Riv. Mat. Univ. Parma, (5) 3 (1994) 371-281

Integrazione per seminorme in spazi localmente convessi *

Anna Rita Sambucini (matears1@unipg.it)

Department of Mathematics, University of Perugia, Via Vanvitelli 1, Perugia 06123, Italy

Sommario. Here we introduce an integral, which is an extension of the Grothendieck integral and we give some convergence theorems

AMS subject classification: 28B20

Introduzione

In [3] C. Castaing, A. Touzani, M. Valadier hanno introdotto un integrale per multifunzioni semplici a valori in sottoinsiemi non vuoti, limitati, chiusi e convessi di uno spazio vettoriale topologico E localmente convesso. Partendo da [3] e da [2] in questo lavoro é stata fornita una teoria di integrazione per multifunzioni alternativa a quella introdotta in [1]. Il concetto di integrabilitá qui usato é quello alla Grothendieck (v. [6]), che é una forma piú debole della integrabilitá "forte" introdotta in [2] ed esteso poi in [7] al caso multivoco. La differenza tra l'integrazione in senso forte e quella per seminorme, entrambe estensioni dell' integrazione alla Bochner, risiede nel fatto che, nel secondo tipo, la successione di multifunzioni semplici definente dipende dalle seminorme.

Di tale integrale sono state studiate le proprietá insieme a teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Sono state poi introdotte e confrontate per tale integrale alcune definizioni di assoluta continuitá analoghe a quelle riportate in [8]. I risultati conseguiti in questo lavoro saranno poi utilizzati per ottenere teoremi di Radon-Nikodym in tale assetto.

L'autore desidera ringraziare i Proff. D. Candeloro e A. Martellotti per aver suggerito questa ricerca e per le numerose discussioni avute sull'argomento.

* Nota giunta in Redazione il 6/6/1994.

This paper has been partially supported by G.N.A.F.A. of the C.N.R.

1. Notazioni

Sia Ω un insieme e Σ una sua σ-algebra. Siano X uno spazio vettoriale localmente convesso e separato e Q un insieme filtrante di seminorme continue su X definenti la topologia di X. Sia $\mathcal{D} = \{(L, m) : L \subset Q, L$ é finito, , $m \in I\!N\}$. Su $\mathcal{D}$ introduciamo la seguente relazione: $(L_1, m_1) \preceq (L_2, m_2)$ se e solo se $L_1 \subseteq L_2$ e $m_1 \leq m_2$. Poiché Q é filtrante, per ogni $L \subset Q$, L finito, esistono $p_L \in Q$ e $c_L > 1$ tali che $h_p(\cdot, \{0\}) \leq c_L h_{p_L}(\cdot, \{0\})$ per ogni $p \in L$. Ad esempio, se $L = \{p_1, \cdots, p_r\}$, é possibile scegliere $p_L = p_1 + p_2 + \cdots + p_r$ e $c_L = 1$.
Denoteremo con $\mathcal{C}_c(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi non vuoti, chiusi limitati e convessi di X e con Y un sottospazio di $\mathcal{C}_c(X)$ completo. Per ogni $p \in Q$ introduciamo su $\mathcal{C}_c(X)$ la pseudometrica di Hausdorff h_p associata a p, cosí definita: $h_p(K_1, K_2) = \max\{e_p(K_1, K_2), e_p(K_2, K_1)\}$ dove $e_p(K_1, K_2) = \sup_{x \in K_1} \inf_{y \in K_2} p(x - y)$.
Data $F : \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ diremo che F é limitata se per ogni $p \in Q$ esiste $K_p > 0$ tale che per ogni $\omega \in \Omega$ $h_p(F(\omega), \{0\}) \leq K_p$.

2. Integrale di multifunzioni

Sia $\mu : \Sigma \to I\!R_0^+$ una massa (cioé una misura finitamente additiva) limitata e sia $F : \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ una multifunzione. Nel caso in cui F sia semplice, ($F = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} C_i$, $C_i \in \mathcal{C}_c(X)$ per ogni $i = 1, 2, \cdots, n$) si definisce come in [3] e [7] $\int_E F d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap E) C_i$. Posto $M(E) = \int_E F d\mu$, in [7], si ottengono i seguenti risultati:

LEMMA 2.1. *Se F, G sono multifunzioni semplici, per ogni $p \in Q$ risulta*

$$h_p\left(\int_\cdot F d\mu, \int_\cdot G d\mu\right) \leq \int_\cdot h_p(F, G) d\mu; \qquad |M|_p(\cdot) = \int_\cdot h_p(F, \{0\}) d\mu$$

dove $|M|_p(E) = \sup_{(A_i) \in P(E)} \sum_{i \in I} h_p(M(A_i), \{0\})$ e $P(E)$ denota la famiglia di tutte le partizioni finite di E costituite da insiemi Σ-misurabili.

In uno spazio vettoriale topologico localmente convesso possono essere introdotti diversi tipi di misurabilitá e di integrabilitá. In [7] erano stati introdotti i concetti di totale misurabilitá ed integrabilitá in questo modo:

DEFINIZIONE 2.2. $F : \Omega \to Y$ é **totalmente μ-misurabile** se esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n)_n$ tale che, per ogni $p \in Q$,

(i0) $h_p(F_n, F)$ é misurabile per ogni $n \in I\!N$ e $h_p(F_n, F)$ converge a zero in μ-misura.

DEFINIZIONE 2.3. Data $F : \Omega \to Y$ misurabile, F é **μ-integrabile** se esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n)_n$ che soddisfa **(i0)** e tale che, per ogni $p \in Q$:

(i1) $\lim_{m,n\to\infty} \int_\Omega h_p(F_n, F_m) d\mu = 0$.

Per ogni $E \in \Sigma$ la successione $\left(\int_E F_n d\mu\right)_n$ é di Cauchy in Y. Si pone allora $\int_E F d\mu = x_E$ dove $x_E \in Y$ ed é tale che $\lim_{n\to\infty} h_p\left(x_E, \int_E F_n d\mu\right) = 0$.

Nel caso in cui la successione definente $(F_n)_n$ dipenda da $p \in Q$ si ottengono le definizioni di totale misurabilitá ed integrabilitá per seminorme.

DEFINIZIONE 2.4. $F : \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ é **totalmente misurabile per seminorme** o **p-misurabile** se, per ogni $p \in Q$, esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n^p)_n$ tale che

(p0) $h_p(F_n^p, F)$ é misurabile per ogni $n \in I\!N$ e $h_p(F_n^p, F)$ converge a zero in μ-misura.

DEFINIZIONE 2.5. $F : \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ é **integrabile per seminorme** o **p-integrabile** se per ogni $p \in Q$ esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n^p)_n$ tale che:

(p0) $h_p(F_n^p, F)$ é misurabile per ogni $n \in I\!N$ e $h_p(F_n^p, F)$ converge a zero in μ-misura;

(p1) $h_p(F_n^p, F) \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ e per ogni $E \in \Sigma$ $\lim_{n\to\infty} \int_E h_p(F_n^p, F) d\mu = 0$;

(p2) per ogni $E \in \Sigma$ esiste ed é unico $x_E \in \mathcal{C}_c(X)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} h_p\left(\int_E F_n^p d\mu, x_E\right) = 0.$$

In tal caso si pone

$$x_E = \int_E F d\mu.$$

E' ovvio che se F é a valori in Y ed é μ-integrabile allora é anche p-integrabile. Inoltre se lo spazio X é di Banach le definizioni date coincidono poiché c' é una sola norma e lo spazio $\mathcal{C}_c(X)$ é completo.

Introduciamo ora alcune definizioni di assoluta continuitá analoghe a quelle riportate in [8]:

DEFINIZIONE 2.6. Siano $F : \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ una multifunzione p-integrabile e $\mu : \Sigma \to I\!R$ una massa limitata; diremo che $\int F d\mu$ é **assolutamente continuo rispetto a** μ (e scriveremo $\int F d\mu \ll \mu$) se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $p \in Q$ esiste un $\delta(\varepsilon, p) > 0$ tale che, per ogni $E \in \Sigma$ con $|\mu|(E) < \delta$, si ha che $\displaystyle\int_E h_p(F, \{0\}) d|\mu| < \varepsilon$.
$\int F d\mu$ é **scalarmente dominato** rispetto a μ se per ogni $p \in Q$ esiste $K_p > 0$ tale che, per ogni $E \in \Sigma$, $\displaystyle\int_E h_p(F, \{0\}) d|\mu| \leq K_p |\mu|(E)$.
$\int F d\mu$ é **subordinato** rispetto a μ se per ogni $p \in Q$ esiste $N_p \in I\!N$ tale che, per ogni $E \in \Sigma$,

$$\begin{aligned}\int_E F d\mu \;\in\; & N_p \overline{CO}\{\mu(F), F \in \Sigma \cap E\} := \\ & \overline{N_p\{\sum_{i=1}^{n} C_i \mu(A_i), A_i \subset E\Sigma, C_i \in Y, \sum_{i=1}^{n} h_p(C_i, \{0\}) = 1.\}}\end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 2.7. *Se F é p-integrabile allora per ogni $p \in Q$ la funzione scalare $h_p(F, \{0\})$ é μ-integrabile.*

Dim: per ogni $p \in Q$, $h_p(F, \{0\})$ é totalmente misurabile poiché é limite in misura della successione di funzioni semplici $h_p(F_n^p, \{0\})$ (infatti $|h_p(F_n^p, \{0\}) - h_p(F, \{0\})| \leq h_p(F_n^p, F)$), inoltre $h_p(F, \{0\}) \leq h_p(F, F_n^p) + h_p(F_n^p, \{0\})$ e quindi é μ-integrabile.

TEOREMA 2.8. *Sia $F : \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ una multifunzione p-integrabile; allora per ogni $p \in Q$ si ha*

$$h_p\left(\int F d\mu, \{0\}\right) \leq \int h_p(F, \{0\}) d\mu.$$

Risulta inoltre, per ogni $p \in Q$ $|M|_p(\cdot) = \int_\cdot h_p(F, \{0\}) d\mu$, avendo posto $M(\cdot) = \int_\cdot F d\mu$.

Dim: fissato $\varepsilon > 0$, per n sufficientemente grande é:

$$\begin{aligned} h_p\left(\int F d\mu, \{0\}\right) &\leq h_p\left(\int F d\mu, \int F_n^p d\mu\right) + h_p\left(\int F_n^p d\mu, \{0\}\right) \leq \\ &\leq \varepsilon + \int h_p(F_n^p, \{0\}) d\mu \end{aligned}$$

e passando al limite per $n \to \infty$ per l'integrabilitá di $h_p(F, \{0\})$ segue l'asserto. La seconda parte la dimostrazione é analoga a quella riportata in [7].
Segue allora immediatamente che

COROLLARIO 2.9. *Se F é p-integrabile allora $\int F d\mu \ll \mu$.*

PROPOSIZIONE 2.10. *Sia $F : \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ una multifunzione p-integrabile e limitata; allora $\int F d\mu$ é subordinato rispetto a μ.*

Dim: Sia $G : \Omega \to \mathcal{C}_c(X)$ limitata e p-integrabile tale che, per ogni $E \in \Sigma$, $M(E) = \int_E G d\mu$. Se G é una funzione semplice: $G = \sum_{i \leq n} C_i 1_{A_i}$, fissato $p \in Q$ sia $K_p = \sum_{i \leq n} h_p(C_i, \{0\})$. Risulta allora, se $K_p \neq 0$, per ogni $E \in \Sigma$

$$\int_E F d\mu = \sum_{i \leq n} C_i \mu(E \cap A_i) = K_p \sum_{i \leq n} \frac{C_i}{K_p} \mu(E \cap A_i).$$

Se invece G non é semplice sia $(G_n^p)_n$una successione di multifunzioni semplici definenti. Poiché G é limitata esiste per ogni $p \in Q, S_p > 0$ tale che per ogni $x \in \Omega$ $G(x) \subset B_p(\{0\}, S_p)$. La successione $(G_n'^p)_n$ definita nel seguente modo: $G_n'^p = G_n^p \cap B_p(\{0\}, 2S_p)$ se questo insieme é non vuoto, e $\{0\}$ altrimenti, é ancora definente per G. Ció si ottiene dal fatto che $h_p(G_n'^p, G) \leq h_p(G_n^p, G)$. Sia allora $M_n^p(E) = \int_E G_n'^p d\mu$; per il passaggio precedente esiste $k_n^p > 0$ tale che $M_n^p(E) \in k_n^p \overline{CO}\{\mu(F), F \in E\Sigma\}$. Poiché per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $p \in Q$ esiste $\overline{n}(\varepsilon, p) \in I\!N$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$, $h_p(M_n^p(E), \int_E F d\mu) \leq \varepsilon$, risulta

$\int_E F d\mu \in B_p(\{0\}, \varepsilon) + k_n^p \overline{CO}\{\mu(F), F \in E\Sigma\}$ per ogni $n \geq \overline{n}$ e quindi

$$\int_E F d\mu \in \bigcap_{n \geq \overline{n}} \left(B_p(\{0\}, \varepsilon) + k_n^p \overline{CO}\{\mu(F), F \in E\Sigma\} \right).$$

Poiché per ogni $n \in I\!N$, $G_n'^p \subset B_p(\{0\}, 2S_p)$, $\sup_n k_n^p = K_p < \infty$ e quindi $M(E) \in B_p(\{0\}, \varepsilon) + K_p \overline{CO}\{\mu(F), F \in E\Sigma\}$, da cui l'asserto per l'arbitrarietá di $\varepsilon > 0$.

PROPOSIZIONE 2.11. *Se $\int F d\mu$ é subordinata rispetto a μ allora $\int F d\mu$ é scalarmente dominata da μ.*

Dim: Poniamo $M(\cdot) = \int_\cdot F d\mu$. Fissati $E \in \Sigma$ ed $\varepsilon > 0$ esistono $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tali che $|M|_p(E) \leq \sum_{i \leq n} h_p(M(A_i), \{0\}) + \frac{\varepsilon}{2}$. Poiché per ogni $i = 1, \cdots, n$, $M(A_i) \in N_p \overline{CO}\{\mu(F), F \in E\Sigma\}$, in corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{2nN_p} > 0$ e di i esistono $(F_j^i)_{j=1,\cdots,k(i)}, F_j^i \subset A_i$ e $C_j^i \in Y$ con $\sum_{j \leq k(i)} h_p(C_j^i, \{0\}) = 1$ tali che

$$h_p(M(A_i), \{0\}) \leq N_p \left(\sum_{j \leq k(i)} h_p(C_j^i, \{0\}) |\mu(F_j^i)| + \frac{\varepsilon}{2nN_p} \right).$$

Risulta allora

$$\begin{aligned} |M|_p(E) &\leq \frac{\varepsilon}{2} + N_p \left(\sum_{i \leq n} \left(\frac{\varepsilon}{2nN_p} + \sum_{j \leq k(i)} h_p(C_j^i, \{0\}) |\mu|(F_j^i) \right) \right) \leq \\ &\leq \varepsilon + N_p |\mu|(E) \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 2.12. *Se $\int F d\mu$ é scalarmente dominato rispetto a μ risulta $\int F d\mu \ll \mu$ e $A(\Omega \cap \Sigma^2)$ é limitato dove $\Sigma^2 = \{E \in \Sigma : |\mu|(E) < 2|\mu(E)|\}$ e $A(\Omega \cap \Sigma^2) = \{\frac{\int_E F d\mu}{\mu(E)}, E \in \Sigma^2\}$.*

Dim: l'assoluta continuitá dell'integrale é ovvia, basta prendere $\delta(\varepsilon, p) = \frac{\varepsilon}{N_p}$. Per quanto riguarda la seconda proprietá, sia $E \in \Sigma^2$ con $\mu(H) \neq 0$:

$$\begin{aligned} h_p\left(\frac{\int_E F d\mu}{\mu(E)}, \{0\} \right) &\leq \frac{1}{|\mu(E)|} h_p(\int_E F d\mu, \{0\}) \leq \\ &\leq \frac{|\mu|(E)}{|\mu(E)|} \frac{\int_E h_p(F, \{0\}) d|\mu|}{|\mu|(E)} \leq 2N_p. \end{aligned}$$

L'integrale introdotto in Definizione 2.5 é ben definito.

TEOREMA 2.13. *Sia F una multifunzione p-integrabile e siano $(F_n^p)_n, (G_n^p)_n$ due successioni definenti per F. Denotati allora per ogni $E \in \Sigma$ con x_E, y_E quegli elementi di $\mathcal{C}_c(X)$ per i quali*

$$\lim_{n\to\infty} h_p\left(\int_E F_n^p d\mu, x_E\right) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} h_p\left(\int_E G_n^p d\mu, y_E\right) = 0$$

risulta $x_E = y_E$.

Dim: Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $p \in Q$ risulta, per n sufficientemente grande:

$$\begin{aligned} h_p(x_E, y_E) \ &\leq \ h_p\left(\int_E F_n^p d\mu, x_E\right) + \int_E h_p(F_n^p, G_n^p) d\mu + h_p\left(\int_E G_n^p d\mu, y_E\right) \leq \\ &\leq \ 2\varepsilon + \int_E h_p(F_n^p, F) d\mu + \int_E h_p(F, G_n^p) d\mu \leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Risulta allora $h_p(x_E, y_E) = 0$ per ogni $p \in Q$ e quindi $x_E = y_E$ poiché entrambi sono chiusi.

PROPOSIZIONE 2.14. *Siano F, G due multifunzioni μ-integrabili. Allora per ogni $p \in Q$*

$$h_p\left(\int_E F d\mu, \int_E G d\mu\right) \leq \int_E h_p(F, G) d\mu \quad \forall\ E \in \Sigma.$$

Dim: Per ogni $p \in Q$ siano F_n^p, G_n^pdue successioni di multifunzioni semplici definenti F e G rispettivamente. Fissato $\varepsilon > 0$, per n sufficientemente grande si ha che:

$$\begin{aligned} h_p\left(\int_E F d\mu, \int_E G d\mu\right) \ &\leq \ \int_E h_p(F, F_n^p) d\mu + \int_E h_p(F_n^p, G_n^p) d\mu + \\ &+ \ \int_E h_p(G_n^p, G) d\mu \leq 2\varepsilon + \int_E h_p(F_n^p, G_n^p) d\mu. \end{aligned}$$

$h_p(F, G)$ é μ-integrabile poiché é limite in misura della successione di funzioni semplici $h_p(F_n^p, G_n^p)$ e tale successione é di Cauchy in media: infatti risulta per ogni n, m

$$\int_\Omega |h_p(F_n^p, G_n^p) - h_p(F_m^p, G_m^p)| d\mu \leq \int_\Omega h_p(F_n^p, F_m^p) + h_p(G_n^p, G_m^p) d\mu$$

Passando allora al limite sotto il segno di integrale e per l'arbitrarietá di ε segue l'asserto.

DEFINIZIONE 2.15. Sia ora $\mu : \Sigma \to I\!R$ una massa a variazione limitata; una multifunzione F si dice **integrabile per seminorme rispetto a** μ se é integrabile per seminorme rispetto a $|\mu|$ ed in tal caso si pone:

$$\begin{aligned}\int F d\mu &= \overline{\int F d\mu^+ - \int F d\mu^-} := \int F d\mu = \int F d\mu^+ \dot{+} \int -F d\mu^- \\ &:= \int F d\mu^+ + \int -F d\mu^-.\end{aligned}$$

Infatti se F é integrabile per seminorme rispetto a $|\mu|$ esiste una successione di multifunzioni semplici $(F_n^p)_n$definente. La **(p0)** segue immediatamente dal fatto che $\mu^{\pm} \leq |\mu|$, poiché $\int h_p(F_n^p, F) d\mu^{\pm} \leq \int h_p(F_n^p, F) d\mu \to \infty$ segue la la **(p1)**. Per quanto riguarda la **(p2)** per ogni $E \in \Sigma$, denotato con x_E l'elemento di $\mathcal{C}_c(X)$ tale che $\displaystyle\int_E F d|\mu| = x_E$, i valori

$$x_E^+ = \begin{cases} x_E & \text{se} \quad \mu(E) > 0 \\ \{0\} & \text{se} \quad \mu(E) \leq 0 \end{cases} \quad x_E^- = \begin{cases} x_E & \text{se} \quad \mu(E) < 0 \\ \{0\} & \text{se} \quad \mu(E) \geq 0 \end{cases}$$

soddisfano la **(p2)** per μ^+ e μ^- rispettivamente.
Analogamente a [7] $h_p(\int F d\mu, \{0\}) \leq \int h_p(F, \{0\}) d|\mu|$ e posto $M(\cdot) = \int_{\cdot} F d\mu$, risulta $|M|_p(\cdot) = \int_{\cdot} h_p(F, \{0\}) d|\mu|$.

3. Alcuni Teoremi di convergenza

D'ora in poi μ si suppone a valori in $I\!R$ e limitata ed F a valori in Y.

DEFINIZIONE 3.1. Una famiglia finita o numerabile di insiemi a due a due disgiunti $(E_i)_i \in \Sigma$ si dirá una μ-**esaustione** di Ω se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in I\!N$ tale che $|\mu|(\Omega - \cup_{i \leq N} E_i) < \varepsilon$.

Sia $\{E_i\}_i$ μ-esaustione di Ω tale che $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i \in I\!N} E_i$. Sia $(C_n)_n$ una successione in Y tale che per ogni $p \in Q$ esiste $r_p > 0$, per cui $h_p(C_n, \{0\}) \leq r_p$ per ogni n. Definiamo $F = \sum_{i=1}^{\infty} C_i 1_{E_i}$; tale definizione é formale nel senso che per ogni $x \in \Omega$ esiste ed é unico $i = i(x) \in I\!N$ tale che $x \in E_{i(x)}$ e dunque $F(x) = C_{i(x)}$. F é μ-integrabile (Proposizione 2.9 di [7]) e quindi p-integrabile.

TEOREMA 3.2. *Se F é p-misurabile e per ogni $p \in Q$ la funzione scalare $h_p(F,\{0\})$ é μ-integrabile allora la F é p-integrabile.*

Dim: Per ogni $p \in Q$ sia $(G_n^p)_p$ una successione di multifunzioni semplici che soddisfa **(p0)**. Costruiamo una nuova successione di multifunzioni semplici, a partire dalla $(G_n^p)_n$, che soddisfa anche la **(p1)**. Intanto $h_p(G_n^p, F) \leq h_p(G_n^p,\{0\})+ h_p(F,\{0\})$ e quindi é integrabile.
Sia $B_{n,k}^p = \{x : h_p(G_n^p, F) > \dfrac{1}{k\mu(\Omega)}\}$, poiché per ogni $p \in Q$ G_n^p $|\mu|$-converge ad F, per ogni $k \in I\!\!N$ si ha $\lim_{n\to\infty}|\mu|(B_{n,k}^p) = 0$ e quindi in corrispondenza di $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ esisterá $N(k) > k$ tale che, per ogni $n \geq N(k)$, $|\mu|(B_{n,k}^p) < \frac{1}{k}$. Sia $H_k^p = G_{N(k)}^p 1_{(B_{N(k),k}^p)^c}$. H_k^p é una multifunzione semplice per costruzione; inoltre, per ogni $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}|\mu|(\{x : h_p(H_k^p, F) > \alpha\}) \;&\leq\; |\mu|(\{x \in \Omega - B_{N(k),k}^p : h_p(G_{N(k)}^p, F) > \alpha\}) \\ &+\; +|\mu|(B_{N(k),k}^p),\end{aligned}$$

e poiché il secondo membro della disuguaglianza tende a zero per $k \to \infty$, per ogni $p \in Q$ H_k^p $|\mu|$-converge ad F. Ora, fissati $\varepsilon > 0$, $p \in Q$ e scelto $\delta(\varepsilon/2, p)$ come quello della assoluta continuitá dell'integrale di $h_p(F,\{0\})$, per ogni $k \in I\!\!N$ tale che $\frac{1}{k} \leq \min\{\delta, \varepsilon/2\}$ si ha:

$$\begin{aligned}\int_\Omega h_p(H_k^p, F)d|\mu| \;&=\; \int_{\Omega - B_{N(k),k}^p} h_p(G_{N(k)}^p, F)d|\mu| + \int_{B_{N(k),k}^p} h_p(F,\{0\})d|\mu| \leq \\ &\leq\; \frac{1}{k} + \int_{B_{N(k),k}^p} h_p(F,\{0\})d|\mu| \leq \frac{1}{k} + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Mostriamo ora che esiste ed é unico, per ogni $E \in \Sigma$ un elemento $I_E \in Y$ tale che, per ogni $p \in Q$, $\lim_{k\to\infty} h_p\left(\displaystyle\int_E H_k^p d\mu, I_E\right) = 0$.
Per quanto visto sopra, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $p \in Q$ esiste $K(\varepsilon, p) \in I\!\!N$ tale che, per ogni $k \geq K(\varepsilon, p)$ si ha $\int_\Omega h_p(H_k^p, F)d|\mu| < \varepsilon$. Costruiamo ora una successione generalizzata in questo modo: fissati $(L, m) \in \mathcal{D}$ e $\varepsilon = \frac{1}{m}$ sia $K(m, p_L) \in I\!\!N$ tale che per ogni $k \geq K(m, p_L)$,

$$\int_\Omega h_{p_L}(H_k^{p_L}, F)d|\mu| < \frac{1}{m}.$$

Posto allora $S_{(L,m)}= H^{p_L}_{m+K(m,p_L)}$, dimostriamo che la successione generalizzata $(\int_E S_{(L,m)} d\mu)_m$ é di Cauchy in Y per ogni $E \in \Sigma$. Fissati $p \in Q$ ed $\varepsilon > 0$ sia $(L^*, m^*) \in \mathcal{D}$ in modo che $p \in L^*$ ed $m^* > \frac{2}{\varepsilon}$, risulta allora, per ogni $(L_1, m_1), (L_2, m_2) \in \mathcal{D}$ con $(L^*, m^*) \preceq (L_1, m_1), (L^*, m^*) \preceq (L_2, m_2)$:

$$\begin{aligned} & h_p\left(\int_E S_{(L_1,m_1)} d\mu, \int_E S_{(L_2,m_2)} d\mu\right) \leq \int_E h_p(S_{(L_1,m_1)}, S_{(L_2,m_2)}) d|\mu| \leq \\ \leq & \int_E h_p(S_{(L_1,m_1)}, F) d|\mu| + \int_E h_p(S_{(L_2,m_2)}, F) d|\mu| \leq \\ \leq & \int_E h_{p_{L_1}}(S_{(L_1,m_1)}, F) d|\mu| + \int_E h_{p_{L_2}}(S_{(L_2,m_2)}, F) d|\mu| \leq \\ \leq & \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Allora, per la completezza di Y, per ogni $E \in \Sigma$ esiste $I_E \in Y$ per il quale $\lim_{(L,m) \in \mathcal{D}} \int_E S_{(L,m)} d\mu = I_E$. Mostriamo che I_E soddisfa la **p2)**, relativa a $(H^p_n)_n$, e quindi che F é p-integrabile. Fissati $\varepsilon > 0$, $p \in Q, E \in \Sigma$ esistono $m^* > \frac{3}{\varepsilon}$ ed L^* in modo che $p \in L^*$ e $h_p(\int_E S_{(L^*,m^*)} d\mu, I_E) < \frac{\varepsilon}{3}$. Scelto poi $k > \max\{K(m^*, p_L), K(m^*, p)\}$, risulta:

$$\begin{aligned} & h_p\left(\int_E H^p_k d\mu, I_E\right) \leq h_p\left(\int_E H^p_k d\mu, \int_E S_{(L,m)} d\mu\right) + h_p\left(\int_E S_{(L,m)} d\mu, I_E\right) \leq \\ \leq & \int_E h_p(H^p_k, H^{p_L}_{m+K(m,p_L)}) d|\mu| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \int_E h_p(H^p_k, F) d|\mu| + \\ + & \int_E h_{p_L}(H^{p_L}_{m+K(m,p_L)}, F) d|\mu| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

e quindi $\lim_{k\to\infty} h_p(\int_E H^p_k d\mu, I_E) = 0$.

Diamo ora un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale:

TEOREMA 3.3 (di Vitali). *Sia $(F^p_n)_n$ una successione di multifunzioni p-integrabili tali che per ogni $p \in Q$: $F^p_n \stackrel{|\mu|}{\to} F$ e $\int h_p(F^p_n, \{0\}) d|\mu| \ll \mu$ uniformemente in n. Allora F é p-integrabile e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_. F^p_n d\mu = \int_. F d\mu.$$

Dim: Per quanto riguarda l'integrabilitá di F basta provare che per ogni $p \in Q$ la funzione scalare $h_p(F, \{0\})$ é μ-integrabile. Poiché, fissati $p \in Q, n \in I\!N$, la funzione F^p_n é integrabile per seminorme, esiste una successione $(G^p_{n,k})_k$ definente e quindi per ogni $\alpha > 0$ $\lim_{k\to\infty} \mu(\{x : h_p(F^p_n, G^p_{n,k}) > \alpha\}) = 0$ e $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega h_p(F^p_n, G^p_{n,k}) d|\mu| = 0$. In corrispondenza allora di $\alpha = \dfrac{1}{2^n}$ esisterá $K = K(n, p)$ tale che per ogni $k \geq K$

$$- \ |\mu|(\{x : h_p(F^p_n, G^p_{n,k}) > \frac{1}{2^n}\}) < \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad \int_\Omega h_p(F^p_n, G^p_{n,k})d|\mu| < \frac{1}{2^n}.$$

sia allora $G^p_n = G^p_{n,K}$. La funzione $h_p(G^p_n, F)$ é misurabile poiché F lo é e G^p_né semplice; inoltre

$$\{x : h_p(G^p_n, F) > \alpha\} \subset \{x : h_p(G^p_{n,K}, F^p_n) > \frac{1}{2^n}\} \cup \{x : h_p(F^p_n, F) > \alpha - \frac{1}{2^n}\}$$

e quindi per ogni $p \in Q$ G^p_n $|\mu|$-converge ad F. Allora per la disuguaglianza $|h_p(G^p_n, \{0\}) - h_p(F, \{0\})| \leq h_p(G^p_n, F)$ segue la convergenza in $|\mu|$-misura di $h_p(G^p_n, \{0\})$ ad $h_p(F, \{0\})$. Inoltre la successione $h_p(G^p_n, \{0\})$ é di Cauchy in media e quindi $h_p(F, \{0\})$ é μ-integrabile. Risulta infatti:

$$\begin{aligned}\int_\Omega h_p(G^p_n, G^p_m)d|\mu| &\leq \int_\Omega h_p(G^p_{n,K(n,p)}, F^p_n)d|\mu| + \int_\Omega h_p(F^p_n, F^p_m)d|\mu| + \\ &+ \int_\Omega h_p(F^p_m, G^p_{m,K(m,p)})d|\mu| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} + \int_\Omega h_p(F^p_n, F^p_m)d|\mu|.\end{aligned}$$

Posto $A^p_{n,m} = \{x : h_p(F^p_n, F^p_m) > \alpha\}$ risulta $\lim_{n,m\to\infty} |\mu|(A^p_{n,m}) = 0$ e quindi

$$\begin{aligned}\int_\Omega h_p(F^p_n, F^p_m)d|\mu| &= \int_{A^p_{n,m}} h_p(F^p_n, F^p_m)d|\mu| + \int_{\Omega - A^p_{n,m}} h_p(F^p_n, F^p_m)d|\mu| \leq \\ &\leq \alpha|\mu|(\Omega) + \int_{A^p_{n,m}} h_p(F^p_n, \{0\}) + h_p(F^p_m, \{0\})d|\mu|\end{aligned}$$

e quindi per le ipotesi fatte segue l'integrabilitá. Per il Teorema 3.2 F é quindi p-integrabile ed é possibile costruire, a partire dalla successione $(G^p_n)_n$, una nuova successione $(H^p_l)_l$ di multifunzioni semplici definente nel seguente modo: sia $B^p_{n,l} = \{x : h_p(G^p_n, F) > \frac{1}{l\mu(\Omega)}\}$; in corrispondenza di $\frac{1}{l}$ esisterá $n(l) > l$ tale che per ogni $n \geq n(l)$ $|\mu|(B^p_{n,l}) < \frac{1}{l}$. Si pone allora $H^p_l = G^p_{n(l)} 1_{(B^p_{n(l),l})^c}$. Fissati dunque $\varepsilon > 0$, $p \in Q$, $\delta(\varepsilon/5, p) > 0$ come quello della assoluta continuitá uniforme di $\int h_p(F^p_n, \{0\})d|\mu|$ rispetto a μ ed $E \in \Sigma$, sia $n'(\varepsilon/5) \in I\!N$, tale che $\frac{1}{2^{n'-1}} < \varepsilon/5$, e sia $l^* \in I\!N$, $l^* > n' + 1/\delta$, tale che per ogni $l > l^*$ $h_p(\int_E H^p_l d\mu, \int_E F d\mu) \leq \frac{\varepsilon}{5}$. In corrispondenza di l^* rimane determinato anche $n(l^*) > l^* \in I\!N$. Risulta allora, per ogni $l \geq l^*$ e per ogni $n \geq n(l)$

$$\begin{aligned}& h_p\left(\int_E F^p_n d\mu, \int_E F d\mu\right) \leq h_p\left(\int_E F^p_n d\mu, \int_E G^p_n d\mu\right) + \\ &+ h_p\left(\int_E G^p_n d\mu, \int_E G^p_{n(l)} 1_{(B^p_{n(l),l})^c} d\mu\right) + h_p\left(\int_E G^p_{n(l)} 1_{(B^p_{n(l),l})^c} d\mu, \int_E F d\mu\right) \leq \\ &\leq \int_E h_p(F^p_n, G^p_n)d|\mu| + \int_{E\cap B^p_{n(l),l}} h_p(G^p_n, \{0\})d|\mu| +\end{aligned}$$

$$+ \int_{E-B^p_{n(l),l}} h_p(G^p_n, G^p_{n(l)})d|\mu| + \frac{\varepsilon}{5} \leq \frac{\varepsilon}{5} + \int_{E\cap B^p_{n(l),l}} h_p(G^p_n, F^p_n) + h_p(F^p_n, \{0\})d|\mu| + \frac{2}{5}\varepsilon \leq$$

$$\leq \frac{3}{5}\varepsilon + \int_{E\cap B^p_{n(l),l}} h_p(G^p_n, F^p_n)d|\mu| + \int_{E\cap B^p_{n(l),l}} h_p(F^p_n, \{0\})d|\mu| \leq \varepsilon.$$

Come conseguenza del Teorema di Vitali si ha il seguente teorema:

TEOREMA 3.4 (della Convergenza dominata). *Data una multifunzione p-misurabile F, sia $(F^p_n)_n$ una successione di multifunzioni che μ-converge ad F e sia g una funzione μ-integrabile tale che per ogni $n \in I\!N$ e per ogni $p \in Q$ $h_p(F^p_n(x), \{0\}) \leq g(x)$ μ-quasi ovunque. Allora F é p-integrabile e*

$$\int_E F d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E F^p_n d\mu.$$

Riferimenti bibliografici

1. R. J. AUMANN "Integrals of set valued functions", J. Math. Anal. Appl. **12**, (1965) 1-12.
2. C. BLONDIA "Integration in locally convex spaces" Simon Stevin **55** (3) (1981) 81-102.
3. C. CASTAING - A. TOUZANI - M. VALADIER "Théorème de Hoffmann-Jorgensen et application aux amarts multivoques" Ann. Mat. Pura ed Appl. IV vol CXL 345-364.
4. C. CASTAING - M. VALADIER "Convex analysis and Measurable multifunctions", Lecture Notes in Math. **580** Springer-Verlag (1977).
5. N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ "Linear Operators Part I" Interscience, New York, (1958).
6. D. GILLIAM "On integration and Radon-Nikodym theorem in quasi-complete locally convex topological vector spaces" J. Reine Angew. Math **292** (1977), 125-137.
7. A. MARTELLOTTI - A. R. SAMBUCINI "A Radon-Nikodym theorem for multimeasures" in corso di stampa su Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena.
8. A. MARTELLOTTI–K. MUSIAL–A. R. SAMBUCINI "A Radon-Nikodym theorem for the Bartle–Dunford–Schwartz integral with respect to finitely additive measures" in corso di stampa su Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena.