Studiare il comportamento della funzione $f(x) = x/(x+1) + \lg(x)$ e tracciarne il grafico.

La funzione f è definita nell'insieme $]0, \infty[$ perché in tale insieme risulta definito il logaritmo e il denominatore del primo addendo non si annulla. Risulta

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

C'è dunque un asintoto verticale per $x = 0$ e non ci sono asintoti orizzontali.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

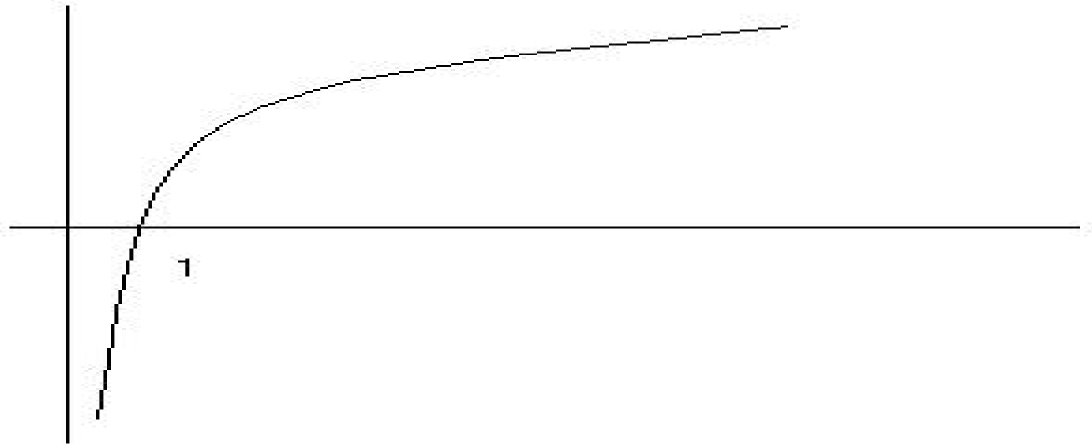
e dunque non ci possono essere neanche asintoti obliqui (se ci fossero il coefficiente angolare sarebbe nullo ed otterremo un asintoto orizzontale). Calcoliamo ora la derivata prima della funzione

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x}$$

e dunque la funzione f è sempre crescente nel suo dominio (gli addendi sono entrambi positivi). Per quanto riguarda la derivata seconda

$$f''(x) \;=\; -\left(\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{x^2}\right)$$

essa assume sempre segno negativo e dunque la funzione f è concava. Il grafico della funzione f è dato da:


1