8) Sviluppare in serie di Mac-Laurin la funzione

$$e^{ax}\cos bx.$$

Dalle formule di Eulero si ha

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

quindi la funzione diventa

$$e^{ax}\cos bx = e^{ax}\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2} = \frac{e^{(a+ib)x}+e^{(a-ib)x}}{2} = \frac{e^{(a+ib)x}}{2}+\frac{e^{(a-ib)x}}{2}.$$

Sviluppando i singoli addendi otteniamo

$$\frac{e^{(a+ib)x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a+ib)^n x^n}{n!} = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(a+ib)^n x^n}{n!}$$

e

$$\frac{e^{(a-ib)x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a-ib)^n x^n}{n!} = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(a-ib)^n x^n}{n!}.$$

Infine sommando le due serie convergenti si ottiene la serie somma

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(a+ib)^n+(a-ib)^n}{n!}x^n.$$