Studiamo il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} x^{2n+1}$$

al variare di $x \in I\!R$.

Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \frac{n}{n^3+1} x^{2n+1}$, consideriamo allora $|a_n| = \frac{n}{n^3+1} |x|^{2n+1}$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+1)^3+1} |x|^{2n+3} \cdot \frac{n^3+1}{n} \frac{1}{|x|^{2n+1}} = x^2$$

Dunque,

- se $x^2 < 1$, cioè $|x| < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;

- se $x > 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;

- se $x < -1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge a $+\infty$, siccome $a_n = -|a_n|$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $-\infty$;

- se $x = \pm 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$, applicando il criterio del confronto asintotico e confrontandola con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ si ottiene che la serie data converge assolutamente.