Utilizzando la definizione di limite provare che

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{2x^2+x+1} - x - 1 = 0.$$

Applicando la definizione di limite bisogna provare che:

$\forall\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ con $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ risulta

$$x + 1 - \varepsilon \le \sqrt{2x^2+x+1} \le 1 + x + \varepsilon.$$

Senza perdita di generalità supponiamo che $\varepsilon < 1/4$, $|x| < 1/2$, in tal modo $x + 1 \pm \varepsilon > 0$. Con queste restrizioni il sistema

$$x + 1 - \varepsilon \le \sqrt{2x^2+x+1} \le 1 + x + \varepsilon$$

è equivalente a:

$$\begin{cases} 1 + x^2 + \varepsilon^2 + 2x - 2\varepsilon - 2\varepsilon x \le 2x^2 + x + 1 \\ 2x^2 + x + 1 \le 1 + x^2 + \varepsilon^2 + 2x + 2\varepsilon + 2\varepsilon x \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x^2 - x(1-2\varepsilon) + 2\varepsilon - \varepsilon^2 \ge 0 \\ x^2 - x(1+2\varepsilon) - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) \le 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \text{sempre vera perché } \Delta = 8\varepsilon^2 - 12\varepsilon + 1 < 0 \quad \text{se } \varepsilon < 1/4 \\ x_1 = \frac{1}{2}(1 + 2\varepsilon - \sqrt{8\varepsilon^2 + 12\varepsilon + 1}) \le x \le \frac{1}{2}(1 + 2\varepsilon + \sqrt{8\varepsilon^2 + 12\varepsilon + 1}) = x_2 \end{cases}$$

Si prova facilmente che $x_1 < 0 < x_2$ e dunque basta scegliere

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\frac{1}{2}, |x_1|, x_2\}.$$