Utilizziamo la definizione di limite per provare che

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2+1} + x = 1.$$

Applicando la definizione bisogna provare che:

$\forall \varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in I\!R$ con $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ risulta

$$1 - \varepsilon \leq \sqrt{x^2+1} + x \leq 1 + \varepsilon.$$

Senza perdita di generalità, visto che $x \to 0$, possiamo considerare solo $x \in]-1/2, 1/2[$, ed $\varepsilon < 1/2$. In tal modo le quantità $1 + \varepsilon - x, 1 - \varepsilon - x$ risulteranno entrambe positive. Grazie a questo fatto il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} \leq 1 + \varepsilon - x \\ \sqrt{x^2+1} \geq 1 - \varepsilon - x \end{cases}$$

è equivalente a:

$$\begin{cases} x^2 + 1 \leq 1 + x^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon - 2x - 2\varepsilon x \\ x^2 + 1 \geq 1 + x^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon - 2x + 2\varepsilon x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1+\varepsilon) \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon \\ 2x(1-\varepsilon) \geq \varepsilon^2 - 2\varepsilon \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leq \dfrac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \\ x \geq \dfrac{\varepsilon^2 - 2\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \end{cases}$$

Osserviamo che $\dfrac{\varepsilon^2 - 2\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} < 0 < \dfrac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$. Basta allora scegliere

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}, \frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{2(1-\varepsilon)}\}.$$