3. *Assegnata la funzione* $g(x) = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$, *calcolare*

a) *l'ordine di infinitesimo in* $x = 0$ *di* g *rispetto ad* x*;*

b) $g''(0)$ *e* $g^{(84)}(0)$.

Svolgimento

a) Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

quindi g è un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad x.

b) Risulta $g'(x) = \arctan x + \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{1+x^2} = \arctan x$, $\quad g''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, e dunque $g''(0) = 1$.

Inoltre lo sviluppo di g'' mediante la formula di Mac Laurin per ogni $|x| < 1$, è dato da

$$g''(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Posto $f(x) = g''(x)$, risulta $g^{(84)}(0) = f^{(82)}(0)$.

Dunque $(-1)^{41}x^{82} = \dfrac{x^{82}}{(82)!}f^{(82)}(0) \quad \Rightarrow \quad f^{(82)}(0) = -(82)!$, da cui si conclude che $g^{(84)}(0) = -(82)!$.