1) Calcolare il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{\sin x}.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Verifichiamo che si puó adoperare la regola di L'Hospital;le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno del punto zero, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $\cos x$, risulta diversa da zero in un intorno opportuno del punto zero. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2^x \log 2 - 3^x \log 3}{\cos x} \\ &= \log 2 - \log 3 = \log \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2) Calcolare il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Verifichiamo che si puó adoperare la regola di L'Hospital;le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno del punto zero, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $-\sin x$, risulta diversa da zero in un intorno opportuno del punto zero privato del punto stesso. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\cos x-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x - x^2\sin x}{-\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{x}{\sin x}(2\cos x - x\sin x) = -2.\end{aligned}$$

3) Calcolare il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2+3x)^4}{\log(5+7x)^3}.$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2+3x)^4}{\log(5+7x)^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4\log(2+3x)}{3\log(5+7x)}.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Verifichiamo che si puó adoperare la regola di L'Hospital;le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in una semiretta destra, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $\frac{1}{5+7x}$, risulta sempre diversa da zero. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{4\log(2+3x)}{3\log(5+7x)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{3}\frac{\frac{3}{2+3x}}{\frac{7}{5+7x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{3}\frac{3}{2+3x}\frac{5+7x}{7} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

4) Calcolare il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5\log x}{\log \sin x}.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Verifichiamo che si puó adoperare la regola di L'Hospital;le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno del punto zero, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $\cot x$, risulta diversa da zero in un opportuno intorno destro di zero. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{5\log x}{\log \sin x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{5}{x}}{\cot x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{5}{x}\frac{\sin x}{\cos x} = 5.\end{aligned}$$

5) Calcolare il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata $0\cdot\infty$.

Si osservi che

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

e quindi si é ricondotti allo studio del limite del rapporto di due infiniti. Verifichiamo che si puó adoperare la regola di L'Hospital;le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno destro del punto zero, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $-\frac{1}{x^2}$, risulta sempre diversa da zero. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.\end{aligned}$$

6) Calcolare il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x\to +\infty} x\log(\frac{x-2}{x+2}).$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata $0\cdot\infty$.

Si osservi che

$$\lim_{x\to +\infty} x\log(\frac{x-2}{x+2}) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(\frac{x-2}{x+2})}{\frac{1}{x}}$$

e quindi si é ricondotti allo studio del limite del rapporto di due infinitesimi.

Verifichiamo che si puó adoperare la regola di L'Hospital;le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno destro del punto zero, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $-\frac{1}{x^2}$, risulta sempre diversa da zero. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\frac{x-2}{x+2})}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+2}{x-2}\frac{x+2-x+2}{(x+2)^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}-4\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}=-4.\end{aligned}$$

7) Calcolare il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}-\cot^2 x.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata $\infty-\infty$.

Si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}-\cot^2 x = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cot^2 x}-x^2}{\frac{x^2}{\cot^2 x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-x^2\cot^2 x}{\cot^2 x}}{\frac{x^2}{\cot^2 x}}=\lim_{x\to0}\frac{1-x^2\cot^2 x}{x^2}$$

e quindi si è ricondotti allo studio del limite del rapporto di due infinitesimi.

Verifichiamo che si può adoperare la regola di L'Hospital;le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno del punto zero, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $2x$, risulta diversa da zero in un intorno di zero escluso il punto stesso. Allora adoperando la regola di

L'Hospital si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2\cot^2 x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-2x\cot^2 x + x^2\frac{2\cot x}{\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x\to 0} -\cot^2 x + x\frac{\cos x}{\sin^3 x} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + x\frac{\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x\cos^2 x + x\cos x}{\sin^3 x} \\
&= \lim_{x\to 0}\cos x\frac{-\sin x\cos x + x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x\cos x + x}{\sin^3 x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x + \sin^2 x + 1}{3\sin^2 x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1+\sin^2 x + \sin^2 x + 1}{3\sin^3 x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3\sin^2 x\cos x} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

8) Calcolare il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\sin x}.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata 0^0.

Si osservi che poiché possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x\log\tan x}$$

basta studiare il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\log\tan x$$

che risulta una forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \log \tan x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \tan x}{\frac{1}{\sin x}}$$

che é un rapporto di due infiniti. Verifichiamo che si può adoperare la regola di L'Hospital;le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno destro del punto zero, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $-\sin^{-2} x \cos x$, risulta diversa da zero in un opportuno intorno destro di zero. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \tan x}{\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\sin^{-2} \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x \cos x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^2 x}{\sin x \cos^2 x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0. \end{aligned}$$

In definitiva allora il limite risulta uguale a $e^0 = 1$.

9) Calcolare il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x\to 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi}{2} x}.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata 1^∞.

Si osservi che poiché possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x\to 1} e^{\tan \frac{\pi}{2} x \log(2-x)}$$

basta studiare il limite

$$\lim_{x\to 1} \tan \frac{\pi}{2} x \log(2-x)$$

che risulta una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$. Si ha

$$\lim_{x\to 1} \tan \frac{\pi}{2} x \log(2-x) = \lim_{x\to 1} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\log^{-1}(2-x)}$$

che è un rapporto di due infiniti. Verifichiamo che si può adoperare la regola di L'Hospital;le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno del punto 1, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $\frac{log^{-2}(2-x)}{(2-x)}$, risulta sempre diversa da zero. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\log^{-1}(2-x)} &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2} x} \frac{\pi}{2}}{\frac{\log^{-2}(2-x)}{(2-x)}} = \lim_{x\to 1} \frac{\pi}{2} \frac{(2-x)\log^2(2-x)}{\cos^2 \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x\to 1} \frac{\pi}{2} \frac{\log^2(2-x)}{\cos^2 \frac{\pi}{2} x} \\
&= \frac{\pi}{2} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{2\log(2-x)}{2-x}}{-2\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x\to 1} \frac{\log(2-x)}{(2-x)\cos \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} x} \lim_{x\to 1} 2 \frac{\log(2-x)}{\sin \pi x} \\
&= 2 \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-1}{2-x}}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Avendo applicato per tre volte la regola di L'Hospital. Il risultato del limite risulta allora $e^{\frac{2}{\pi}}$.

10) Calcolare il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\tan x}.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata ∞^0.

Si osservi che poiché possiamo scrivere

$$\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0} e^{\tan x \log(\cot x)}$$

basta studiare il limite

$$\lim_{x\to 0} \tan x \log(\cot x)$$

che risulta una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \tan x \log(\cot x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log \cot x}{\tan^{-1} x}$$

che risulta rapporto di due infiniti. Verifichiamo che si puó adoperare la regola di L'Hospital;le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno opportuno del punto 0, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $-\tan^{-2} x \frac{1}{\cos^2 x}$, risulta sempre diversa da zero. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log\cot x}{\tan^{-1}x} \quad &= \quad \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cot x}\frac{1}{\sin^2 x}}{-\tan^{-2}x\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x\cos^2 x}{\cot x\sin^2 x} \\ = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cot x} = 0\end{aligned}$$

e quindi il limite vale $e^0 = 1$.