Studiamo il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})\ x^n$$

al variare di $x \in I\!R$.

Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \sin(\frac{1}{n})x^n$, consideriamo allora $|a_n| = \sin(\frac{1}{n})|x|^n$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n+1})|x|^{n+1} \cdot [\sin(\frac{1}{n})]^{-1} \frac{1}{|x|^n} = |x|$$

Dunque,

- se $|x| < 1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;

- se $x > 1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;

- se $x = 1$ la serie data diverge a $+\infty$ infatti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$, (si può provare utilizzando il criterio del confronto asintotico ed il limite notevole $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n})/(1/n) = 1$);

- se $x = -1$ la serie data converge semplicemente per il criterio di Leibnitz poiché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$ e la successione non negativa $(\sin(\frac{1}{n}))_n$ è infinitesima e decrescente a zero;

- se $x < -1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |x|^n \sin(\frac{1}{n})$. Proviamo che $b_n = |x|^n \sin(\frac{1}{n})$ è crescente da un certo $m \in I\!N$ in poi.

  $$b_n = \sin(\frac{1}{n})|x|^n \leq \sin(\frac{1}{n+1})|x|^{n+1} = b_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(\frac{1}{n})[\sin(\frac{1}{n+1})]^{-1} \leq |x$$

Sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n})[\sin(\frac{1}{n+1})]^{-1} = 1$$

e dunque, per la definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $1+\varepsilon < |x|$, esiste $m \in I\!N$ tale che

$$1-\varepsilon \leq \sin(\frac{1}{n})[\sin(\frac{1}{n+1})]^{-1} \leq 1+\varepsilon < |x|$$

e dunque la serie data è indeterminata.