Studiamo il comportamento della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)} x^n$$

al variare di $x \in I\!R$.

Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \frac{1}{n\log(n)} x^n$, consideriamo allora $|a_n| = \frac{1}{n\log(n)}|x|^n$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}|x|^{n+1} \cdot n\log(n)\frac{1}{|x|^n} = |x|$$

Dunque,

- se $|x| < 1$ allora $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x > 1$, allora $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;
- se $x = 1$ allora $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$. Visto che $(\frac{1}{n\log(n)})_n$ è una successione non negativa, infinitesima e decrescente a zero applichiamo il criterio di Cauchy e studiamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k\log(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\log(2)}$. Tale serie risulta divergente e dunque diverge anche la serie data;
- se $x = -1$ la serie data converge semplicemente per il criterio di Leibnitz poiché $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\log(n)}$ e la successione non negativa $(\frac{1}{n\log(n)})_n$ è infinitesima e decrescente a zero;

- se $x < -1$, allora $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\log(n)}|x|^n$. Proviamo che $b_n = \frac{1}{n\log(n)}|x|^n$ è crescente da un certo $m \in I\!N$ in poi.

  $$b_n = \frac{1}{n\log(n)}|x|^n \leq \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}|x|^{n+1} = b_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log(n)} \leq |x|$$

  Sappiamo che

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log(n)} = 1$$

  e dunque, per la definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $1+\varepsilon < |x|$, esiste $m \in I\!N$ tale che

  $$1-\varepsilon \leq \frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log(n)} \leq 1+\varepsilon < |x|$$

  e dunque la serie data è indeterminata.