**2.** Data la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3} - 1$, determinare, mediante l'uso della formula di Mac Laurin, l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto all'infinitesimo

$$g(x) = \sqrt[3]{1+2x} - 1 \qquad\qquad \text{per } x \to 0.$$

**Svolgimento**

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ $f$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin ed il suo sviluppo è dato da:

$$e^{\frac{1}{3}x^3} - 1 = \frac{1}{3^n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!} - 1 = 1 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - 1 = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Analogamente possiamo sviluppare $g$, per ogni $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$:

$$\sqrt[3]{1+2x} - 1 = (1+2x)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1 + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} 2x + o(x) - 1 = \frac{2}{3}x + o(x).$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{3}x^3} - 1}{(\sqrt[3]{1+2x} - 1)^{\alpha}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{\left(\frac{2}{3}x + o(x)\right)^{\alpha}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^{\alpha}\left(\frac{2}{3} + o(1)\right)^{\alpha}}$$

e, per $\alpha = 3$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{3}x^3} - 1}{(\sqrt[3]{1+2x} - 1)^{\alpha}} = \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{9}{8}.$$

Pertanto $f$ è un infinitesimo del terzo ordine rispetto a $\sqrt[3]{1+2x} - 1$.