1. *Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione:* $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$, *dopo averne determinato il campo di sviluppabilità.*

Svolgimento

Si può scrivere f come $\dfrac{x-1}{x^2-5x+6} = \dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$, dove A e B sono tali che $x-1 = A(x-3)+B(x-2) = Ax - 3A + Bx - 2B = (A+B)x + (-3A-2B)$, ovvero

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -3A - 2B = -1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1 - B \\ -3(1-B) - 2B = -3 + B = -1. \end{cases}$$

Deve essere pertanto $B = 2$ e $A = 1 - 2 = -1$ e così$f(x) = \dfrac{-1}{x-2} + \dfrac{2}{x-3}$. Per $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, ovvero per $|x| < 2$, vale

$$\frac{-1}{x-2} = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n},$$

e per $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$, ovvero per $|x| < 3$

$$\frac{2}{x-3} = -\frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n},$$

.

Quindi per ogni $|x| < 2$ si può scrivere

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}} \right) x^n.$$