Proviamo che per ogni $n \in I\!\!N$ vale

$$[(n+1)!]^n \leq \prod_{k=0}^{n} (2k)!.$$

Dimostriamo questa disuguaglianza utilizzando il principio di induzione. Dobbiamo pertanto provare la disuguaglianza per il primo n, supporla poi vera in un generico intero n e dimostrarla per l'intero successivo $(n+1)$.

Per $n = 0$ risulta $1 = 1$.

Supponiamo allora che la disuguaglianza sia vera in un generico intero n e proviamo la disuguaglianza per $n+1$.

$$\begin{aligned} [(n+2)!]^{n+1} &= (n+2)! \cdot [(n+2)!]^n = (n+2)![(n+2)(n+1)!]^n = \\ &= (n+2)!(n+2)^n[(n+1)!]^n \leq (n+2)!(n+2)^n \prod_{k=0}^{n} (2k)! \end{aligned}$$

Se ora proviamo che $(n+2)!(n+2)^n \leq (2n+2)!$ allora la disuguaglianza è vera per $n+1$.

Proviamo allora che

$$\frac{(n+2)!(n+2)^n}{(2n+2)!} \leq 1.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{(n+2)!(n+2)^n}{(2n+2)!} &= \frac{(n+2)!(n+2)^n}{(2n+2)(2n+1)\cdots(n+3)(n+2)!} = \\ &= \frac{(n+2)}{2n+2} \cdot \frac{(n+2)}{2n+1} \cdots \frac{(n+2)}{n+3} \leq 1 \end{aligned}$$

poiché tutti i fattori sono minori o uguali ad 1. Allora, per il principio di induzione la disuguaglianza è vera per ogni $n \in I\!\!N$.