Utilizziamo la definizione di limite per provare che

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + x + 1} + 2x = 1.$$

Applicando la definizione bisogna provare che:

$\forall \varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ con $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ risulta

$$1 - \varepsilon \leq \sqrt{x^2 + x + 1} + 2x \leq 1 + \varepsilon.$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre che $\varepsilon < 1/4, |x| < 1/4$, in tal modo le quantità $1 - 2x \pm \varepsilon$ risulteranno positive. La catena di disuguaglianze $1 - \varepsilon \leq \sqrt{x^2 + x + 1} + 2x \leq 1 + \varepsilon$ sarà allora equivalente a:

$$(1 - \varepsilon - 2x)^2 \leq x^2 + x + 1 \leq (1 + \varepsilon - 2x)^2.$$

Risolviamo allora il sistema

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 4x^2 + 1 + \varepsilon^2 - 4x - 2\varepsilon + 4\varepsilon x \\ x^2 + x + 1 \leq 4x^2 + 1 + \varepsilon^2 - 4x + 2\varepsilon - 4\varepsilon x \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 - x(5 - 4\varepsilon) - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \leq 0 \\ 3x^2 - x(5 + 4\varepsilon) + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 \leq x \leq x_2 \\ x \leq x_3 \ \text{ oppure } x \geq x_4 \end{cases}$$

Avendo posto

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6}(5-4\varepsilon-\sqrt{25+4\varepsilon^2-16\varepsilon}) \\ x_2 &= \frac{1}{6}(5-4\varepsilon+\sqrt{25+4\varepsilon^2-16\varepsilon}) \\ x_3 &= \frac{1}{6}(5+4\varepsilon-\sqrt{25+4\varepsilon^2+16\varepsilon}) \\ x_4 &= \frac{1}{6}(5+4\varepsilon+\sqrt{25+4\varepsilon^2+16\varepsilon}) \end{aligned}$$

Osserviamo che, per la scelta fatta su ε, tutti i radicandi sono positivi; inoltre risulta $x_1 < 0, x_2, x_3, x_4 > 0$. Dunque basta scegliere

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\frac{1}{4}, x_2, x_3, |x_1|\}.$$