricorrere ai "differenziali" usati da Bernoulli. Indicato con β il complementare di α , risulta

$$\sin\alpha = \cos\beta = 1 / \sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta}.$$

Se $y = y(x)$ è l'equazione della curva cercata, sapendo che $\text{tg}\beta = dy/dx = y'(x)$, e che $v = \sqrt{2gy}$ è la velocità del punto materiale, risulta

$$\sin\alpha / \sqrt{h} = \sqrt{2g} \sin\alpha / v = \sqrt{2g} \cdot 1 / (\sqrt{1 + y'^2} \sqrt{2gy}) = 1 / \sqrt{y(1 + y'^2)}.$$

L'equazione $\sqrt{y(1+y^2)} = \text{costante}$ caratterizza la cicloide. Resta solo da provare ora che la cicloide è l'unica curva che congiunge i punti **A** e **B** e soddisfa la condizione (3). Se infatti, per assurdo, esistessero due funzioni derivabili $y=f(x)$ e $y=g(x)$ che entrambe passano per i due punti dati e soddisfano la (3), allora la funzione differenza $f-g$, definita in $[a, b]$, è continua in un compatto e dunque assume massimo e minimo assoluto. Sia $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$|f-g|(x_0) = \max_{x \in [a, b]} |f-g|(x).$$

Se x_0 coincide con uno degli estremi, allora $f(x) = g(x)$; altrimenti in tale punto $f-g$ deve avere derivata nulla e quindi sia f che g hanno, nel punto x_0 , la stessa tangente e formano pertanto con la verticale uno stesso angolo. Dalla (3) segue allora che $f(x_0) = g(x_0)$ e quindi che $f(x) \equiv g(x)$.

4. La nascita del Calcolo delle Variazioni

Con il problema della brachistocrona e con le polemiche che la soluzione di Giovanni Bernoulli suscitò tra i più grandi matematici del XVII secolo, nacque una nuova teoria, chiamata in seguito Calcolo delle Variazioni, in grado di affrontare un vasto campo di problemi legati alla geometria, alla meccanica, alla fisica, all'economia politica.

La soluzione moderna del problema della brachistocrona sfrutta il fatto che la velocità di un grave che cade da una posizione di quiete è data dalla legge $v = \sqrt{2gh}$, dove g è l'accelerazione di gravità ed h è il dislivello fra la posizione in cui il grave si trova nell'istante considerato e quella iniziale. Il tempo necessario a percorrere un arco infinitesimo ds della curva di discesa è dato da $ds/\sqrt{2gh}$. Ammesso allora per semplicità che la curva cercata sia in un piano verticale e considerato in questo piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali avente l'origine nel

punto di partenza del grave e l'asse delle y orientato verso il basso, il problema della brachistocrona si può enunciare analiticamente in questo modo:

trovare, tra le curve del piano che passano per i punti A e B, quelle che rendono minimo l'integrale:

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

dove a e b indicano le ascisse dei punti A e B.

Più in generale, nei problemi semplici del Calcolo delle Variazioni, si vuole rendere minimo un integrale nel quale intervengono non solo la traiettoria della curva ma anche la direzione della sua tangente nei vari punti; si cercano cioè funzioni soddisfacenti ad alcune condizioni ai limiti che rendono minimo o massimo un integrale della forma

$$I = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

dove la funzione integranda f può dipendere dalla variabile indipendente x , dalla curva y e dalla sua derivata y' .

Il fatto che il Calcolo delle Variazioni si possa applicare a molte discipline non deve stupirci; infatti in molti fenomeni naturali ed in quelli sociali domina un principio generale di "economia" detto *anche legge del minimo sforzo*.

L'idea che la natura fosse regolata da principi di minimo era già presente nella cultura greca, ad esempio in Erone ed è stata poi ripresa da Fermat, Eulero, Huyghens e molti altri. Eulero stesso per evidenziare questo fatto disse in *Methodus inveniendi lineas curvas miximi minimive proprietate gaudentes* (Losanna 1774) "*La costruzione del mondo è la più perfetta possibile ed è dovuta ad un Creatore infinitamente saggio, non avviene nulla nel mondo che non presenti proprietà di massimo o di minimo.*"

Bibliografia

- [1] Anderson N., Arthurs A.M. (1999) Hamilton-Jacobi results for the Brachistochrone, *Eur. J. Phys.* 20, 101-104.
- [2] Boyer C. B. (1980) *Storia della matematica*, Mondadori Ed., Milano.
- [3] Courant R., Robbins H. (1971) *Che cos'è la matematica?*, Bollati Boringhieri Ed., Torino.
- [4] Elsgolc L. E. (1961) *Calculus of Variations*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Pergamon Press, Oxford.
- [5] Kline M. (1991) *Storia del pensiero matematico*, Volume primo, (Edizione italiana a cura di Alberto Conte), Giulio Einaudi Editore, Torino.
- [6] Tessieri S. (1997) Il lungo cammino della cicloide, *Preprints di Matematica n. 24*, Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa.
- [7] Tonelli L. (1921) *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Zanichelli Ed., Bologna.
- [8] Whittaker E.T. (1910) *A history of the theories of aether and electricity from the age of Descartes to the close of nineteenth century* Longmans, Green and Co., Ed., Londra.

Ringraziamenti: l'autore desidera ringraziare i Professori Enrico Pedacchia e Flora Bruno Valentini, per l'invito a presentare questa nota e a tenere una conferenza dal titolo: *Un problema proposto da Bernoulli: la brachistocrona*, il 21 Maggio 1999 presso la sezione Mathesis di Orvieto.