Studiamo il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = nx^n$, consideriamo allora $|a_n| = n|x|^n$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x|^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \frac{1}{|x|^n} = |x|$$

Dunque,

- se $|x| < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x > 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;
- se $x = 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} n$ che diverge a $+\infty$;
- se $x = -1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$ è una serie a segni alterni. Posto $b_n = n$, si osserva che la successione $(b_n)_n$ è crescente e dunque la serie data è indeterminata;
- se $x < -1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n|x|^n$. Denotiamo con $b_n = n|x|^n$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ è una serie a segni alterni. Proviamo che

$b_n \leq b_{n+1}$ da un certo n in poi.

$$b_n = n|x|^n \leq (n+1)|x|^{n+1} = b_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{n}{n+1} \leq |x|$$

Questa disequazione è verificata per ogni $n \in I\!N$ infatti

$$\frac{n}{n+1} \leq 1 < |x|$$

e dunque la serie data è indeterminata.