

Utilizziamo la definizione di limite per provare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1.$$

Osserviamo innanzitutto che il limite da verificare è falso. Se infatti consideriamo  $x > 0$  e prendiamo  $M > 1$  risulta

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \geq \frac{1}{x} \geq M \quad \forall x < \frac{1}{M}$$

e dunque non può essere vero che per gli  $x$  positivi e vicini a zero risulti

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \leq \varepsilon,$$

con  $\varepsilon$  arbitrariamente piccolo (ad esempio più piccolo di 1).