Il concetto di derivata e le regole di derivazione

Il concetto fondamentale del calcolo differenziale è quello di derivata formulato alla fine del XVII secolo da Pierre de Fermat che se ne servì per determinare i punti di massimo e di minimo di alcune funzioni. Come per altri concetti, anche questo è stato originato da un problema geometrico: quello di trovare la tangente ad una curva in un dato punto.

È noto che per una conica la tangente in un dato punto è quella retta che incontra la conica stessa soltanto in quel punto. Se vogliamo ora estendere il concetto di tangente a una curva qualsiasi questa definizione non è più utilizzabile (pensiamo ad esempio alla tangente della curva $y = \sin x$ nel punto $\pi/2$).

Per introdurre il concetto di derivata iniziamo con un esempio tratto dal mondo dello sport, più in particolare dal ciclismo. L'esempio si riferisce alla settima tappa Capannori-Orvieto (km. 224) dell'ottantacinquesimo giro d'Italia. [1]

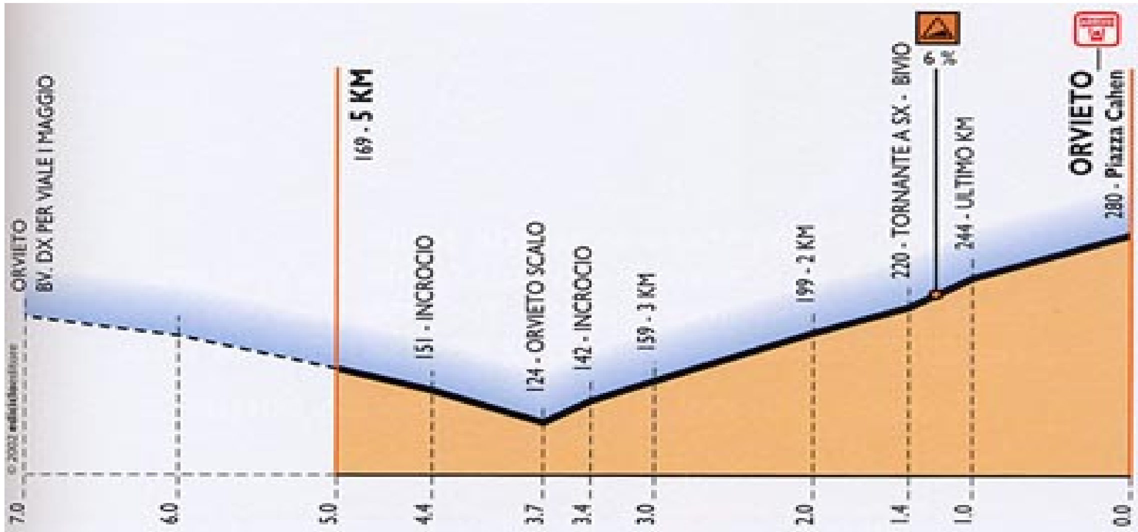
IL PERCORSO

È la tappa più lunga del Giro. L'unico G.P.M. a Radicofani (2a cat. - mt. 716) con andamento dell'intero percorso piuttosto mosso. Intergiro a Buonconvento, km. 127. Il tratto terminale, da Orvieto Scalo al piazzale della funicolare ove è posto l'arrivo, è in salita con pendenza media del 4%. Strade in buono stato.

[1] Le immagini ed il testo che sono riportati provengono dal sito http://www.bikenews.it.

ULTIMI CINQUE CHILOMETRI:

A 7 Km. dall'arrivo ha inizio la salita che da Orvieto scalo porta alla città ove posto l'arrivo. Pendenza media 4,2%, con serie di curve e tornanti. Retta d'arrivo di mt. 200, larghezza mt. 6,5. Pavimentazione in asfalto.

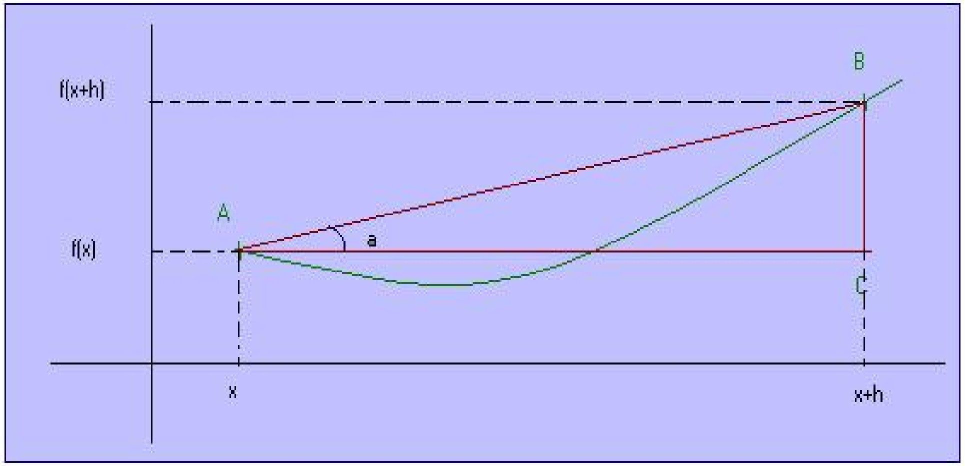


La pendenza media del tratto finale del percorso è del 4,2%. Ciò vuol dire che per ogni chilometro percorso ci innalziamo rispetto al livello del mare di circa 42 metri = 0,42 chilometri. Il numero 4,2 che compare all'interno della altimetria della tappa dunque indica pertanto il rapporto tra la variazione della quota e variazione del percorso (relativamente al tratto di 1 Km).

Esaminando l'altimetria osserviamo inoltre che la pendenza media degli ultimi 5 km non è un dato preciso poiché durante il percorso percorriamo un breve tratto in discesa (dunque a pendenza negativa) anche se la pendenza media è positiva.

Per ovviare a questo problema bisogna considerare tratti di percorso sempre più piccoli, bisogna cioè far tendere a zero la lunghezza del tratto percorso.

Immaginiamo allora di percorrere una strada rappresentata dal seguente grafico



variazione quota/ variazione percorso = BC/CA = [f(x+h) - f(x)] / h = tan a = coeff angolare retta AB

Se facciamo tendere h a 0 ci accorgiamo che, mentre il punto A rimane fisso, il punto $B = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ si muove e, con esso la retta AB. Se esiste il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale la retta AB e il suo coefficiente angolare tendono ad una retta e ad una pendenza limite.

Introduciamo allora la seguente definizione:

Definizione Fissata una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, e fissato un punto $x_0 \in [a, b]$, diremo che f è derivabile in x_0 se

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.}$$

Tale limite, se esiste, è detto la derivata di f in x_0 che si indica con il simbolo $f'(x_0)$ (usato per la prima volta da Lagrange), oppure con $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ introdotto invece da Leibnitz.

Il concetto di derivata si applica anche agli estremi, a e b: per questi punti, però, il limite del rapporto incrementale si può fare solo da destra in a o da sinistra in b. Per i punti interni si può parlare anche di derivata destra o di derivata sinistra in x_0, a seconda che esista (finito) il limite del rapporto incrementale da destra, o da sinistra, e si usano le notazioni seguenti:

$$\boxed{\begin{aligned} f'_d(x) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \\ f'_s(x) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \end{aligned}}$$

Oss. Se x_0 è un punto interno ad $[a, b]$, la derivata $f'(x_0)$ esiste se e solo se esistono e coincidono la derivata destra e la derivata sinistra in x_0.

$\boxed{\text{Teorema}}$ *Supponiamo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ sia derivabile in un certo punto $x_0 \in I$. Allora, esiste una funzione infinitesima $\sigma(h)$ (infinitesima per $h \to 0$), tale che*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\sigma(h)$$

Chiameremo allora retta tangente al grafico della funzione f in A la retta limite $f(x_0) + hf'(x_0)$ e pendenza della retta limite nel punto x_0 il valore $f'(x_0)$ cioè la derivata prima della funzione nel punto.

La retta tangente è dunque, se esiste, la posizione limite della retta AB, al tendere di B ad A.

Questo discorso porta a dire che, in vicinanza di un punto x_0, nel quale la f sia derivabile, la f stessa si confonde con la retta tangente, o equivalentemente che l'errore che si commette considerando la tangente al posto della curva è un infinitesimo per $h \to 0$.

Nota Nel 1909 Landau introdusse il simbolo o ("o piccolo") per trattare gli infinitesimi. Supponiamo che g sia definita in un intorno di un punto a e che in ogni punto di questo intorno, ad eccezione di a sia non nulla. Il simbolo $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$ significa che $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ e si legge "$f(x)$ è un o piccolo di $g(x)$".

In particolare

- $f(x) = o(1)$ per $x \to a$ significa che $f(x) \to 0$ per $x \to a$;
- $f(x) = o(x)$ per $x \to a$ significa che $f(x)/x \to 0$ per $x \to a$;

- $o(f(x)) \pm o(f(x)) = o(f(x))$;

- $o(cf(x)) = o(f(x))$ per $c \neq 0$;

- $g(x)o(f(x)) = o(f(x)g(x))$;

- $o(o(f(x))) = o(f(x))$.

Altri significati della derivata

Oltre al significato geometrico, come evidenziato nel libro di testo, la derivata ha anche un significato fisico come velocità di un moto rettilineo. Immaginiamo di seguire il moto di un punto materiale P che percorre una retta. Col passare del tempo la posizione del punto sarà individuata da una legge (equazione oraria del moto) $x(t)$. Se la velocità $v(t)$ dipendente da t allora la velocità sarà la derivata dell'equazione oraria poiché per definizione la velocità istantanea è il limite (se esiste) per $\Delta t \to 0$ della velocità media $[x(t + \Delta t) - x(t))]/\Delta t$. La derivata inoltre può essere vista accelerazione in un moto rettilineo, o intensità di corrente elettrica o densità o ancora calore specifico. Interviene cioè in tutti i processi in cui si deve stimare una tasso di crescita o diminuzione o trasformazione di una grandezza fisica, chimica.

Tabella delle derivate delle funzioni elementari

f	f'	f	f'
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \text{cotan} x, x \neq k\pi$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = \log x, x > 0$	$f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$
$f(x) = a^x, a > 0$	$f'(x) = a^x \log a$	$f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1,$ $x > 0$	$f'(x) = \frac{1}{x \log a}$

f	f'	f	f'
$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \cosh x$	$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \arcsin x, -1 \leq x \leq 1$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$f(x) = \arccos x, -1 \leq x \leq 1$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
	$-1 < x < 1$		$-1 < x < 1$
$f(x) = \arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \mathrm{arccotan} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \mathrm{arcsinh}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$f(x) = \mathrm{arccosh}(x) =$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$= \log(x + \sqrt{x^2+1})$		$= \log(x + \sqrt{x^2-1}), -1 < x < 1$	
$f(x) = \tanh x$	$f'(x) = 1 - \tanh^2 x$	$f(x) = \mathrm{arctanh}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
		$= \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x}), -1 < x < 1$	

Regole di Calcolo

Vedremo ora alcune semplici regole di calcolo, che permetteranno di trovare la derivata praticamente di tutte le funzioni che ci possono interessare.

1 Intanto, osserviamo subito che la derivazione è un'operazione lineare: cioè, se due funzioni f e g sono derivabili in un punto x, allora anche $f+g$ è derivabile in x, e risulta

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x);$$

inoltre, se f è derivabile in x e k è una costante reale, allora kf è derivabile in x, e risulta

$$(kf)'(x) = kf'(x).$$

2 Dunque, se f è una funzione derivabile in un certo punto x, e c è una costante reale, $f+c$ è derivabile in x, e ha la stessa derivata di f (infatti, le costanti hanno derivata nulla).

3 se f e g sono entrambe derivabili in x allora fg è derivabile e

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

4 Sia f una funzione derivabile in un punto x_0 con $f(x_0) \neq 0$, allora la funzione $1/f(x)$ è derivabile in x_0 e

$$(\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

5 Se f e g sono entrambe derivabili in un punto x_0, e $g(x_0) \neq 0$, il rapporto f/g è derivabile in x_0 e si ha:

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

6 Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, derivabile in un certo punto x_0. Sia $g : I^* \subset f(I) \to \mathbb{R}$

una funzione, derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$. Allora, la funzione composta $g \circ f$ risulta derivabile in x_0 e si ha:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Tale formula è nota anche con il nome di regola della catena.

7 Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ‘e continua e strettamente monotona ed 6e derivabile in un punto x_0 con $f'(x_0) \neq 0$ allora la sua funzione inversa f^{-1} risulta derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Per quanto riguarda il punto (7) osserviamo che la tesi non sussiste se si suppone che $f : I \longrightarrow J$ sia solo invertibile e che $f'(x_0) \neq 0$. L'intuizione geometrica potrebbe indurci a dire che visto che f è invertibile e che il grafico di $f' : J \longrightarrow I$ e quello di f sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante allora se esiste la tangente alla f nel punto x_0 e non è parallela all'asse delle x allora esiste anche la tangente ad f^{-1} nel punto $f(x_0)$. Esistono tuttavia esempi di funzioni $f : I \longrightarrow J$ con tali proprietà ma per le quali f^{-1} è discontinua in $f(x_0)$ e dunque non derivabile. Un esempio di questo tipo è dovuto a Maurizio Trombetta (Dip. Matematica - Università di Udine).