I appello - 19 Dicembre 2001

I.1) Studiare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + \frac{|x|}{2}}.$$

I.2) Svolgere il seguente limite senza utilizzare la regola di Hospital:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x}.$$

I.3) Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{x^3}{x^8 + 5} dx.$$

Svolgimento

I.1) Il dominio della funzione risulta essere tutto l'asse reale, dunque $D = I\!R$. Esplicitando il modulo si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \dfrac{2}{1 + \frac{x}{2}} & \text{per } x \geq 0 \\ x - 1 + \dfrac{2}{1 - \frac{x}{2}} & \text{per } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 + \frac{4}{2+x} & \text{per } x \geq 0 \\ x - 1 + \frac{4}{2-x} & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Non ci sono asintoti verticali; controlliamo quelli orizzontali

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Non ci sono, allora, neppure gli asintoti orizzontali; controlliamo, infine, quelli obliqui

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x(2 \pm x)} = 1 = m$$

mentre

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} -1 + \frac{4}{2 \pm x} = -1 = n.$$

Quindi la retta $y = x - 1$ risulta un asintoto obliquo.

Studiamo la derivabilità. Un punto di non derivabilità potrebbe risultare $x = 0$ poiché annulla il modulo. Per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{4}{(2+x)^2} & \text{per } x > 0 \\ 1 + \dfrac{4}{(2-x)^2} & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Studiamo ora $f'(0)$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 2.$$

Dunque non esiste $f'(0)$. Per quanto riguarda il segno della derivata prima si ottiene

$$1 - \frac{4}{(2+x)^2} > 0 \Longleftrightarrow 1 > \frac{4}{(2+x)^2}$$

che risulta vero per ogni $x > 0$, mentre

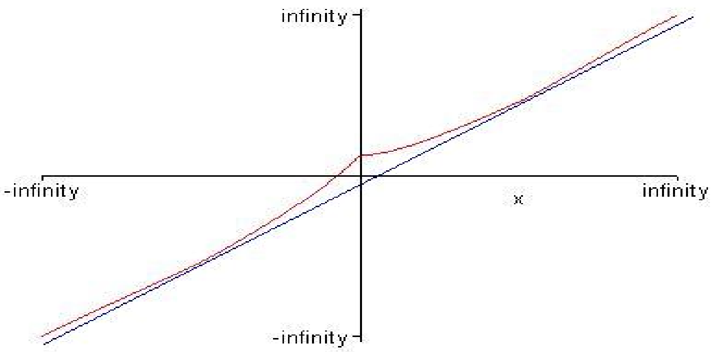
$$1 + \frac{4}{(2-x)^2} > 0$$

risulta soddisfatto per ogni $x < 0$. La funzione è allora sempre crescente in tutto il dominio.

Per concludere studiamo la derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{(2+x)^3} & \text{per } x > 0 \\ \dfrac{8}{(2-x)^3} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Entrambe le quantità sono sempre positive e quindi f risulta convessa separatamente per $x < 0$ e per $x \geq 0$. Il grafico della funzione è il seguente:



I.2) Si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{2\sin 2x \cos 2x(\sin x + \cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{2\sin 2x\cos 2x(\sin x + \cos x)}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\cos 2x}{2\sin 2x\cos 2x(\sin x + \cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{2\sin 2x(\sin x+\cos x)}\\ &= -\frac{1}{2(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2})} = -\frac{1}{2\sqrt2}.\end{aligned}$$

I.3) Si ha

$$\int \frac{x^3}{x^8+5}dx = \frac{1}{4}\int\frac{4x^3}{x^8+5}dx = \frac14\int\frac{4x^3}{(x^4)^2+5}dx.$$

Ponendo $x^4 = t$ si ottiene $4x^3dx = dt$ e quindi

$$\begin{aligned}\frac14\int\frac{dt}{t^2+5} &= \frac{1}{20}\int\frac{dt}{\frac{t^2}{5}+1} = \frac{1}{20}\int\frac{dt}{(\frac{t}{\sqrt5})^2+1}\\ &= \frac{\sqrt5}{20}\int\frac{\frac{1}{\sqrt5}}{(\frac{t}{\sqrt5})^2+1}dt = \frac{\sqrt5}{20}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt5}\right)+C\\ &= \frac{1}{4\sqrt5}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt5}\right)+C.\end{aligned}$$

II appello - 10 Gennaio 2002

II.1) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{1}{n}-1].$$

II.2) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-1}^{2}7x^2(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

II.3) Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+2x+k}{x+2}$ determinare k e tracciare il grafico cartesiano sapendo che l' intersezione con l'asse delle y appartiene alla retta di equazione $y=x-4$.

Svolgimento

II.1) Proviamo che si tratta di una serie a segni alterni. Poniamo $a_n = e^{\frac{1}{n}}\cos\dfrac{1}{n}-1$. Denotiamo ora con $f(x)$ la funzione$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}-1$ con $x\geq 1$, risulta $a_n = f(1/n)$. Se studiamo la derivata prima di f otteniamo che $f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}[\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}]$. Risulta $f'\leq 0$ in $[\dfrac{4}{\pi},\infty[$. Pertanto a_n è non negativa ($\inf_n a_n = 0$) e definitivamente monotona non crescente; inoltre $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Per il criterio di Leibnitz dunque la serie converge.

Studio della convergenza assoluta. Per determinare l'ordine di infinitesimo di a_n basta considerare i polinomi di Taylor di $e^{\frac{1}{n}}$ e di $\cos\frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n}} &= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \\ \cos\frac{1}{n} &= 1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

ed eseguire il loro prodotto:

$$e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{1}{n}-1=\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})$$

Allora per il criterio del confronto asintotico la serie dei valori assoluti diverge. Pertanto la serie data converge semplicemente.

II.2) Integrando per sostituzione ($t=x^3+1$)) si ha

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}7x^2(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}dx &= \int_{-1}^{2}\frac{7x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx=7\int_{-1}^{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx=\\ &= \frac{7}{3}\int_{-1}^{2}\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx=\frac{7}{3}\left[2\sqrt{x^3+1}\right]_{-1}^{2}=\frac{7}{3}\,6=14.\end{aligned}$$

II.3) Imponendo il passaggio per il punto (0,-4) si ottiene $k=-8$, pertanto la funzione da studiare è:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+k}{x+2}.$$

La funzione f è definita in tutti i punti tranne che in $x=-2$ dove ha un asintoto verticale.

$$\lim_{x\to-2^{\pm}}f(x)=-\pm\infty.$$

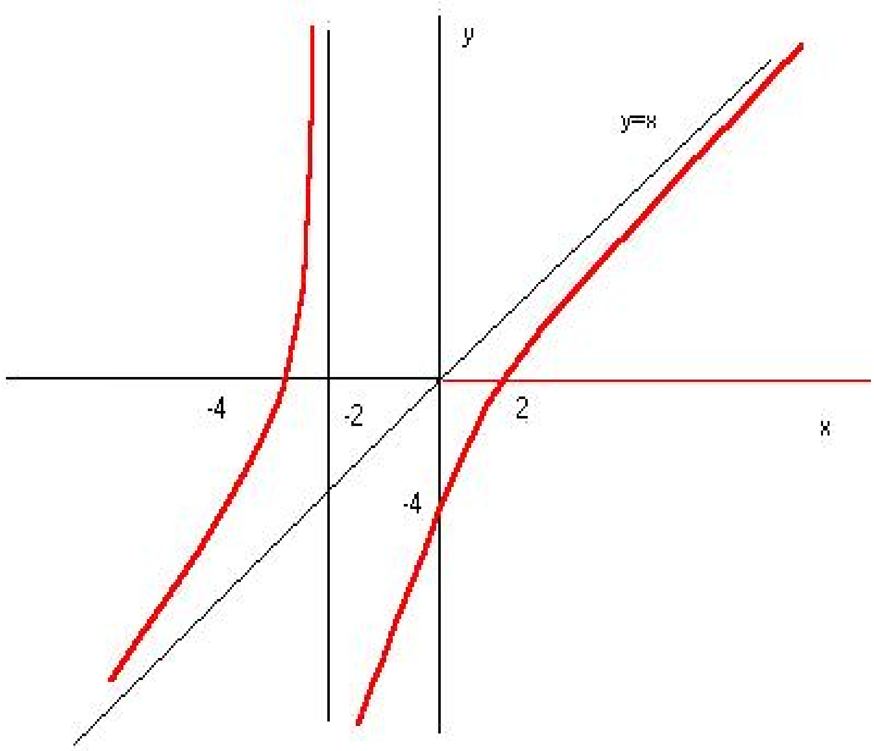
Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)-x=0.$$

Dunque la funzione non ha asintoti orizzontali ma ha un asintoto obliquo $y=x$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

La funzione $f(x)$ si annulla nei punti $x=-4, x=2$ ed è positiva negli intervalli: $]-4,-2[$, $]2,+\infty[$. La sua derivata prima non è definita per $x=-2$, in tutti gli altri punti vale $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+12}{(x+2)^2}$ ed in tale insieme è sempre positiva. Dunque f è crescente per $x>-2$ ed è crescente per $x>-2$.

La derivata seconda, sempre per $x \neq -2$, vale $f''(x) = -\dfrac{16}{(x+2)^3}$ e dunque la funzione risulta convessa per $x < -2$ e concava per $x > -2$. Il grafico della funzione è il seguente:



III appello - 22 Marzo 2002

III.1) Si studi, nel suo campo di esistenza la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^4 + x} - x^2$$

con particolare attenzione agli asintoti, agli eventuaili punti di massimo o di minimo, e ai punti di non derivabilità.

III.2) Facendo riferimento alla funzione f dell'esercizio precedente si determinino i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\alpha}$$

risulta convergente.

III.3) Sempre in riferimento alla funzione f del primo esercizio si calcoli il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (f(x) + x^2)(4x^3 + 1)dx.$$

Svolgimento

III.1) Il campo di esistenza A della funzione f è l'insieme dei punti per i quali ha significato $\sqrt{x^4 + x}$. Pertanto

$$A \;=\; \{x : x^4 + x \geq 0\} = \{x : x(x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[.$$

Inoltre $f(0) = 0, f(-1) = -1$. Se $x > 0$ allora

$$(1) \qquad x^4 + x > x^4 \implies \sqrt{x^4 + x} > x^2 \implies f(x) > 0$$

mentre se $x < -1$ risulta:

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ f(x) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \\ \sqrt{x^4+x} \leq x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \\ x^4+x \leq x^4 \end{cases} \iff x \leq -1.$$

Cerchiamo ora gli eventuali asintoti della funzione f. Non ci possono essere asintoti verticali in quanto la funzione è definita con continuità in 0 e in -1. Cerchiamo gli eventuali asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^4+x} - x^2\right) \frac{\sqrt{x^4+x}+x^2}{\sqrt{x^4+x}+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+x}+x^2} = 0.$$

Pertanto la funzione ha asintoti orizzontali per x che tende a $\pm\infty$. Da questo risultato possiamo dedurre inoltre che:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$$

e che $f(n)$ è un infinitesimo per $n \to \infty$ di ordine 1, infatti:

$$(2) \qquad f(n) = \frac{n}{\sqrt{n^4+n}+n^2} = \frac{n}{n^2(1+\sqrt{1+1/n^3})} \sim \frac{1}{n}.$$

Studiamo ora la derivabilità della funzione f in $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ (abbiamo eliminato gli estremi 0,-1 perchè in essi la radice si annulla ed in tali punti il primo addendo della funzione non è derivabile). Nei punti di derivabilità, applicando la regola di derivazione delle funzioni composte si ottiene:

$$f'(x) = \frac{4x^3+1}{2\sqrt{x^4+x}} - 2x.$$

Studiamo il segno della derivata prima. La derivata prima è non negativa se e solo se

$$4x^3+1 \geq 4x\sqrt{x^4+x}.$$

Dobbiamo allora risolvere questa disequazione in $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

Cominciamo con la semiretta positiva:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4x^3+1 \geq 4x\sqrt{x^4+x} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x^4+x} \leq x^2 + \dfrac{1}{4x} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x^4+x \leq x^4 + \dfrac{1}{16x^2} + \dfrac{x}{2} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{1}{16x^2} - \dfrac{x}{2} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ 1 - 8x^3 \geq 0 \end{cases} \iff 0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

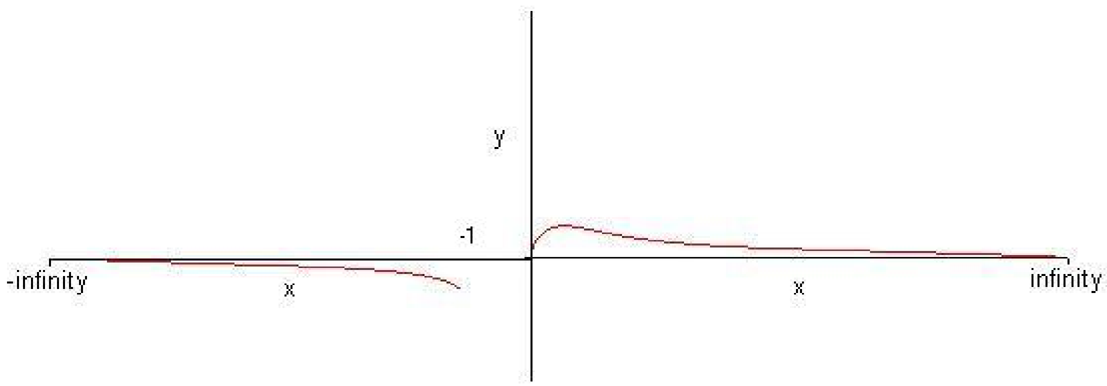
Esaminiamo ora il segno della derivata in $]-\infty, -1[$:

$$\begin{cases} x < -1 \\ 4x^3 + 1 \geq 4x\sqrt{x^4 + x} \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1 \\ \sqrt{x^4 + x} \geq x^2 + \dfrac{1}{4x} \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1 \\ 1 - 8x^3 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

La funzione f è dunque decrescente per $x \leq 1$, nel punto -1 ha un minimo relativo, è poi crescente per $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$; in $x = \frac{1}{2}$ ha un massimo relativo e poi la funzione decresce di nuovo. Osserviamo poi che i punti di minimo e di massimo relativo sono anche di massimo e di minimo assoluti. Per l'eventuale (e non richiesto nel compito) studio della concavità e della convessità della funzione dobbiamo calcolare la derivata seconda di f:

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{(4x^3+1)^2}{(x^4+x)^{3/2}} + 6\frac{x^2}{\sqrt{x^4+x}} - 2.$$

La derivata seconda è sempre negativa per $x < -1$ (dunque la funzione è concava in questa semiretta, mentre cambia di segno nella semiretta $]0, \infty[$. Il grafico qualitativo della funzione f è il seguente:



III.2) La serie data è a termini non negativi. Infatti, da (1), $f(n) \geq 0$. La serie dunque non può essere indeterminata.

Abbiamo inoltre provato in (2) che $f(n)$ è un infinitesimo di ordine 1 quando $n \to \infty$, dunque

$$\frac{f(n)}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

e dunque la serie data converge per $\alpha + 1 > 1$, cioè per $\alpha > 0$.

III.3) Si tratta di un integrale immediato:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(x)+x^2)(4x^3+1)dx &= \int_0^1 \sqrt{x^4+x}(4x^3+1)dx = \int_0^1 \sqrt{x^4+x}\ d(x^4+x) = \\ &= \frac{2}{3}\left[\sqrt{(x^4+x)^3}\right] = \frac{4}{3}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

IV appello - 17 Aprile 2002

IV.1) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

IV.2) Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$ determinare un punto P della circonferenza (nel primo quadrante) tale che il segmento di tangente alla circonferenza passante per P e intercettato dagli assi coordinati abbia lunghezza minima.

IV.3) Data la funzione $f(x) = x(e^x - e^{-x})$ calcolare $\int_0^1 f(x)dx$. La funzione f è pari? Calcolare $\int_{-1}^1 f(x)dx$ senza fare conti, ma utilizzando i risultati precedenti.

IV.4) Calcolare $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$. Generalizzare il risultato precedente mostrando che $1 + i + i^2 + \ldots + i^{4n} = 1$ per ogni $n > 0$.

Svolgimento

IV.1) Si tratta di una serie telescopica, spezziamo il termine generale in due addendi:

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{(n+1)^2} = \frac{(a+b)n^2 + 2an + a}{n^2(n+1)^2}.$$

Per il rpincipio di identità dei polinomi $a = 1, b = -1$. La seire allora si può scrivere nella forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

La somma parziale n-esima della serie è data da

$$s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

IV.2) Denotiamo con A, B l'intersezione della tangente con gli assi delle x e delle y rispettivamente. Scriviamo in coordinate polari l'equazione del punto P

$$P := \begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Il segmento PB ha lunghezza $r\tan t$ mentre il segmento PA ha lunghezza $r\cot t$. Bisogna dunque minimizzare la funzione

$$l(r) = r\tan t + r\cot t \;=\; \frac{r}{\sin t\cos t} = \frac{2r}{\sin 2t}$$

nell'intervallo aperto $]0, \pi/2[$, (nei due estremi la tangente è parallela ad uno degli assi coordinati ed il segmento diventa una semiretta). Deriviamo la funzione $l(t)$,

$$l'(t) = \frac{-4r\cos 2t}{\sin^2 2t}; \qquad l'(t) \geq 0 \Longleftrightarrow \cos 2t \leq 0.$$

Studiando l'ultima disuguaglianza si trova un minimo per $t = \pi/4$ pertanto il punto P si trova sulla bisettrice del primo e terzo quadrante.

IV.3) la funzione f è pari infatti:

$$f(-x) = -x(e^x - e^{-x}) = x(e^x - e^{-x}) = f(x).$$

Siccome l'intervallo $[-1, 1]$ è simmetrico rispetto all'asse y risulterà:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \;=\; 2\int_0^1 f(x)dx.$$

Calcoliamo ora per parti il primo integrale

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 x(e^x)'dx + \int_0^1 x(e^{-x})'dx = \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx + [xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}dx = \\ &= e + 1 - e + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} - 1 = \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

IV.4) Risulta:

$$i^0 = 1 \quad i^1 = 1 \quad i^2 = i \cdot i = -1 \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

Pertanto $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = 1 + i - 1 - i + 1 = 1$. Proviamo ora per induzione che $1 + i + i^2 + \ldots + i^{4n} = 1$. La proprietà è stata provata per $n = 1$, supponiamo che sia vera per un generico intero n e dimostriamola per $n + 1$.

$$\begin{aligned}
1 + i + i^2 + \ldots + i^{4(n+1)} &= 1 + i + i^2 + \ldots + i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} + i^{4n+4} = \\
&= 1 + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} + i^{4n+4} = 1 + i^{4n}(i + i^2 + i^3 + i^4) = \\
&= 1 + i - 1 - i + 1 = 1.
\end{aligned}$$

V appello - 9 Luglio 2002

Cognome ________________________ Nome ________________ Matricola ______________

V.1) Studiare, per $x \geq 0$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$

V.2) Studiare il comportamento della funzione $f(x) = x/(x+1) + \lg(x)$ e tracciarne il grafico.

V.3) Dire se la funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}\cos x \sin x$ ammette primitive in $[0, \frac{\pi}{2}]$, determinare poi una primitiva che assume valore 1 in $\frac{\pi}{2}$.

Svolgimento

V.1) La serie é a termini positivi quindi non può essere indeterminata.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Pertanto la serie diverge per $0 \leq x \leq 1$ poiché il suo termine generale non tende a zero. Per $x > 1$ $\dfrac{1}{1+x^n} \leq (\dfrac{1}{x})^n$ per ogni $n \in I\!N$ quindi per il criterio del confronto la serie converge poiché il suo termine generale é maggiorato dal termine generale di una serie geometrica di ragione positiva e minore di 1.

V.2) La funzione f è definita nell'insieme $]0,\infty[$ perché in tale insieme risulta definito il logaritmo e il denominatore del primo addendo non si annulla. Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

C'è dunque un asintoto verticale per $x = 0$ e non ci sono asintoti orizzontali.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

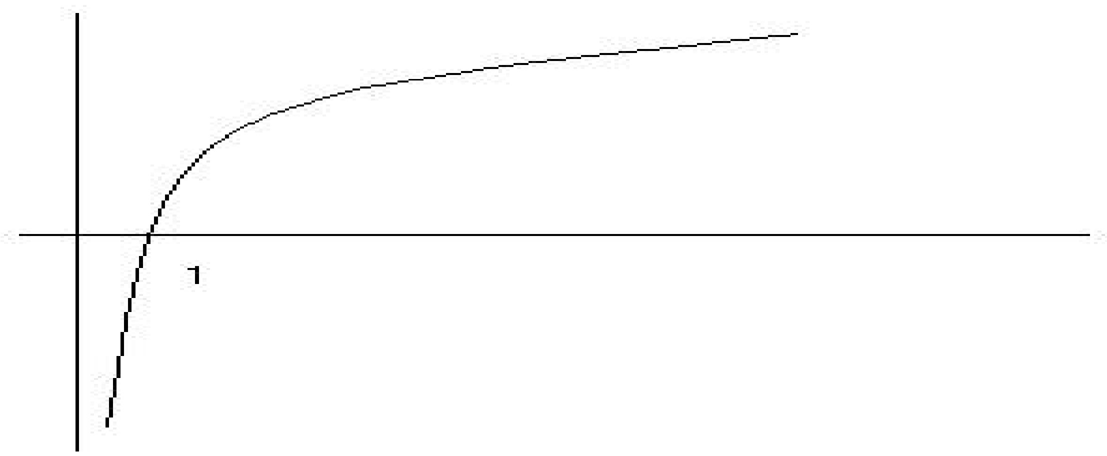
e dunque non ci possono essere neanche asintoti obliqui (se ci fossero il coefficiente angolare sarebbe nullo ed otterremo un asintoto orizzontale). Calcoliamo ora la derivata prima della funzione

$$f'(x) \quad = \quad \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x}$$

e dunque la funzione f è sempre crescente nel suo dominio (gli addendi sono entrambi positivi). Per quanto riguarda la derivata seconda

$$f''(x) \quad = \quad -\left(\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{x^2}\right)$$

essa assume sempre segno negativo e dunque la funzione f è concava. Il grafico della funzione f è dato da:



V.3) Nell'insieme $[0\frac{\pi}{2}]$ la funzione f è continua e limitata ed è dunque integrabile alla Riemann. f pertanto ammette primitive In ogni caso

$$\int f(x)dx = \int -[\cos x]^{3/2} d(\cos x) = -\int y^{3/2} dy = -\frac{2}{5}[\cos x]^{5/2} + c.$$

$$F(\frac{\pi}{2}) = c = 1$$

e quindi una primitiva cercata è $P(x) = -\frac{2}{5}[\cos x]^{5/2} + 1$.

VI appello - 11 Settembre 2002

VI.1) Formare con un filo di lunghezza L un quadrato e un triangolo equilatero tali che la somma delle loro aree sia massima.

VI.2) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{2x+1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}dx.$$

VI.3) Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n+1}.$$

Svolgimento

VI.1) Se denotiamo con x la lunghezza del lato del triangolo equilatero allora il lato del quadrato ha lunghezza $\frac{L-3x}{4}$. L'altezza del triangolo equilatero è data da $\frac{x}{2}\sqrt{3}$ e dunque la somma delle aree è

$$A(x) = (\frac{L-3x}{4})^2 + \frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{16}\left(x^2(9+4\sqrt{3}) - 6Lx + L^2\right).$$

Se deriviamo otteniamo:

$$\begin{aligned} 16A'(x) &= 2x(9+4\sqrt{3}) - 6L \geq 0 \\ x &\geq \frac{3L}{9+4\sqrt{3})} \end{aligned}$$

Studiando il segno della derivata prima si osserva che il Valore $x = \frac{3L}{9+4\sqrt{3}}$ è quello che rendere massima la somma delle aree

VI.2) Il denominatore della integranda si scompone nel seguente modo:

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1).$$

Usiamo la formula di Hermite per decomporre l'integranda:

$$\begin{aligned} & \frac{2x+1}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1} = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} \\ = \quad & \frac{(a+c)x^2 + (2a+b+2c+d)x^2 + (a+2b+2c+d)x + (b+c+d)}{(x+1)^2(x^2+x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2a + b + 2c + d = 0 \\ a + 2b + 2c + d = 2 \\ b + c + d = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases}$$

E dunque

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-x}{x^2+x+1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx + \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c \\ &= -\frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})}dx + \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c \\ &= -\frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}) + \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c \end{aligned}$$

VI.3) La serie data è a termini positivi ed il suo termine generale è una funzione pari. È sufficiente dunque studiarla per $x \geq 0$. Studiamo innanzitutto il comportamento del termine generale quando n tende a $+\infty$ e per $x \geq 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{3^n+1} = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \sqrt{3} \\ 1 & x = \sqrt{3} \\ +\infty & x > \sqrt{3} \end{cases}$$

Se ne deduce dunque immediatamente che la serie data diverge per $|x| \geq \sqrt{3}$. Se invece $|x| < \sqrt{3}$ si ha che

$$\frac{x^{2n}}{3^n + 1} \leq (\frac{x^2}{3})^n$$

e dunque la serie data converge per confronto poiché è maggiorata da una serie geometrica di ragione più piccola di 1.

VII appello - 23 Settembre 2002

VII.1) Studiare il grafico della funzione $g(x) = x^3 - 5x^2 - x + 17$, determinandone in particolare crescenza, decrescenza, massimi e minimi.

VII.2) Utilizzando l'esercizio precedente studiare il grafico della funzione

$$f(x) = e^x \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}.$$

VII.3) Studiare, al variare di $x \in I\!R$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x^2)^n}{2^{n-1}}.$$

Svolgimento

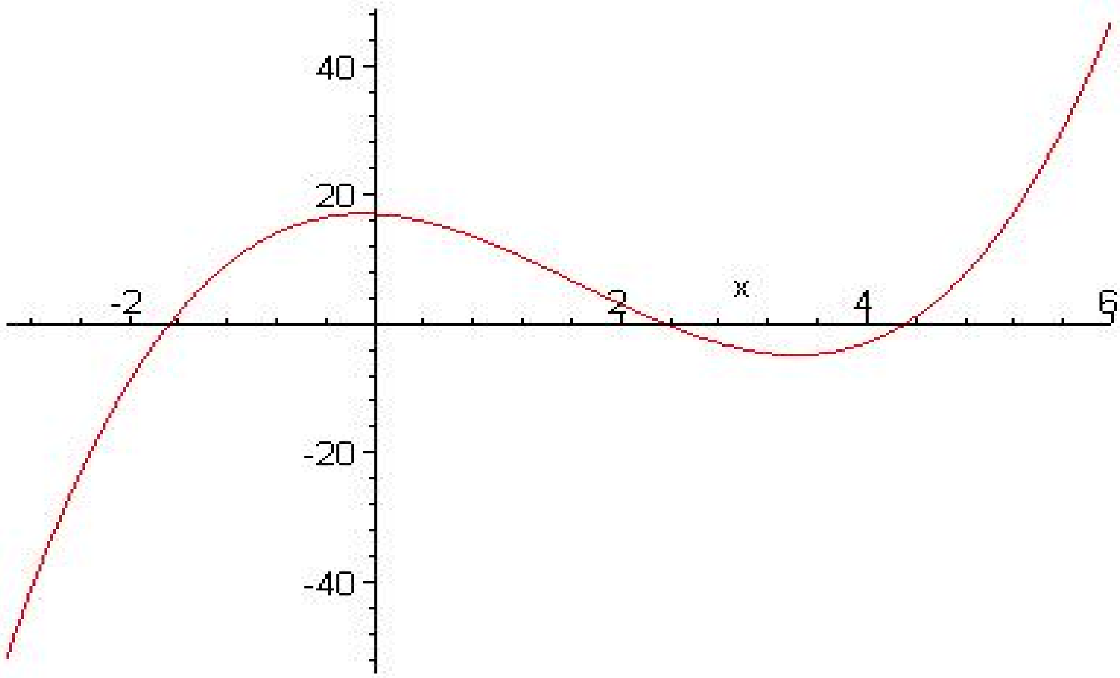
VII.1) La funzione g è una cubica definita su tutto $I\!R$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty.$$

La derivata prima di g è data da:

$$g'(x) = 3x^2 - 10x - 1$$

e dunque la funzione g è crescente quando $x < (5 - \sqrt{28})/3$ oppure $x > (5 + \sqrt{28})/3$, mentre è decrescente quando $(5-\sqrt{28})/3 < x < (5+\sqrt{28})/3$. Il punto $x_1 = (5-\sqrt{28})/3$ è un punto di massimo relativo, mentre il punto $x_2 = (5+\sqrt{28})/3$ è un punto di minimo relativo. Nel punto di massimo relativo la funzione assume valore positivo, mentre in quello di minimo assume valore negativo. Applicando allora il teorema degli zeri si ottiene che la funzione ha tre radici reali, una prima di x_1, una tra x_1 e x_2 e l'ultima dopo x_2. Anche se non possiamo trovare i valori esatti degli zeri possiamo sempre approssimarli utilizzando il metodo delle tangenti o delle secanti. Accontentiamoci di trovare un intervallo di ampiezza 1 in cui cade la radice. Poiché $g(-1)\cdot g(-2) < 0$ allora la prima radice $a_1 \in]-2,-1[$, analogamente $g(2)\cdot g(3) < 0$, $a_2 \in]2,3[$ e $g(4)\cdot g(5) < 0$ e quindi $a_3 \in]4,5[$. Il grafico della funzione g è dunque dato da:



VII.2) La funzione f è definita in tutti i punti dell'asse reale tranne che nei punti 2,3. Studiamo innanzitutto il segno della funzione f. Il valore della funzione f in 0 è $f(0) = 1/6$. Poiché e^x è sempre di segno positivo il segno di f è determinato dal segno di $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$. Il numeratore è positivo per $x > -1$, il denominatore è positivo per $x < 2$ oppure per $x > 3$. Dunque, per la regola dei segni

$$f(x) > 0 \quad \text{per } -1 < x < 2 \text{ oppure } x > 3$$

$$f(x) < 0 \quad \text{per } x < -1 \text{ oppure } 2 < x < 3$$

$$f(x) = 0 \quad \text{per } x = -1.$$

Lo studio del segno di f ci aiuta anche nello studio degli asintoti:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$$

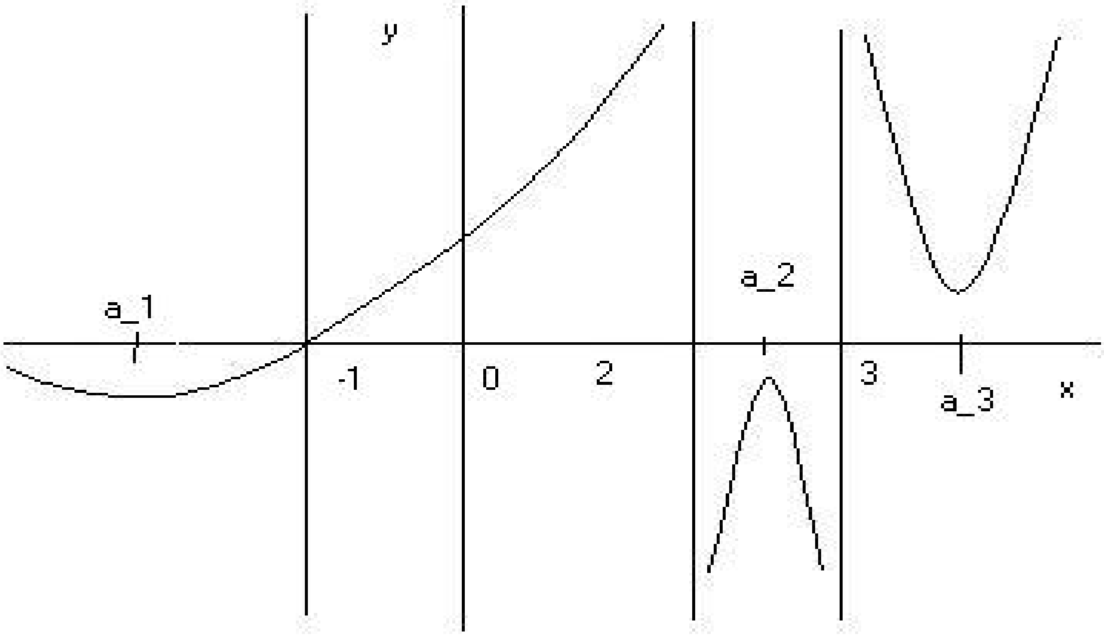
Dunque ci sono un asintoto orizzontale $y = 0$ quando $x \to -\infty$, e due asintoti verticali $x = 2, x = 3$. Non ci possono essere asintoti obliqui perché, per $x \to \infty$ la funzione e^x è un infinito di ordine superiore rispetto a qualunque potenza di x. Studiamo ora la derivata prima di f. Risulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \frac{x+1}{x^2-5x+6} + e^x \frac{1}{x^2-5x+6} - e^x \frac{(x+1)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2} \\ &= e^x \frac{1}{(x^2-5x+6)^2}(x^3-5x^2-x+17) = e^x \frac{1}{(x^2-5x+6)^2} g(x) \end{aligned}$$

A questo punto il segno di f' è individuato (nei punti diversi da 2, 3) dal segno di g e dunque

f decresce per	$x < a_1$ oppure $a_2 < x < 3$ oppure $3 < x < a_3$
f cresce per	$a_1 < x < 2$ oppure $2 < x < a_2$ oppure $x > a_3$
f ha minimi relativi in	$x = a_1, x = a_3$
f ha un massimo relativo in	$x = a_2$.

Il grafico della funzione f è il seguente:



VII.3) Si tratta di una serie geometrica

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x^2}{2}\right)^n$$

di ragione $q = \dfrac{1+x^2}{2}$. Pertanto la serie si comporta nel seguente modo

$\lvert q\rvert < 1$	$1+x^2 < 2$	$\lvert x\rvert < 1$	la serie converge
$q \geq 1$	$1+x^2 \geq 2$	$\lvert x\rvert \geq 1$	la serie diverge
$q \leq -1$	$1+x^2 \leq -2$		non è mai verificato.

Se inoltre $|x| < 1$ la somma della serie è data da

$$s = 2\left(\frac{2}{1-x^2} - 1\right).$$