Dimostriamo che tra tutti i triangoli isosceli di perimetro assegnato quello equilatero ha area massima.

Denotata con $2y$ la base del triangolo isoscele e x la lunghezza del lato obliquo, si tratta di risolvere il seguente problema di massimo

$$\begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ 2x + 2y = 2p > 0 \\ \max y\sqrt{x^2 - y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ x = p - y \\ \max y\sqrt{p^2 - 2py}. \end{cases}$$

Cerchiamo allora il minimo assoluto della funzione $g(y) = y\sqrt{p^2 - 2py}$, con il vincolo che $y > 0$.

$$g'(y) = \sqrt{p^2 - 2py} - \frac{py}{\sqrt{p^2 - 2py}} = \frac{p^2 - 3py}{\sqrt{p^2 - 2py}} \geq 0 \iff y \leq \frac{p}{3}.$$

Dunque la funzione g è crescente per $0 < y < \frac{p}{3}$, decrescente per $y > \frac{p}{3}$, ne risulta che il massimo assoluto è raggiunto per $y = \frac{p}{3}$, in tal caso il triangolo è equilatero.