Si tratta di risolvere il seguente problema di massimo e di minimo

$$\begin{cases} x \geq 0, \; y \geq 0 \\ x + y = 8 \\ \min x^2 + y^3, \; \max x^2 + y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0, \; y \geq 0 \\ x = 8 - y \\ \min (8-y)^2 + y^3, \; \max (8-y)^2 + y^3. \end{cases}$$

Studiamo allora i massimi e minimi assoluti della funzione $g(y) = (8-y)^2 + y^3$, con il vincolo che $0 \leq y \leq 8$.

$$g'(y) = -2(8-y) + 3y^2 \geq 0 \iff x \leq -\frac{8}{3} \quad \cup \quad x \geq 2.$$

Dunque la funzione g è crescente per $2 < x \leq 8$, decrescente per $0 \leq x < 2$, ne risulta che il minimo assoluto è raggiunto per $y = 2$ (in tal caso $g(2) = 44$), mentre il massimo assoluto è il $\max\{g(0), g(8)\} = 512$.