Suppooniamo di voler determinare una formula generale che permetta di esprimere:

$$1 = 1$$

$$1 - 4 = -(1 + 2)$$

$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$$

$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4)$$

Osserviamo che a destra dell'uguaglianza otteniamo la somma dei primi n numeri preceduta da un + oppure un - alternativamente, mentre a sinistra dell'uguaglianza abbiamo la somma dei quadrati dei primi n numeri presi anche loro altrnativamente con il segno + e con il segno -. Proviamo allora che per ogni $n \geq 1$ vale

$$1 - 4 + 9 + \ldots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Osserviamo che nell'esercizio N. 5 abbiamo già provato che

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dimostriamo questa uguaglianza utilizzando il principio di induzione. Dobbiamo pertanto provare la disuguaglianza per il primo n, supporla poi vera in un generico intero n e dimostrarla per l'intero successivo $(n + 1)$.

Per $n = 0$ risulta $1 = 1$.

Supponiamo allora che la disuguaglianza sia vera in un generico intero n e proviamo la disuguaglianza per $n+1$.

$$\begin{aligned}
& 1-4+\ldots+(-1)^{n+1}n^2+(-1)^{n+2}(n+1)^2 = \\
= \; & (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^{n+2}(n+1)^2 = \\
= \; & -(-1)^{n}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^{n}(n+1)^2 = (-1)^n\left[-\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)^2\right] = \\
= \; & (-1)^{n+2}(n+1)\left[-\frac{n}{2}+(n+1)\right] = (-1)^{n+2}(n+1)\frac{n+2}{2}.
\end{aligned}$$

Allora, per il principio di induzione l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.