4) Calcolare la seguente potenza

$$(1+i)^5.$$

Esprimiamo innanzitutto il munero complesso $1+i$ nella sua forma radiale:

$$\varrho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \ \ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Adoperando la formula di De Moivre $[\varrho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \varrho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ si ha, per $n = 5$,

$$\begin{aligned}(1+i)^5 &= [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^5 = \sqrt{2^5}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) \\ &= \sqrt{2}\cdot 4(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -4 - i4.\end{aligned}$$

Possiamo anche risolvere l'esercizio utilizzando la formula del binomio di Newton

$$(x+a)^n = x^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} ax^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^2x^{n-2} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} a^{n-1}x + a^n.$$

In questo caso otteniamo

$$(1+i)^5 = 1^5 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} i1^4 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} i^2 1^3 + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} i^3 1^2 + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} i^4 1 + i^5.$$

Si ha

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5!}{1!4!} = 5 \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5!}{3!2!} = 10 \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5!}{4!1!} = 5.$$

Sostituendo otteniamo

$$(1+i)^5 = 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = -4 - 4i.$$