I Numeri Complessi

L'esigenza di introdurre i numeri complessi è dovuta al fatto che diverse operazioni sui numeri reali **IR** non sempre sono possibili.

- $x^2 + 1 = 0$?
- log (-10) ?
- $\log_{-2} 3$?
- $(-1)^{½}$?

Allo scopo di ovviare a questa carenza si introducono **i numeri complessi.**

I numeri complessi **C** sono coppie ordinate di numeri reali

$$\mathbf{C} = \{ (a,b),\ a,b \in \mathbf{R} \}$$

In particolare i numeri del tipo **(a,0)** vengono considerati identici al numero reale **a**.

Il numero complesso **(0,1)** si denota con **i** e si chiama unità immaginaria dei numeri complessi, Il numero **i** è tale che $\mathbf{i^2 = -1}$.

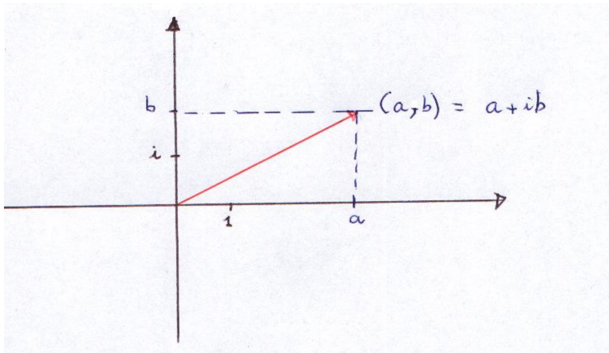
Con l'introduzione dell'unità immaginaria i numeri complessi si possono allora rappresentare anche nella forma **a + ib**, dove **a** rappresenta la parte reale del numero complesso e **b** la parte immaginaria. Due numeri complessi **a+ ib** , **c +id** coincidono se e solo se **a=c**, **b=d**.

OPERAZIONI FONDAMENTALI CON I NUMERI COMPLESSI

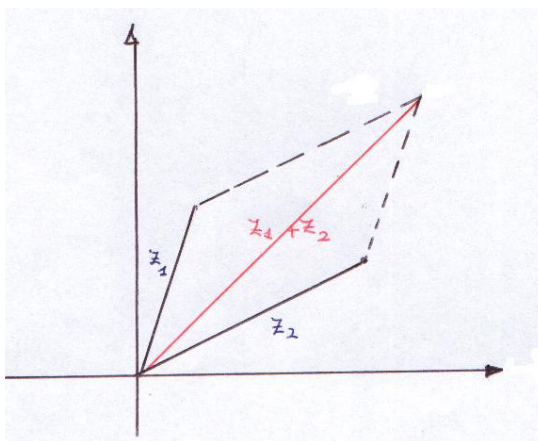
- addizione $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- sottrazione $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$
- moltiplicazione $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
- divisione $(a + ib)/(c + id) = (ac + bd)/(c^2 + d^2) + i(bc - ad)/(c^2 + d^2)$
- valore assoluto $| a + ib| = (a^2 + b^2)^{½}$
- complesso coniugato $\overline{a + ib} = a - ib.$

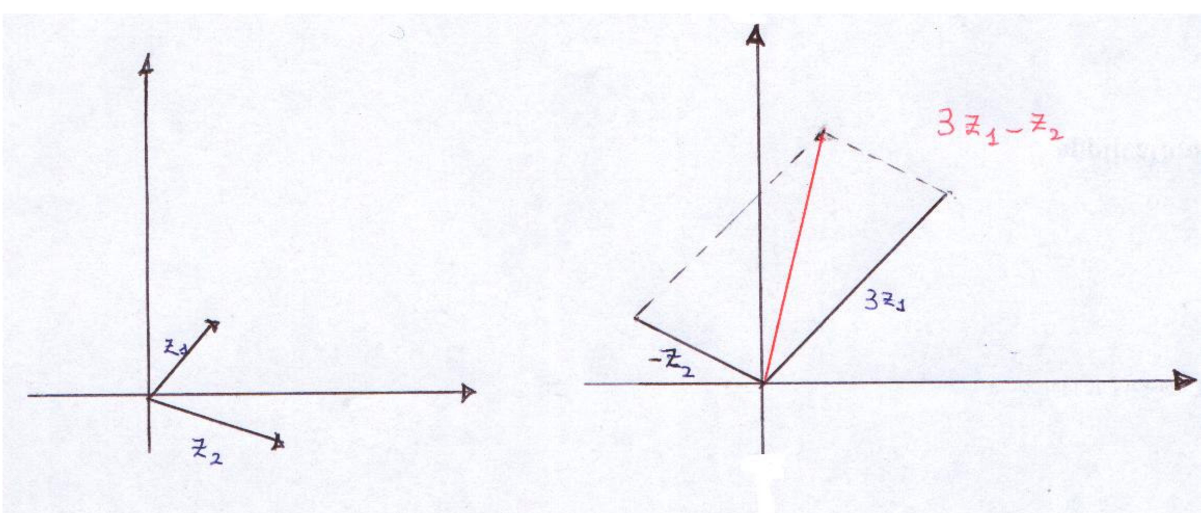
E' possibile eseguire le operazioni sui numeri complessi con le regole del calcolo dei numeri reali trattando **i** come un numero reale, con l'accortezza di sostituire $\mathbf{i}^2$ con -1.

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI



L' addizione dei numeri complessi corrisponde alla regola del parallelogramma per la somma di vettori:





LA FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI

Introducendo nel piano complesso le coordinate polari al posto delle coordinate cartesiane si ottiene una nuova rappresentazione dei numeri complessi:

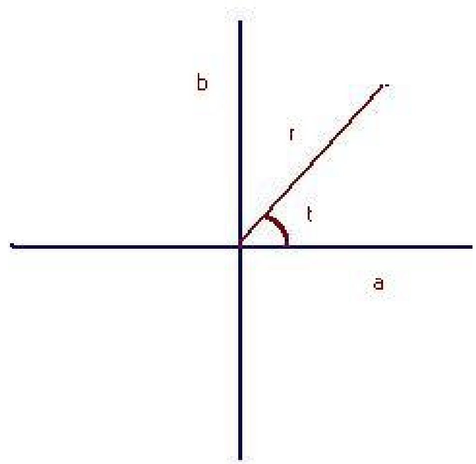
$$x = r \cos t \qquad y = r \sin t$$

il numero complesso $z = x + iy = r(\cos t + i \sin t)$ dove $r = (x^2 + y^2)^{½}$

dove r è il modulo di z e t (detto argomento o anomalia) è l' angolo formato tra la direzione positiva dell' asse delle x e la semiretta che congiunge l' origine con il punto z. L' argomento è definito a meno di multipli dell' angolo giro.

Dato un numero complesso $a + ib$, il suo modulo è dato da $r = (x^2 + y^2)^{½}$ e, se esso è diverso da zero, il suo argomento t è determinato da

$$\sin t = b/(x^2 + y^2)^{½} \qquad \cos t = a/(x^2 + y^2)^{½}$$



Utilizzando questa rappresentazione il prodotto di due numeri complessi diventa particolarmente semplice:

$$z = r(\cos t + i \sin t), \qquad w = s(\cos u + i \sin u), \qquad zw = rs(\cos(t+u) + i \sin(t+u))$$

dunque, per moltiplicare due numeri complessi si moltiplicano i moduli e si sommano gli argomenti. La formula

$$(\cos t + i \sin t)(\cos u + i \sin u) = \cos(t+u) + i \sin(t+u)$$

è detta formula di De Moivre e permette di calcolare la potenza n-esima di un numero complesso z:

$$z^n = [r(\cos t + i \sin t)]^n = r^n (\cos nt + i \sin nt) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Chiamiamo **radice n-esima** di **z** **ogni numero complesso** **w** tale che $w^n = z$.

Tale equazione ammette esattamente n soluzioni; se $z = r(\cos t + i \sin t)$ allora

$$w = r^{1/n} \left(\cos (t + 2k\pi)/n + i \sin (t + 2k\pi)/n \right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

I valori di $w_1, \ldots, w_n$ sono regolarmente distribuiti lungo la circonferenza avente centro nell' origine raggio pari a $r^{1/n}$. Le radici sono dunque rappresentate dai vertici di un poligono regolare.

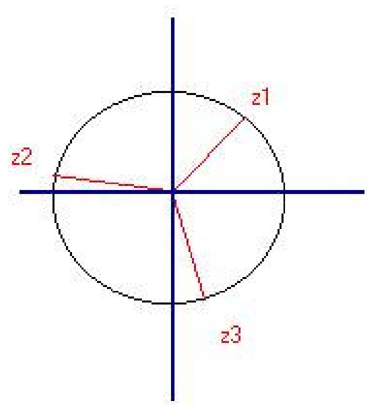
Determiniamo ad esempio le radici del numero complesso $(-1+i)^{1/3}$. Risulta

$$-1 + i = 2^{1/2} [\cos(3\pi/4 + 2k\pi) + i \sin(3\pi/4 + 2k\pi)]$$

$$(-1+i)^{1/3} = 2^{1/6} [\cos(3\pi/4 + 2k\pi)/3 + i \sin(3\pi/4 + 2k\pi)/3]$$

Dunque

- per k=0 $z_1 = 2^{1/6} [\cos \pi/4 + i \sin \pi/4]$
- per k=1 $z_2 = 2^{1/6} [\cos 11\pi/12 + i \sin 11\pi/12]$
- per k=2 $z_3 = 2^{1/6} [\cos 19\pi/12 + i \sin 19\pi/12]$



DEFINIZIONE DI e^x NEL CAMPO COMPLESSO(*)

Vogliamo ora estendere la definizione di e^x in modo che abbia significato anche nel campo complesso e che conservi la legge degli esponenti: $\mathbf{e^a\ e^b = e^{a+b}}$ **.**

Se poniamo z= x+ iy, per la legge degli esponenti deve risultare: $\mathbf{e^z = e^{x+iy} = e^x\ e^{iy}}$.

Dobbiamo quindi capire che valore assegnare al numero complesso $\mathbf{e^{iy}}$.

Supponiamo che, al variare di y, $\mathbf{e^{iy}}$ = a(y)+ ib(y), con a,b funzioni derivabili almeno due volte. Se deriviamo due volte otteniamo:

$$e^{iy} = a(y) + ib(y)$$

$$i\,e^{iy} = a'(y) + ib'(y)$$

$$-e^{iy} = a''(y) + ib''(y)$$

Inoltre, poiché $\mathbf{e^0}$ = 1, risulta a(0)=1, a'(0)=0, b(0)=0, b'(0)=1.

Dalla prima e dalla terza equazione, si ottiene

$$a''(y) = -\,a(y), \quad b''(y) = -b(y)$$

e da queste due equazioni, unitamente ai valori di a e b prima trovati si ottiene

$$a(y) = \cos(y), \quad b(y) = \sin(y)$$

e dunque

$$e^{iz} = e^x\,(\cos(y) + i \sin(y))$$

(*) la soluzione delle equazioni che compaiono in questa nota verranno studiate nel corso di Analisi Matematica IIA.