Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + k}{x + 2}$ determinare k e tracciare il grafico cartesiano sapendo che l' intersezione con l'asse delle y appartiene alla retta di equazione $y = x - 4$.

Imponendo il passaggio per il punto (0,-4) si ottiene $k = -8$, pertanto la funzione da studiare è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + k}{x + 2}.$$

La funzione f è definita in tutti i punti tranne che in $x = -2$ dove ha un asintoto verticale.

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = - \pm \infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = 0.$$

Dunque la funzione non ha asintoti orizzontali ma ha un asintoto obliquo $y = x$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

La funzione $f(x)$ si annulla nei punti $x = -4, x = 2$ ed è positiva negli intervalli: $]-4, -2[,\ ]2, +\infty[$. La sua derivata prima non è definita per $x = -2$, in tutti gli altri punti vale $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 12}{(x + 2)^2}$ ed in tale insieme è sempre positiva. Dunque f è crescente per $x > -2$ ed è crescente per $x > -2$.

La derivata seconda, sempre per $x \neq -2$, vale $f''(x) = -\dfrac{16}{(x + 2)^3}$ e dunque la funzione risulta convessa per $x < -2$ e concava per $x > -2$. Il grafico della funzione è il seguente: