Proviamo che per ogni $n \in I\!N$ vale

$$(2n)! \geq 2^n (n!)^2.$$

Dimostriamo questa disuguaglianza utilizzando il principio di induzione. Dobbiamo pertanto provare la disuguaglianza per il primo n, supporla poi vera in un generico intero n e dimostrarla per l'intero successivo $(n+1)$.

Per $n = 0$ risulta $0! = 1 \geq (1!)^2 = 1$.

Supponiamo allora che la disuguaglianza sia vera in un generico intero n e proviamo la disuguaglianza per $n+1$.

$$\begin{aligned}(2(n+1))! &= (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)! \geq (2n+2)(2n+1)2^n(n!)^2 \geq \\ &\geq (2n+2)(n+1)2^n(n!)^2 = 2(n+1)^2 2^n (n!)^2 = 2^{n+1}[(n+1)!]^2\end{aligned}$$

Allora, per il principio di induzione la disuguaglianza è vera per ogni $n \in I\!N$.