Studiamo il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}(x+1)^n$$

al variare di $x \in I\!R$.

Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \frac{1}{n+1}(x+1)^n$, consideriamo allora $|a_n| = \frac{1}{n+1}|x+1|^n$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2}|x+1|^{n+1} \cdot (n+1)\frac{1}{|x+1|^n} = |x+1|$$

Dunque,

- se $|x+1| < 1$, cioè $-2 < x < 0$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x > 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;
- se $x = 0$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge;
- se $x = -2$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ che è la serie armonica a segni alterni (convergente semplicemente per il criterio di Leibnitz),
- se $x < -2$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}|x+1|^n$. Proviamo che $b_n = \frac{1}{n+1}|x+1|^n$ è crescente da un certo $m \in I\!N$ in poi.

$$b_n = \frac{1}{n+1}|x+1|^n \leq \frac{1}{n+2}|x+1|^{n+1} = b_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{n+2}{n+1} \leq |x|$$

Sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

e dunque, per la definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $1+\varepsilon < |x|$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$1-\varepsilon \leq \frac{n+2}{n+1} \leq 1+\varepsilon < |x|$$

e dunque la serie data è indeterminata.