Si studi, nel suo campo di esistenza la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^4 + x} - x^2$$

con particolare attenzione agli asintoti, agli eventuali punti di massimo o di minimo, e ai punti di non derivabilità. Facendo riferimento alla funzione f dell'esercizio precedente si determinino i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\alpha}$$

risulta convergente.

Il campo di esistenza A della funzione f è l'insieme dei punti per i quali ha significato $\sqrt{x^4 + x}$. Pertanto

$$A = \{x : x^4 + x \geq 0\} = \{x : x(x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[.$$

Inoltre $f(0) = 0, f(-1) = -1$. Se $x > 0$ allora

$$x^4 + x > x^4 \implies \sqrt{x^4 + x} > x^2 \implies f(x) > 0 \tag{1}$$

mentre se $x < -1$ risulta:

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ f(x) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \\ \sqrt{x^4 + x} \leq x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \\ x^4 + x \leq x^4 \end{cases} \iff x \leq -1.$$

Cerchiamo ora gli eventuali asintoti della funzione f. Non ci possono essere asintoti verticali in quanto la funzione è definita con continuità in 0 e in -1.

Cerchiamo gli eventuali asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \;=\; \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^4+x}-x^2\right)\frac{\sqrt{x^4+x}+x^2}{\sqrt{x^4+x}+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^4+x}+x^2} = 0.$$

Pertanto la funzione ha asintoti orizzontali per x che tende a $\pm\infty$. Da questo risultato possiamo dedurre inoltre che:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$$

e che $f(n)$ è un infinitesimo per $n\to\infty$ di ordine 1, infatti:

$$f(n) = \frac{n}{\sqrt{n^4+n}+n^2} = \frac{n}{n^2(1+\sqrt{1+1/n^3})} \sim \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Studiamo ora la derivabilità della funzione f in $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ (abbiamo eliminato gli estremi 0,-1 perchè in essi la radice si annulla ed in tali punti il primo addendo della funzione non è derivabile). Nei punti di derivabilità, applicando la regola di derivazione delle funzioni composte si ottiene:

$$f'(x) = \frac{4x^3+1}{2\sqrt{x^4+x}} - 2x.$$

Studiamo il segno della derivata prima. La derivata prima è non negativa se e solo se

$$4x^3+1 \geq 4x\sqrt{x^4+x}.$$

Dobbiamo allora risolvere questa disequazione in $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

Cominciamo con la semiretta positiva:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4x^3+1 \geq 4x\sqrt{x^4+x} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x^4+x} \leq x^2 + \dfrac{1}{4x} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x^4 + x \leq x^4 + \dfrac{1}{16x^2} + \dfrac{x}{2} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{1}{16x^2} - \dfrac{x}{2} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ 1 - 8x^3 \geq 0 \end{cases} \iff 0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

Esaminiamo ora il segno della derivata in $]-\infty,-1[$:

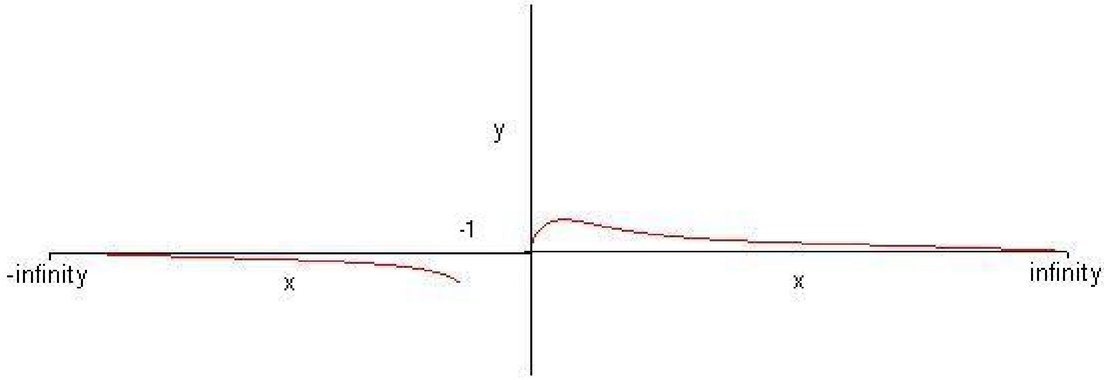
$$\begin{cases} x < -1 \\ 4x^3+1 \geq 4x\sqrt{x^4+x} \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1 \\ \sqrt{x^4+x} \geq x^2 + \dfrac{1}{4x} \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1 \\ 1 - 8x^3 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

La funzione f è dunque decrescente per $x \leq 1$, nel punto -1 ha un minimo relativo, è poi crescente per $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$; in $x = \dfrac{1}{2}$ ha un massimo relativo e poi la funzione decresce di nuovo. Osserviamo poi che i punti di minimo e di massimo relativo sono anche di massimo e di minimo assoluti. Per l'eventuale (e non richiesto nel compito) studio della concavità e della convessità della funzione dobbiamo calcolare la derivata seconda di f:

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{(4x^3+1)^2}{(x^4+x)^{3/2}} + 6\frac{x^2}{\sqrt{x^4+x}} - 2.$$

La derivata seconda è sempre negativa per $x < -1$ (dunque la funzione è concava in questa semiretta, mentre cambia di segno nella semiretta $]0,\infty[$.

Il grafico qualitativo della funzione f è il seguente:



La serie data è a termini non negativi. Infatti, da (1), $f(n) \geq 0$. La serie dunque non può essere indeterminata.

Abbiamo inoltre provato in (2) che $f(n)$ è un infinitesimo di ordine 1 quando $n \to \infty$, dunque

$$\frac{f(n)}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

e dunque la serie data converge per $\alpha + 1 > 1$, cioè per $\alpha > 0$.