Studiare il grafico della funzione $g(x) = x^3 - 5x^2 - x + 17$, determinandone in particolare crescenza, decrescenza, massimi e minimi.

Utilizzando l'esercizio precedente studiare il grafico della funzione

$$f(x) = e^x \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}.$$

La funzione g è una cubica definita su tutto $\mathbb{R}$.

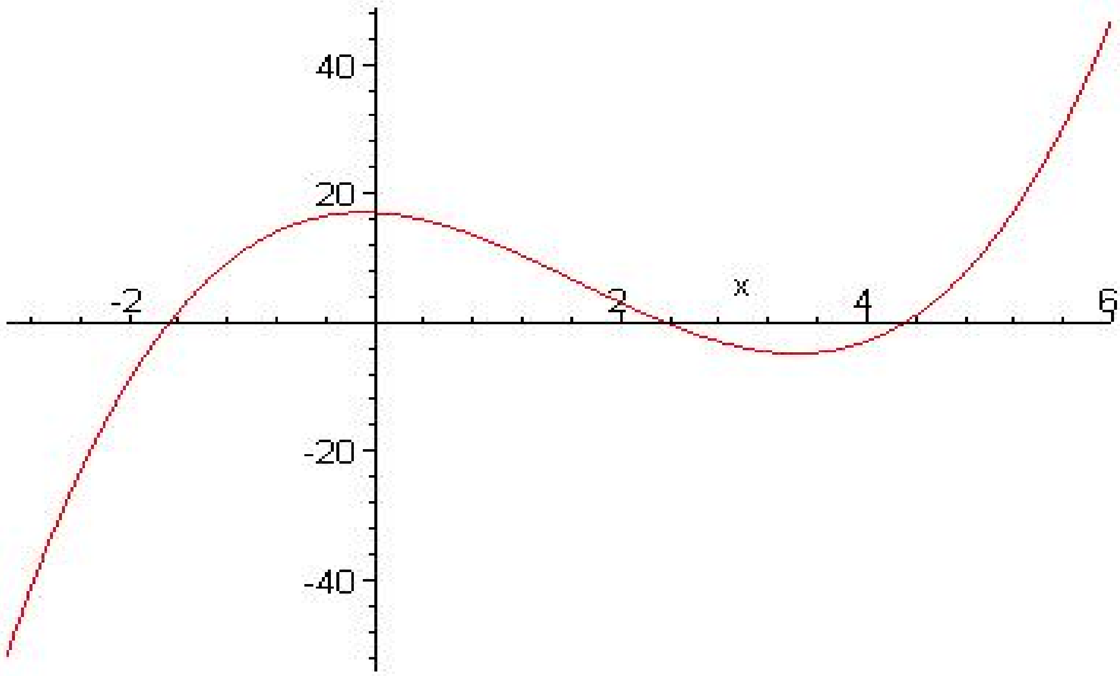
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty.$$

La derivata prima di g è data da:

$$g'(x) = 3x^2 - 10x - 1$$

e dunque la funzione g è crescente quando $x < (5 - \sqrt{28})/3$ oppure $x > (5 + \sqrt{28})/3$, mentre è decrescente quando $(5 - \sqrt{28})/3 < x < (5 + \sqrt{28})/3$. Il punto $x_1 = (5 - \sqrt{28})/3$ è un punto di massimo relativo, mentre il punto $x_2 = (5 + \sqrt{28})/3$ è un punto di minimo relativo. Nel punto di massimo relativo la funzione assume valore positivo, mentre in quello di minimo assume valore negativo. Applicando allora il teorema degli zeri si ottiene che la funzione ha tre radici reali, una prima di x_1, una tra x_1 e x_2 e l'ultima dopo x_2. Anche se non possiamo trovare i valori esatti degli zeri possiamo sempre approssimarli utilizzando il metodo delle tangenti o delle secanti.

Accontentiamoci di trovare un intervallo di ampiezza 1 in cui cade la radice. Poiché $g(-1) \cdot g(-2) < 0$ allora la prima radice $a_1 \in]-2, -1[$, analogamente $g(2) \cdot g(3) < 0$, $a_2 \in]2, 3[$ e $g(4) \cdot g(5) < 0$ e quindi $a_3 \in]4, 5[$. Il grafico della funzione g è dunque dato da:



La funzione f è definita in tutti i punti dell'asse reale tranne che nei punti 2,3. Studiamo innanzitutto il segno della funzione f. Il valore della funzione f in 0 è $f(0) = 1/6$. Poiché e^x è sempre di segno positivo il segno di f è determinato dal segno di $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$. Il numeratore è positivo per $x > -1$, il denominatore è positivo per $x < 2$ oppure per $x > 3$. Dunque, per la regola dei segni

$f(x) > 0 \quad \text{per } -1 < x < 2 \text{ oppure } x > 3$

$f(x) < 0 \quad \text{per } x < -1 \text{ oppure } 2 < x < 3$

$f(x) = 0 \quad \text{per } x = -1.$

Lo studio del segno di f ci aiuta anche nello studio degli asintoti:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$$

Dunque ci sono un asintoto orizzontale $y = 0$ quando $x \to -\infty$, e due asintoti verticali $x = 2, x = 3$. Non ci possono essere asintoti obliqui perché, per $x \to \infty$ la funzione e^x è un infinito di ordine superiore rispetto a qualunque potenza di x. Studiamo ora la derivata prima di f. Risulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \frac{x+1}{x^2-5x+6} + e^x \frac{1}{x^2-5x+6} - e^x \frac{(x+1)(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2} \\ &= e^x \frac{1}{(x^2-5x+6)^2}(x^3-5x^2-x+17) = e^x \frac{1}{(x^2-5x+6)^2} g(x) \end{aligned}$$

A questo punto il segno di f' è individuato (nei punti diversi da 2, 3) dal segno di g e dunque

f decresce per $\qquad x < a_1$ oppure $a_2 < x < 3$ oppure $3 < x < a_3$

f cresce per $\qquad a_1 < x < 2$ oppure $2 < x < a_2$ oppure $x > a_3$

f ha minimi relativi in $\qquad x = a_1, x = a_3$

f ha un massimo relativo in $\qquad x = a_2.$

Il grafico della funzione f è il seguente: