Riv. Mat. Univ. Parma, (5) 4 (1995) 49-60

Un Teorema di Radon-Nikodym in spazi localmente convessi rispetto alla integrazione per seminorme *

Anna Rita Sambucini (matears1@unipg.it)

Department of Mathematics, University of Perugia, Via Vanvitelli 1, Perugia 06123, Italy

Sommario. Here we give a Radon-Nikodym Theorem for a pair (M, μ) when M is a finitely additive multimeasure and μ is a scalar finitely additive measure. We compare the existence of the Radon-Nikodym density with some properties of the average and (ε, p)-approximated range.

AMS subject classification: 28B20

Introduzione

Teoremi di Radon-Nikodym sono stati forniti da molti autori, nel caso numerabilmente additivo da Z. Artstein [2], F. Hiai [12], J. Ban [3], C. Castaing, A. Touzani, M. Valadier [9] quando l'integrazione utilizzata é quella di Aumann, da D. Gilliam [10], C. Blondia [4] per misure a valori in uno spazio vettoriale topologico E localmente convesso e nel caso finitamente additivo da H.B. Maynard [14], J. W. Hagood [11], D. Candeloro-A. Martellotti [6, 7], A. Martellotti-A. R. Sambucini [16], A. Martellotti-K. Musial-A. R. Sambucini [17], ed altri. L'integrazione qui utilizzata é quella per seminorme [18] che é una estensione di quella di Bochner. In questo lavoro é stato ottenuto un teorema di Radon-Nikodym multivoco in assetto finitamente additivo per mezzo di un confronto tra l'esistenza della derivata di Radon-Nikodym e alcune proprietá dei ranghi. Nel Teorema 2.4 e nel Corollario 2.6 sono state fornite condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una derivata di Radon-Nikodym limitata. Delle condizioni fornite, la **(4)**, piú forte delle analoghe presenti in [14, 11, 16], introdotta in [4] e sostituita dall'introduzione di uno "strong integral" (S.I.) in [10], é necessaria per l'esistenza della derivata di Radon-Nikodym.

* Nota giunta in Redazione il 6/6/1994.

This paper has been partially supported by G.N.A.F.A. of the C.N.R.

Nel caso in cui la derivata di Radon-Nikodym non sia limitata si ottiene solo una condizione necessaria. La condizione sufficiente é attualmente un problema aperto; in ogni caso la proprietá di avere rango medio piccolo localmente esaustivo non sembra essere sufficiente ad assicurare l'esistenza della derivata se la famiglia delle seminorme é piú che numerabile. Infine si considerano alcuni casi particolari; nel caso in cui lo spazio localmente convesso é di Fréchèt, si ottiene che l'ereditarietá della proprietá di avere rango medio piccolo é sufficiente per l'esistenza della derivata e nel caso numerabilmente additivo, l'esistenza della derivata implica la proprietá di avere rango medio localmente p-precompatto. Per quanto riguarda le tecniche dimostrative non é stato possibile adottare quelle utilizzate in [4, 5, 10] poiché nel caso finitamente additivo non si hanno lifting.

L'autore desidera ringraziare i Proff. D. Candeloro e A. Martellotti per aver suggerito questa ricerca e per le numerose discussioni avute sull'argomento.

1. Preliminari e definizioni

Sia Ω un insieme e Σ una sua σ-algebra. Siano X uno spazio vettoriale localmente convesso e T_2 e Q un insieme filtrante di seminorme continue su X definenti la topologia di X.

Denoteremo con $\mathcal{C}_c(X)$ l'insieme dei non vuoti, chiusi limitati e convessi di X e con Y un sottospazio di $\mathcal{C}_c(X)$ completo. Per ogni $p \in Q$ sia h_p la pseudometrica di Hausdorff h_p associata a p. Un insieme $\mathcal{K}$ contenuto in $\mathcal{C}_c(X)$ si dice limitato se per ogni $p \in Q$ esiste un $r_p > 0$ tale che $\sup_{C \in \mathcal{K}} h_p(C, \{0\}) \leq r_p$. Definiamo poi, per ogni $p \in Q$, il **p-diametro** dell'insieme $\mathcal{K}$ il numero $\delta_p(\mathcal{C}) = \sup_{C,D \in \mathcal{K}} h_p(C, D) \leq 2 \sup_{C \in \mathcal{K}} h_p(C, \{0\})$.

Sia $M : \Sigma \to \mathcal{C}_c(X)$ una multimisura finitamente additiva. Per ogni $p \in Q$ e per ogni $E \in \Sigma$ la p-**variazione** di M su E é definita da:

$$|M|_p(E) = \sup_{(A_i) \in P(A)} \sum_{i \in I} h_p(M(A_i), \{0\})$$

dove $P(A)$ denota la famiglia di tutte le partizioni finite di E costituite da insiemi Σ-misurabili. Si dice che M é **b.v.** se per ogni $p \in Q$ $|M|_p(\Omega) < +\infty$.

Siano M, μ due masse con $M : \Sigma \to \mathcal{C}_c(X)$, $\mu : \Sigma \to I\!\!R$ limitata; diremo che M é **assolutamente continua rispetto a** μ (e scriveremo $M \ll \mu$) se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $p \in Q$ esiste un $\delta(\varepsilon, p) > 0$ tale che, per ogni $E \in \Sigma$ con $|\mu|(E) < \delta$, si ha che $|M|_p(E) < \varepsilon$.

M é **scalarmente dominata** da μ se per ogni $p \in Q$ esiste $K_p > 0$ tale che, per ogni $E \in \Sigma$, $|M|_p(E) \leq K_p|\mu|(E)$.

M é **subordinata** rispetto a μ se per ogni $p \in Q$ esiste $N_p \in I\!\!N$ tale che, per ogni $E \in \Sigma$, $M(E) \in N_p\overline{CO}\{\mu(F), F \in E\Sigma\}$ dove $\overline{CO}\{\mu(F), F \in E\Sigma\} \subset Y$ rappresenta la chiusura delle combinazioni convesse $\sum_{i=1}^n C_i\mu(A_i)$ con $A_i \subset E\Sigma, C_i \in Y, \sum_{i=1}^n h_p(C_i, \{0\}) = 1$.

In [18] é stato introdotto il concetto di integrabilitá per seminorme per una multifunzione $F : \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$. F é **integrabile per seminorme** o **p-integrabile** se per ogni $p \in Q$ esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n^p)_n$ tale che:

(p0) $h_p(F_n^p, F)$ é misurabile per ogni $n \in I\!\!N$ e $h_p(F_n^p, F)$ converge a zero in μ-misura.

(p1) $h_p(F_n^p, F) \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ e per ogni $E \in \Sigma$ $\lim_{n\to\infty}\int_E h_p(F_n^p, F)d\mu = 0$;

(p2) per ogni $E \in \Sigma$ esiste ed é unico $x_E \in \mathcal{C}_c(X)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} h_p\left(\int_E F_n^p d\mu, x_E\right) = 0.$$

In tal caso si pone $x_E = \displaystyle\int_E F d\mu$.

Sia $\mu : \Sigma \to I\!\!R$ una massa limitata e $|\mu|$ la sua variazione. Denotiamo con Σ^+, Σ^2 i sottoinsiemi di Σ definiti da: $\Sigma^+ = \{E \in \Sigma : |\mu|(E) > 0\}$; $\Sigma^2 = \{E \in \Sigma : |\mu|(E) < 2|\mu(E)|\}$. Con il simbolo $E\Sigma$ indicheremo $E \cap \Sigma$, analogamente per $E\Sigma^2$. Se μ é limitata ed $E \in \Sigma^+$, allora o $E \in \Sigma^2$ oppure esistono $A, B \in \Sigma^2$ tali che $E = A \cup B$.

Introduciamo ora i seguenti "ranghi" di M rispetto a μ:

$$\begin{aligned} A(E\Sigma^2) &= \{\frac{M(F)}{\mu(F)}, F \in E\Sigma^2, \mu(F) \neq 0\}, \\ A_p(E, \varepsilon) &= \{C \in Y : h_p(M(F), C\mu(F)) \leq \varepsilon|\mu|(F) \ \forall \ F \in E\Sigma\} \end{aligned}$$

denotati rispettivamente **rango medio,** e **rango** (p, ε)**-approssimato**.

Fissato $p \in Q$ si dice che una proprietá $\mathbf{P(p)}$ é μ**-esaustiva** su un insieme $E \in \Sigma$ se esiste una esaustione $(E_i)_i \in \Sigma$ di E tale che per ogni i l'insieme E_i gode della proprietá $\mathbf{P(p)}$. In tal caso $(E_i)_i$ si dice una $\mathbf{P(p)}$**-esaustione**.

Una proprietá $\mathbf{P(p)}$ é **locale** se per ogni $E \in \Sigma^+$ esiste $H \in E\Sigma^+$ che soddisfa $\mathbf{P(p)}$.

Una proprietá $\mathbf{P(p)}$ é **ereditaria** se dati $A, B \in \Sigma^+$ con $B \subseteq A$, se A gode della proprietá $\mathbf{P(p)}$ anche B gode della proprietá $\mathbf{P(p)}$. Osserviamo che le proprietá di aver rango (p, ε)-approssimato non vuoto e di avere "rango medio piccolo" sono ereditarie.

Una proprietá $\mathbf{P(p)}$ si dice **a differenza nulla** se per ogni coppia di insiemi $A, B \in \Sigma^+$ tali che $|\mu|(A \Delta B) = 0$ si verifica uno dei due casi: entrambi godono della proprietá $\mathbf{P(p)}$ oppure nessuno dei due. Se $M \ll \mu$ allora, per ogni $p \in Q$, la proprietá di avere rango (p, ε)-approssimato non vuoto é "a differenza nulla".

2. Un Teorema di Radon-Nikodym

PROPOSIZIONE 2.1 (Principio di esaustione). *Sia $\mu : \Sigma \to I\!R$ una misura finitamente additiva limitata. Fissato $p \in Q$ sono equivalenti le due condizioni:*

- *per ogni $E \in \Sigma^+$ la proprietá ereditaria $\mathbf{P(p)}$ é μ-esaustiva su E;*
- *per ogni $\delta > 0$, esistono $C(\delta, p) \in \Sigma^+$ ed $\alpha(\delta, p) \in]0, 1[$ tali che:*
  - $|\mu|(\Omega - C) < \delta$;
  - *per ogni $E \in C\Sigma^+$ esiste $F \in E\Sigma^+$ tale che $|\mu|(F) > \alpha|\mu|(E)$ e F gode della proprietá $\mathbf{P(p)}$*

Si dirá allora che la proprietá $\mathbf{P(p)}$ é **localmente esaustiva**.

Dim: la dimostrazione é analoga a quella riportata in [11].

PROPOSIZIONE 2.2. *Date $M : \Sigma \to Y$ e $\mu : \Sigma \to I\!R$ limitate, risultano equivalenti le seguenti condizioni:*

3) *la proprietá di avere rango (ε, p)-approssimato non vuoto é localmente esaustiva;*

3') *la proprietá di avere rango medio piccolo é localmente esaustiva.*

Dim: analoga a quella riportata in [11].

PROPOSIZIONE 2.3. *Siano $M : \Sigma \to Y$ e $\mu : \Sigma \to I\!R_0^+$ masse limitate. Se per ogni $E \in \Sigma^+, p \in Q, \varepsilon > 0$ la proprietá di avere rango (p, ε)-approssimato non vuoto é μ-esaustiva su E allora esiste una successione generalizzata di partizioni $\mathcal{P}_n^L, \mathcal{P}_n^L = \{E_i^{(L,n)}, i \in I\!N\ \}$, tali che:*

(2.3.1) $\lim_{k\to\infty} |\mu|(\Omega - \cup_{i>k} E_i^{(l,n)}) = 0$ *per ogni* $(L, n) \in \mathcal{D}$*;*

(2.3.2) *fissato $L \subset Q, L$ finito, $\mathcal{P}_{n+1}^L$ raffina $\mathcal{P}_n^L$;*

(2.3.3) *per ogni $L \subset Q, L$ finito, $n, i \in I\!N$ si ha che $A_{p_L}(E_i^{P_L,n}, \frac{1}{2^n}) \neq \emptyset$.*

Dim: Scelto $\varepsilon = \frac{1}{2^n}, p \in Q$, sia $(E_i^{p,1})_i$ una esaustione di Ω tale che per ogni i $A_p(E_i^{p,1}, 2^{-1}) \neq \emptyset$ e $\Omega = \bigcup_i E_i^{p,1}$. Il procedimento ora applicato ad Ω si puó ripetere per ogni $E_i^{p,1}$, e quindi procedendo ricorsivamente é possibile ottenere una successione di esaustioni $(E_\alpha^{p,n})_\alpha$ in modo che: $A_p(E_\alpha^{p,n}, 2^{-n}) \neq \emptyset$ e $E_\alpha^{p,n} = \bigcup_i E_{\alpha,i}^{p,n+1}$ e $\Omega = \bigcup E_\alpha^{p,n}$. Fissato allora $L \subset Q, L$ finito, sia $p_L = \sum p_i, p_i \in L$, e sia $\mathcal{P}_n^L = \{E_i^{p_L,n}\}$.

Ottenuta la successione generalizzata di μ-esaustioni é possibile associarle una successione

generalizzata $(G_n^L)_{(L,n)\in\mathcal{D}}$ di multifunzioni semplici nel seguente modo: poiché per ogni n $(E_\alpha^{p,n})_\alpha$ é una esaustione di Ω, in corrispondenza di $\varepsilon = \frac{1}{n}$ esiste un $k(n)$ tale che $|\mu|(\Omega - \bigcup_{i\le k(n)} E_i^{p,n}) < \varepsilon$. Definiamo allora $G_n^p = \sum_{i\le k(n)} C_i^{p,n} \cdot 1_{E_i^{p,n}} + \{0\} \cdot 1_{\Omega - \cup_{i\le k(n)} E_i^{p,n}}$ dove $C_i^{p,n} \in A_p(E_i^{p,n}, 2^{-n})$. In tal modo é possibile costruire una successione $(G_n^p)_n$di multifunzioni semplici e quindi p-integrabili. Porremo allora $G_n^L = G_n^{p_L}$.

Supporremo d'ora in poi che (Ω, Σ, μ) sia completo e che $M : \Sigma \to Y, \mu : \Sigma \to I\!R$ siano masse limitate.

TEOREMA 2.4. *Date M e μ sono equivalenti:*

$RN_1)$ *esiste $G : \Omega \to Y$ p-integrabile e limitata tale che $\int_E G d\mu = M(E)$ per ogni $E \in \Sigma$*

$RN_2)$ **(1)** *$M \ll \mu$;*

(2) *$A(\Omega\Sigma^2)$ é limitato;*

(4) *esiste una successione generalizzata $(\mathcal{P}_n^L)_{(L,n)\in\mathcal{D}}$ che soddisfa le condizioni* **(2.3.1)**, **(2.3.2)**, **(2.3.3)** *e tale che la successione generalizzata associata $(G_n^L)_{(L,n)\in\mathcal{D}}$ converge in μ-misura ad una multifunzione $F : \Omega \to Y$.*

Dim: $\mathbf{RN}_1 \implies \mathbf{RN}_2$. Se G é la derivata di Radon-Nikodym di M rispetto a μ la **(1)** é ovvia. Inoltre, fissato $p \in Q, F \in \Sigma^2, r_p = \sup h_p(G, \{0\})$ risulta: $h_p(\frac{M(F)}{\mu(F)}, \{0\}) = h_p(\frac{\int_F G d\mu)}{\mu(F)}, \{0\}) = \frac{1}{|\mu(F)|} h_p(\int_F G d\mu, \{0\}) \leq \frac{1}{|\mu(F)|} \int_F h_p(G, \{0\}) d|\mu| \leq \frac{r_p|\mu|(F)}{|\mu(F)|} \leq 2r_p$ e quindi $A(\Omega\Sigma^2)$ é limitato.
Poiché G é p-integrabile sia $(G_n^p)_n$ una successione di multifunzioni semplici definente. Fissati $\varepsilon > 0$ e $p \in Q$ sia $\overline{n}(\varepsilon, p) \in I\!N$ tale che $\int_\Omega h_p(G_{\overline{n}}^p, G) d|\mu| < \varepsilon$. Poiché $G_{\overline{n}}^p$ é una multifunzione semplice risulta: $G_{\overline{n}}^p = \sum_{i=1}^{r(\overline{n})} C_i^p 1_{E_i^p}$. La famiglia $\{E_i^p, i = 1, \cdots, r(\overline{n})\}$ é una μ-esaustione di Ω che soddisfa la **(3)**: infatti, comunque scelto $E \in \Sigma^+$ risulta $A_p(E \cap E_i^p, \varepsilon) \neq \emptyset$ poiché $C_i^p \in A_p(E \cap E_i^p, \varepsilon)$. Si ha infatti che

$$h_p(M(H), C_i^p \mu(H)) \;=\; h_p(\int_H G d\mu, \int_H G_{\overline{n}}^p d\mu) \leq \int_H h_p(G, G_{\overline{n}}^p) d|\mu| \leq \varepsilon|\mu|(H)$$

per ogni $H \in E \cap E_i^p$. Risulta cosí provata la **(3)**, e quindi, fissati $\varepsilon = 2^{-n}$ ed $L \subset Q$, dal passo precedente rimangono definite una multifunzione semplice $G_{\overline{n}}^{p_L}$ ed una μ-esaustione $\{E_i^{p_L}, i = 1, \cdots, r(\overline{n})\}$, che soddisfa **(2.3.1)**, **(2.3.2)**, **(2.3.3)**. Resta da provare allora che la successione generalizzata $(G_n^L)_{(L,n)\in\mathcal{D}}$ associata alla successione di μ-esaustioni $\mathcal{P}_n^L = \{E_i^{p_L}, i = 1, \cdots, r(\overline{n})\}$ converge in μ-misura. Poiché sia $G_{\overline{n}}^{p_L}$ che G_n^L prendono valori negli stessi insiemi

$A_{p_L}(E \cap E_i^p, 2^{-n})$ si ha che fissati $\varepsilon > 0$ $, p \in Q$, esistono $L^* \subset Q$ ed $n^* \in I\!N$ tali che $\mu\{x : h_p(G_n^{p_L}, G) > \varepsilon\} < \varepsilon$ e $h_p(G_n^{p_L}, G_n^L) \leq \varepsilon$ per ogni $(L, n) \in \mathcal{D}$ con $(L^*, n^*) \preceq (L, n)$. Pertanto $(G_n^L)_{(L,n)\in\mathcal{D}}$ converge in μ-misura a G.

RN$_2$ $\Longrightarrow$ **RN**$_1$. Da **(4)** e dalla Proposizione 2.3 rimangono definite una successione di μ-esaustioni e una successione di multifunzioni che verifica **(2.3.1)**, **(2.3.2)**, **(2.3.3)**. Sia G il suo limite in μ-misura. Proviamo ora che la successione $(G_n^p)_n$converge in $|\mu|$-misura a G. Fissato $p \in Q, \alpha > 0, \varepsilon > 0$ sia $(\overline{L}, \overline{n}) \in \mathcal{D}$ in modo che $p \in \overline{L}, 2^{2-\overline{n}} < \frac{\alpha}{2}$ e $\mu\{x \in \Omega : h_p(G_{\overline{n}}^{\overline{L}}, G) > \frac{\alpha}{2}\} \leq \varepsilon$. Per ogni $n \geq \overline{n}$

$$\mu\{x \in \Omega : h_p(G_n^p, G) > \alpha\} \leq \mu\{x \in \Omega : h_p(G_n^p, G_n^{\overline{L}}) > \frac{\alpha}{2}\} + \mu\{x \in \Omega : h_p(G, G_n^{\overline{L}}) > \frac{\alpha}{2}\} \leq$$
$$\leq \varepsilon + \mu\{x \in \Omega : h_p(G_n^p, G_n^{\overline{L}}) > \frac{\alpha}{2}\}$$

$$\begin{aligned} G_n^p &= \sum_{i\leq k(n)} C_i^{p,n} \cdot 1_{E_i^{p,n}} + \{0\} \cdot 1_{\Omega - \cup_{i\leq k(n)} E_i^{p,n}} \\ G_n^{\overline{L}} = &= \sum_{i\leq l(n)} C_i^{p_{\overline{L}},n} \cdot 1_{E_i^{p_{\overline{L}},n}} + \{0\} \cdot 1_{\Omega - \cup_{i\leq l(n)} E_i^{p_{\overline{L}},n}} \end{aligned}$$

Si consideri la decomposizione $(E_i)_i$ di Ω generata dalle partizioni finite individuate dalle due multifunzioni (eliminando gli insiemi vuoti). Indicata poi con B l'unione di quelli a $|\mu|$-misura nulla, risulta $|\mu|(B) = 0$. Nei rimanenti insiemi, preso $F \in E_i\Sigma^2$ risulta

$$h_p(G_n^p, G_n^{\overline{L}}) = h_p(G_n^p, \frac{M(F)}{\mu(F)}) + h_p(\frac{M(F)}{\mu(F)}, G_n^{\overline{L}}) \leq 2^{2-n} \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Dunque G_n^p converge a G in μ-misura. Infine per ogni $x \in E_i^{p,n}, i = 1, \cdots, k(n)$ preso $F \in E_i^{p,n}\Sigma^2$ e posto $L_p = \sup_{E\in A(\Omega\Sigma^2)} h_p\left(\frac{M(E)}{\mu(E)}, \{0\}\right)$, risulta

$$\begin{aligned} h_p(C_i^{(p,n)}, \{0\}) &\leq h_p\left(C_i^{(p,n)}, \frac{M(F)}{\mu(F)}\right) + h_p\left(\frac{M(F)}{\mu(F)}, \{0\}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{|\mu(F)|} h_p(M(F), C_i^{(p,n)}\mu(F)) + 2L_p \leq\leq \frac{1}{|\mu(F)|} 2^{-n}|\mu|(F) + 2L_p \end{aligned}$$

e quindi, per ogni $E \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} \int_E h_p(G_n^p, \{0\}) d|\mu| &= \int_E \sum_{i\leq k(n)} h_p(C_i^{(p,n)}, \{0\}) 1_{E_i^{p,n}} d|\mu| \leq \\ &\leq \int_E 2(2^{-n} + L_p) d|\mu| \leq (2 + 2L_p)|\mu|(E). \end{aligned}$$

Risultano allora soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di Vitali (2.18 di [18]) e quindi G é p-integrabile e c'é passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Resta da provare che G é la derivata di Radon-Nikodym. Fissato $\varepsilon > 0$ e $p \in Q$ sia $\delta(\frac{\varepsilon}{3}, p)$ quello della assoluta continuitá di M rispetto a μ. Si scelga allora $n \in I\!N$ in modo che risulti $\frac{1}{n} \leq \delta$ e $h_p(\int_E G_n^p d\mu, \int_E G d\mu) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. In corrispondenza di n rimangono definiti $E_1^{p,n}, E_2^{p,n}, \cdots, E_{k(n)}^{p,n}$ in modo che $|\mu|(\Omega - \cup_{i \leq k(n)} E_i^{p,n}) \leq \delta$.

Risulta allora

$$\begin{aligned} h_p(M(E), \int_E G d\mu) &\leq h_p(M(E), M(\cup_{i\leq k(n)}(E \cap E_i^{p,n}))) + \\ &+ h_p(M(\cup_{i\leq k(n)}(E \cap E_i^{p,n})), \sum_{i \leq k(n)} C_i^{p,n} \mu(E \cap E_i^{p,n})) + \\ &+ h_p(\int_E G_n^p d\mu, \int_E G d\mu) \leq h_p(M(E - \cup_{i\leq k(n)}(E \cap E_i^{p,n}))), \{0\}) + \\ &+ \sum_{i\leq k(n)} h_p(M(E \cap E_i^{p,n}), C_i^{p,n} \mu(E \cap E_i^{p,n})) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + 2^{-n}|\mu|(E). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 2.5. Date M e μ, nelle Proposizioni 2.10, 2.11, 2.12 di [18] sono state ottenute le seguenti implicazioni che saranno utilizzate per fornire condizioni equivalenti alla **RN.1** :

se é verificata la RN_1 allora M é subordinata rispetto a μ.

Se M é subordinata rispetto a μ allora M é scalarmente dominata da μ.

Se M é scalarmente dominata da μ risulta allora $M \ll \mu$ e $A(\Omega\Sigma^2)$ é limitato.

COROLLARIO 2.6. *Date M, μ, sono equivalenti le seguenti condizioni: RN_1, RN_2 e*

RN_3) *M é subordinata rispetto a μ ed é verificata la* **(4)**;

RN_4) *M é scalarmente dominata da μ ed é verificata la* **(4)**.

TEOREMA 2.7 (Radon-Nikodym). *Date M e μ come sopra, se esiste una multifunzione G p-integrabile tale che per ogni $E \in \Sigma$ $M(E) = \int_E G d\mu$, allora risulta:*

RN_2' • *$M \ll \mu$;*

- *per ogni* $p \in Q$ *e* $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ *esistono* $C \in \Sigma^+$ *ed* $\alpha \in]0,1[$ *tali che:*
- $|\mu|(\Omega - C) < \delta$*;*

  $A(C\Sigma^2)$ *é limitato;*
- *per ogni* $E \in C\Sigma^+$ *esiste* $F \in E\Sigma^+$ *tale che* $|\mu|(F) > \alpha|\mu|(E)$ *e* $A_p(F, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Dim: Poiché G é p-integrabile sia $(G_n^p)_n$una sua successione definente. Fissati $\varepsilon > 0$, $p \in Q, \delta > 0$ sia $\overline{n}(\varepsilon, p, \delta) \in I\!N$ tale che $|\mu|(\{x \in \Omega : h_p(G_{\overline{n}}^p, G) > \varepsilon\}) < \delta$. Posto $C = \{x \in \Omega : h_p(G_{\overline{n}}^p, G) \leq \varepsilon\}$, risulta $|\mu|(\Omega - C) < \delta$. Se $G_{\overline{n}}^p = \sum_{i \leq k} C_{\overline{n},i}^p 1_{E_{\overline{n},i}^p}$ sia $S_p = \max\{h_p(C_{\overline{n},i}^p, \{0\}) : i = 1, \cdots, k\}$. Per ogni $x \in C$ risulta $h_p(G(x), \{0\}) \leq h_p(G, G_{\overline{n}}^p) + h_p(G_{\overline{n}}^p, \{0\}) \leq \varepsilon + S_p$. Poiché G é limitata in C risulta per ogni $E \in C\Sigma^2$ $|M|_p(E) = \int_E h_p(G, \{0\}) d|\mu| \leq (\varepsilon + S_p)|\mu|(E)$ e quindi

$$
\begin{aligned}
h_p(\frac{M(E)}{\mu(E)}, \{0\}) &= h_p(\frac{\int_E G d\mu}{\mu(E)}, \{0\}) \leq \frac{1}{|\mu(E)|} h_p(\int_E G d\mu, \{0\}) \leq \\
&\leq \frac{1}{|\mu(E)|} \int_E h_p(G, \{0\}) d|\mu| \leq \frac{(\varepsilon + S_p)|\mu|(E)}{|\mu(E)|} \leq 2(\varepsilon + S_p)
\end{aligned}
$$

Il resto discende immediatamente dal Principio di esaustione e dal Teorema 2.4 nel caso in cui $\Omega = C$.

Seguendo le notazioni di Maynard [13] diremo che un sottoinsieme A di Y é ε-**limitato** se per ogni $p \in Q$ esistono $C_1^p, C_2^p, \cdots, C_k^p \in Y$ tali che $A \subset \bigcup_{i \leq k} B_p(C_i^p, \varepsilon)$ dove $B_p(C_i^p, \varepsilon) = \{D \in Y : h_p(C_i^p, D) \leq \varepsilon\}$. Un insieme A di Y é p-**precompatto** se per ogni $\varepsilon > 0$ é ε-limitato rispetto alla seminorma $p \in Q$.
Se $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset Y$ sia $\sigma(A_1, A_2, \cdots, A_n) = \{\sum_{i \leq n} a_i C_i, a_i \geq 0, C_i \in A_i \ i = 1, \cdots, n; \sum_{i \leq n} a_i = 1\}$.

PROPOSIZIONE 2.8. *Se* $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset Y$ *sono* ε*-limitati allora* $\sigma(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ *é* 2ε*-limitato.*

Dim: la dimostrazione é analoga a quella riportata in [13].

3. Casi particolari

3.1. Caso numerabilmente additivo

In questa sezione M, μ saranno numerabilmente additive limitate e μ a valori in $I\!R_0^+$.

PROPOSIZIONE 3.1. *Date M e μ tali che $M \ll \mu$, se la proprietá di avere rango medio piccolo é localmente esaustiva allora la proprietá di avere rango medio p-precompatto é locale.*

Dim: Siano $p \in Q, E \in \Sigma^+$ fissati. In corrispondenza di $\frac{1}{2^1}$ sia $(A_i^1)_i$ una μ-esaustione di E tale che $E = \cup_i(A_i^1)$ e $\delta_p(A_i^1\Sigma^2) \leq \frac{1}{2^1}$. Sia $N_1 \in I\!N$ tale che $\mu(E - \cup_{i\leq N_1} A_i^1) \leq \frac{1}{2^2}\mu(E)$. Posto $B_1 = \cup_{i\leq N_1} A_i^1$, risulta $B_1 \in \Sigma^+$: infatti $\mu(E - B_1) = \mu(E) - \mu(B_1) \leq \frac{1}{2^2}\mu(E)$ da cui $\mu(B_1) \geq \mu(E) - \frac{1}{2^2}\mu(E) = \frac{2^1+1}{2^2}\mu(E)$. In questo modo, procedendo ricorsivamente, a partire da $B_n \in \Sigma^+$ si ottiene una successione $(A_i^{n+1})_i$ tale che $B_n = \cup_i A_i^{n+1}$ e $\delta_p(A(A_i^{n+1}\Sigma^2)) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Sia allora $N_{n+1} \in I\!N$ tale che $\mu(B_n - \cup_{i\leq N_{n+1}} A_i^{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+2}}\mu(E)$.
Sia $H = \cap_m B_m$. Risulta $H \in \Sigma^+$: infatti $\mu(H) \geq \frac{1}{2}\mu(E) > 0$. Fissato allora $\varepsilon > 0$ sia $m \in I\!N$ tale che $\frac{1}{2^{m-1}} \leq \varepsilon$; risulta $H \subset B_m = \cup_{i\leq N_m} A_i^m$. Poiché per ogni $i = 1, 2, \cdots, N_m$, si ha $\delta_p(A(A_i^m\Sigma^2)) < \frac{1}{2^m}$, é possibile scegliere $D_i \in A_i^m\Sigma^2$ in modo che, posto $C_i = \frac{M(D_i)}{\mu(D_i)}$, risulti $A(A_i^m\Sigma^2) \subset B_p(C_i, 2^{-m})$ cioé per ogni $i = 1, 2, \cdots, N_m$ $A(A_i^m\Sigma^2)$ é 2^{-m}-limitato. Preso ora $C \in H\Sigma^2$ risulta

$$\frac{M(C)}{\mu(C)} = \sum_{i\leq N_m} \frac{M(C\cap A_i^m)}{\mu(C\cap A_i^m)}\frac{\mu(C\cap A_i^m)}{\mu(C)} = \sum_{i\leq N_m} X_i a_i$$

dove $a_i = \frac{\mu(C\cap A_i^m)}{\mu(C)}$ e $\sum_{i\leq N_m} a_i = 1$ e $X_i = \frac{M(C\cap A_i^m)}{\mu(C\cap A_i^m)} \in A(A_i^m\Sigma^2)$.
Risulta allora $A(H\Sigma^2) \subset A(B_m\Sigma^2) = \sigma(A(A_1^m\Sigma^2), A(A_2^m\Sigma^2), \cdots, A(A_{N_m}^m\Sigma^2))$ e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esso é ε-limitato e dunque p-precompatto.

COROLLARIO 3.2. *Date M e μ b.v. se esiste una multifunzione G p-integrabile tale che per ogni $E \in \Sigma$ $M(E) = \int_E G d\mu$ allora*

$RN_2'')$ $M \ll \mu$ e per ogni $E \in \Sigma^+, p \in Q$ esiste $F \in E\Sigma^+$ tale che $A(F\Sigma^2)$ é p-precompatto in Y.

Dim: Per il Teorema 2.7 l'esistenza della derivata di Radon-Nikodym implica il verificarsi della condizione RN_2' e quindi fissati $p \in Q$ ed una successione di numeri positivi $(\delta_n)_n$ decrescente a zero, esiste un insieme $C_n^p \in \Sigma^+$ tale che G é limitata su C_n^p, $|\mu|(\Omega - C_n^p) < \delta_n$ e $A(C_n^p\Sigma^2)$ é limitato. Costruiamo a partire da $(C_n^p)_n$ una nuova successione $(C_n'^p)_n$ cosí fatta: $C_n'^p = C_n^p - \cup_{i=1}^{n-1} C_i^p$ eliminando eventualmente quegli insiemi che hanno $|\mu|$-misura nulla. Questa successione di insiemi é una μ-esaustione di Ω ed inoltre $A(C_j'^p\Sigma^2)$ é limitato per ogni j. Risulta poi $M(C_n'^p \cap H) = \int_H G d\mu$. Per la condizione necessaria del Teorema 2.4, applicata a $C_n'^p$ e, per la Proposizione 2.2, la proprietá di avere rango medio piccolo é esaustiva su ogni elemento di $C_n'^p\Sigma^+$, cioé esiste una esaustione $(E_{n,i}^p)_i$ di $C_n'^p$ i cui elementi hanno diametro piccolo, perció la famiglia $\{(E_{n,i}^p)_i, n \in I\!N\}$ é una μ-esaustione di Ω e quindi la proprietá di avere rango medio piccolo é esaustiva su tutto Σ^+. L'asserto segue allora immediatamente dalla Proposizione 3.1.

3.2. X É UNO SPAZIO DI FRÉCHÈT

Se X é uno spazio di Fréchèt, sia d una distanza che induce la sua topologia. Sia h la distanza di Hausdorff associata a d. In tal caso l'integrabilitá per seminorme é equivalente alla μ-integrabilitá e quindi il Teorema 2.7 si puó invertire e la RN_2' diviene condizione necessaria e sufficiente per ottenere una derivata di Radon-Nikodym.

TEOREMA 3.3. *Date $M : \Sigma \to Y$ e $\mu : \Sigma \to I\!R$ masse limitate, sono equivalenti le seguenti condizioni:*

RN_1' *esiste una multifunzione $F : \Omega \to Y$ μ-integrabile tale che per ogni $E \in \Sigma$ $\displaystyle\int_E F d\mu = M(E)$;*

RN_2' *$M \ll \mu$;*

(RN.2b) *per ogni $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ esistono $C \in \Sigma^+$ ed $\alpha \in]0, 1[$ tali che:*

- *$|\mu|(\Omega - C) < \delta$ e $A(C\Sigma^2)$ é limitato;*
- *per ogni $E \in C\Sigma^+$ esiste $F \in E\Sigma^+$ tale che $|\mu|(F) > \alpha|\mu|(E)$ e $\delta(A(F\Sigma^2)) < \varepsilon$.*

Dim: L'implicazione $RN_1' \Longrightarrow RN_2'$ é contenuta nel Teorema 3.16. L'implicazione $RN_2' \Longrightarrow RN_1'$ é analoga a quella riportata in [11].

Riferimenti bibliografici

1. R. J. AUMANN "Integrals of set valued functions", J. Math. Anal. Appl. **12**, (1965) 1-12.
2. Z. ARTSTEIN"Set valued measures" Trans. Amer. Math. Soc. **165**, (1972) 35-46.
3. J. BAN "Radon-Nikodym Theorem and conditional expectation of fuzzy-valued measures and variables" Fuzzy Sets and System **34** (1990), 383-392.
4. C. BLONDIA "A Radon-Nikodym Theorem for vector valued measures" Bull. Soc. Math. Belg. **33** II Ser. B (1981) 231-249.
5. C. BLONDIA "On the Radon-Nikodym Property in locally convex spaces and the completeness of L^1_E" Rev. R. Acad. Ci., Madrid **81** (1987), 635-647.
6. D. CANDELORO A. MARTELLOTTI "A Radon-Nikodym Theorem for finitely additive measures", Adv. in Math. **93** (1992) 9-24.
7. D. CANDELORO A. MARTELLOTTI "A Radon-Nikodym Theorem for vector-valued finitely additive measures with closed range" Rend. Mat. Roma serie VII **12** (1992) 1071-1086.
8. C. CASTAING - M. VALADIER "Convex analysis and Measurable multifunctions", Lecture Notes in Math. **580** Springer-Verlag (1977).
9. C. CASTAING - A. TOUZANI - M. VALADIER "Théorème de Hoffmann-Jorgensen et application aux amarts multivoques" Ann. Mat. Pura ed Appl. IV vol CXL 345-364 .
10. D. GILLIAM "On integration and Radon-Nikodym theorem in quasi-complete locally convex topological vector spaces" J. Reine Angew. Math **292** (1977), 125-137.
11. J. W. HAGOOD "A Radon-Nikodym Theorem and L_p Completeness for Finitely Additive Vector Measure"; J. Math. Anal. Appl. **113** (1986) 266-279.
12. F. HIAI " Radon-Nikodym Theorems for set-valued measures", J. of Multivariate Anal. **8** (1978) 96-118.
13. H. B. MAYNARD "A Radon-Nikodym Theorem for Operator Valued Measures"; Trans. Amer. Math. Soc. **173** N. 2 (1972) 449-463.
14. H. B. MAYNARD "A Radon-Nikodym Theorem for Finitely Additive Bounded Measures"; Pac. J.of Math. **33** N. 2 (1979) 401-413.
15. A. MARTELLOTTI - A. R. SAMBUCINI "A Radon-Nikodym theorem for a pair of Banach-valued finitely additive measures" Rend. dell'Ist. Mat. di Trieste Vol. XX , **2** (1988) 331-343.

16. A. MARTELLOTTI - A. R. SAMBUCINI "A Radon-Nikodym theorem for multimeasures" in corso di stampa su Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena.

17. A. MARTELLOTTI–K. MUSIAL–A. R. SAMBUCINI "A Radon-Nikodym theorem for the Bartle–Dunford–Schwartz integral with respect to finitely additive measures" in corso di stampa su Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena.

18. A. R. SAMBUCINI "Integrazione per seminorme in spazi localmente convessi" preprint.