LE FUNZIONI

Funzioni pari e funzioni dispari

Sia **f**: **A** $\rightarrow$ **IR** una funzione, si dice che **f**

- è una **funzione pari** se

$$\mathbf{f(x) = f(-x) \quad \forall \; x \in A}$$

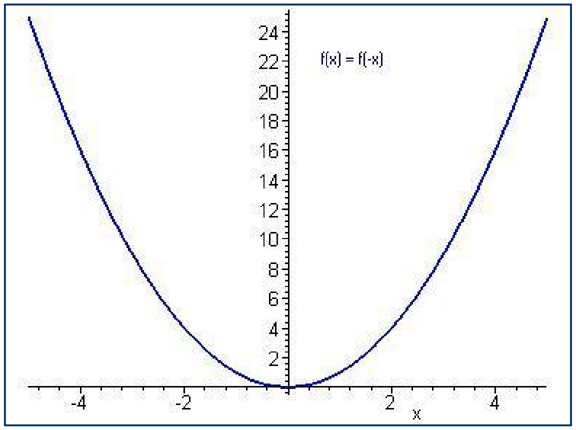


fig. 1

Come si vede dalla fig. 1, il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate che è, dunque, l'asse di simmetria.

- è una **funzione dispari** se:

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall\ x \in A$$

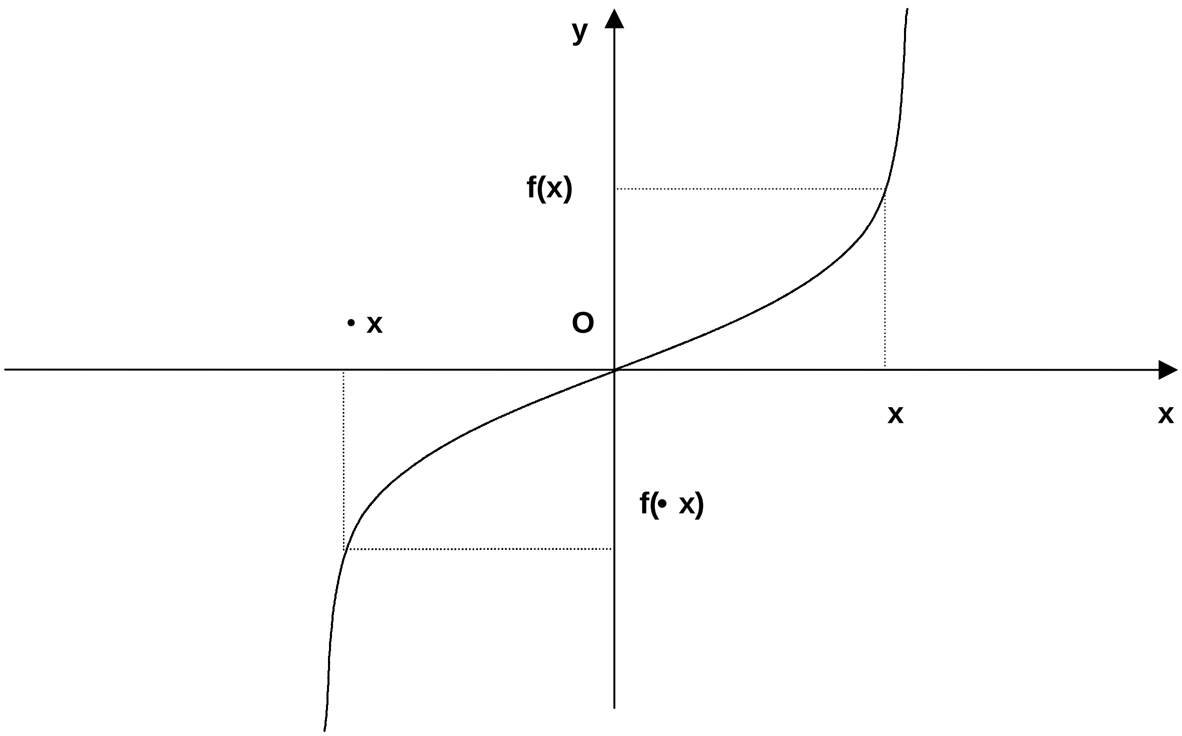


fig. 2

Come si vede dalla fig. 2, il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine degli assi che è, dunque, il centro di simmetria**.**

<u>FUNZIONI PERIODICHE</u>

Sia **f** una funzione reale di una variabile reale, definita in $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}$. Sia **T** un numero reale positivo. Si dice che **f è una funzione periodica di periodo T** se:

1. se **x** è un punto di **X**, allora all'insieme **X** appartengono tutti i punti del tipo **x + kT**, dove **k** è un numero intero relativo, cioè $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}$, cioè in simboli:

$$\mathbf{x \in X \Rightarrow (x + kT) \in X}$$

2. qualunque sia **x** appartenente ad **X**, si ha che il valore assunto da **f** in **x** è uguale al valore assunto da **f** in **(x+T)** e, quindi, anche al valore assunto da **f** in **(x+kT)**; in simboli:

$$\mathbf{f(x) = f(x+T) \quad \forall\ x \in X \qquad\qquad f(x) = f(x+kT) \quad \forall\ x \in X}$$

Notiamo che il grafico di **f** è composto da infinite parti e ciascuna di queste parti si ottiene dal grafico della restrizione di **f** all'insieme **X** $\cap$ **[0, T[**

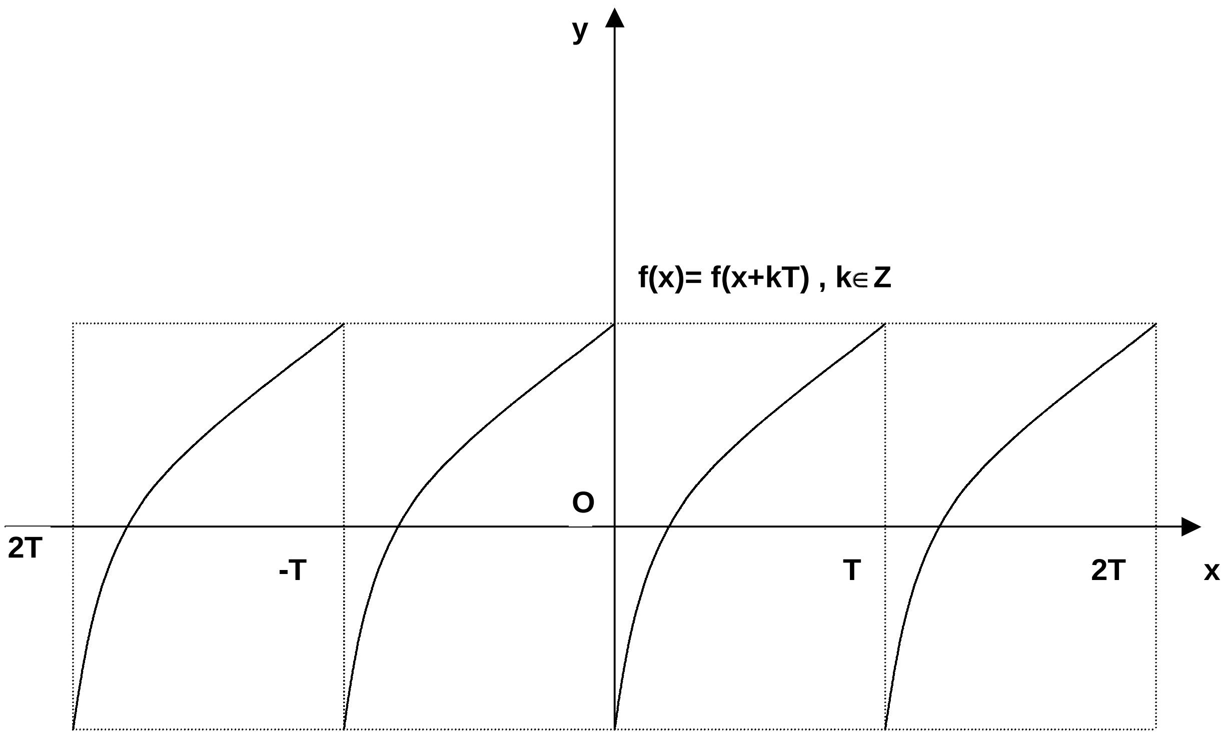


fig.3

FUNZIONI MONOTONE

Sia **f** una funzione reale di una variabile reale, definita in $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}$.

Si dice che **f** è una **funzione crescente nell'insieme X** se, scelti due qualsiasi punti $\mathbf{x_1}$ ed $\mathbf{x_2}$ dell'insieme **X**, risulta che, se $\mathbf{x_1}$ è minore di $\mathbf{x_2}$, allora il valore assunto da **f** in $\mathbf{x_1}$ è minore o uguale del valore assunto da **f** in $\mathbf{x_2}$; in simboli:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$$

Si dice che **f** è una **funzione strettamente crescente nell'insieme X** se, scelti due qualsiasi punti $\mathbf{x_1}$ ed $\mathbf{x_2}$ dell'insieme **X**, risulta che, se $\mathbf{x_1}$ è minore di $\mathbf{x_2}$, allora il valore assunto da **f** in $\mathbf{x_1}$ è minore del valore assunto da **f** in $\mathbf{x_2}$; in simboli:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

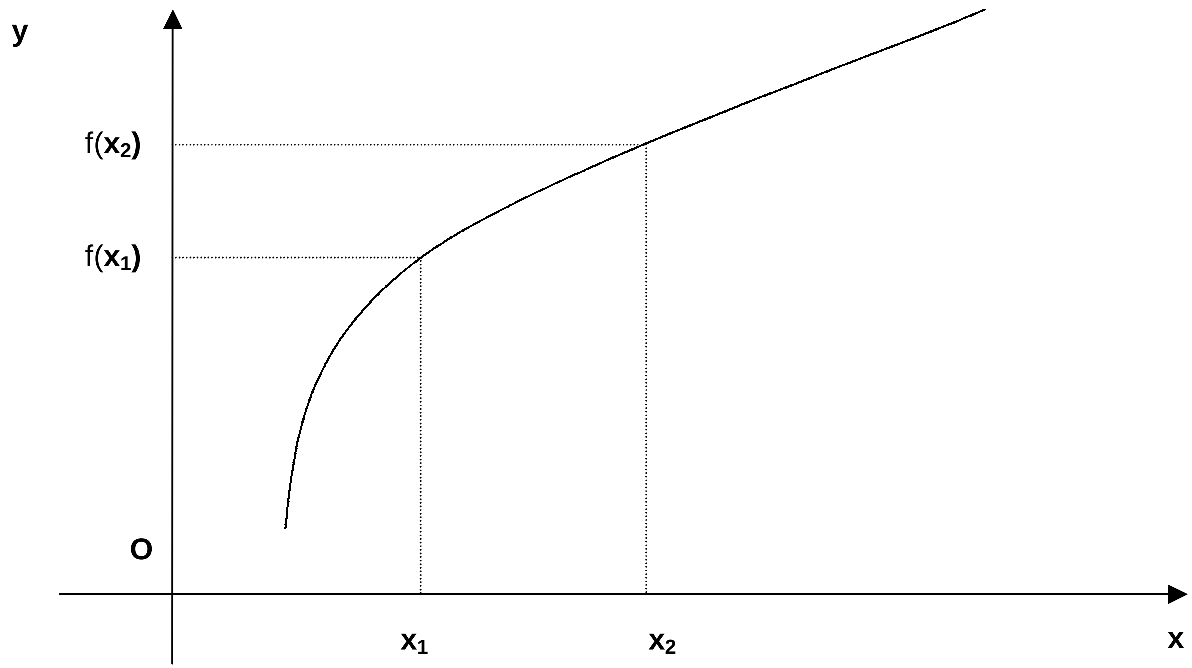


fig. 4

In **fig. 4** è mostrato il grafico di una generica **funzione strettamente crescente**.

Si dice che **f** è una **funzione decrescente nell'insieme X** se, scelti due qualsiasi punti $\mathbf{x_1}$ ed $\mathbf{x_2}$ dell'insieme **X**, risulta che, se $\mathbf{x_1}$ è minore di $\mathbf{x_2}$, allora il valore assunto da **f** in $\mathbf{x_1}$ è maggiore o uguale del valore assunto da **f** in $\mathbf{x_2}$; in simboli:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)}$$

Si dice che **f** è una **funzione strettamente decrescente nell'insieme X** se, scelti due qualsiasi punti $\mathbf{x_1}$ ed $\mathbf{x_2}$ dell'insieme **X**, risulta che, se $\mathbf{x_1}$ è minore di $\mathbf{x_2}$, allora il valore assunto da **f** in $\mathbf{x_1}$ è maggiore del valore assunto da **f** in $\mathbf{x_2}$; in simboli:

$$\mathbf{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

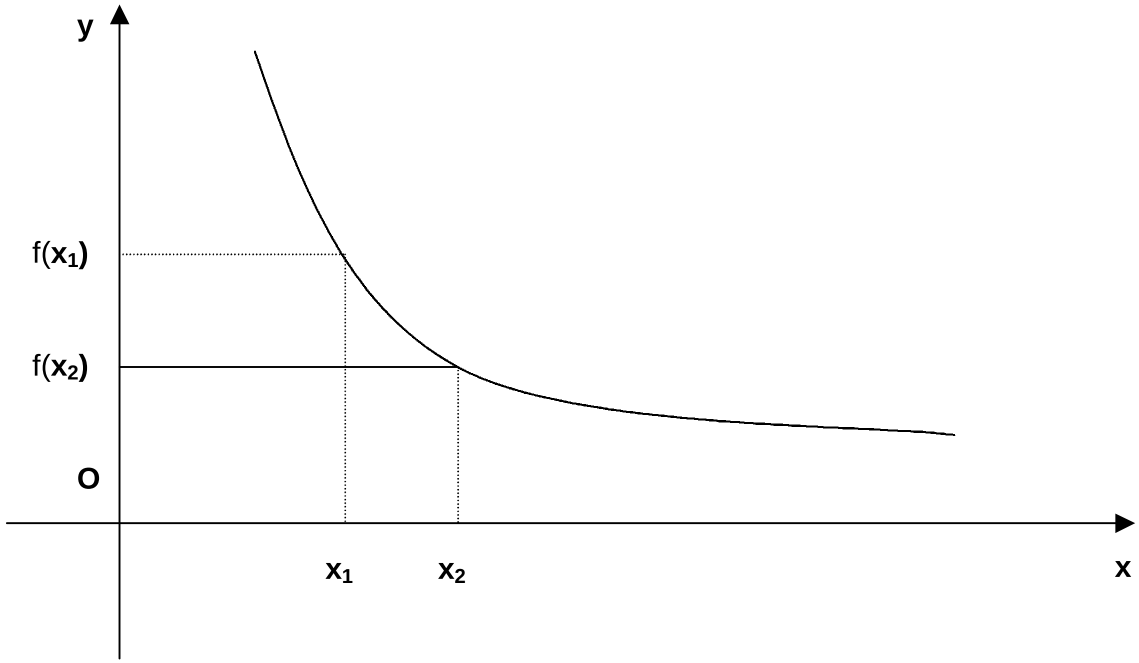


fig. 5

In **fig. 5** è mostrato il grafico di una generica **funzione strettamente decrescente**.

Le funzioni crescenti, le funzioni decrescenti, le funzioni strettamente crescenti e le funzioni strettamente decrescenti sono dette **funzioni monotone**.

Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive e inversa

Una funzione **f: X $\rightarrow$ R** si dice **iniettiva** se elementi distinti di X hanno per immagine tramite f elementi distinti di R, in altre parole

$$\mathbf{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

Una funzione strettamente monotona è sempre iniettiva.

Una funzione **f: X $\rightarrow$ R** si dice **suriettiva** se ogni elemento di R è immagine tramite f di almeno un elemento di X. Denotato con **f(X) = {y in R: y = f(x), per qualche x $\in$ X}** il **condominio** di f, la funzione f è suriettiva se **f(X) = R.**

Una funzione **f: X $\rightarrow$ R** si dice **biiettiva** se è <u>contemporaneamente iniettiva e suriettiva</u>.

Se **f: A $\rightarrow$ B** è una biiezione per ogni y $\in$ B si denoti con f (y) l'unico elemento x $\in$ A tale che f(x) =y, si definisce così la **funzione inversa** $\mathbf{f^{-1} : B \rightarrow A}$**.**

Se il grafico della funzione f è noto è possibile disegnare immediatamente anche il grafico della funzione inversa: basta ruotare il foglio di 90 gradi e ribaltare il foglio, come mostrato in figura.

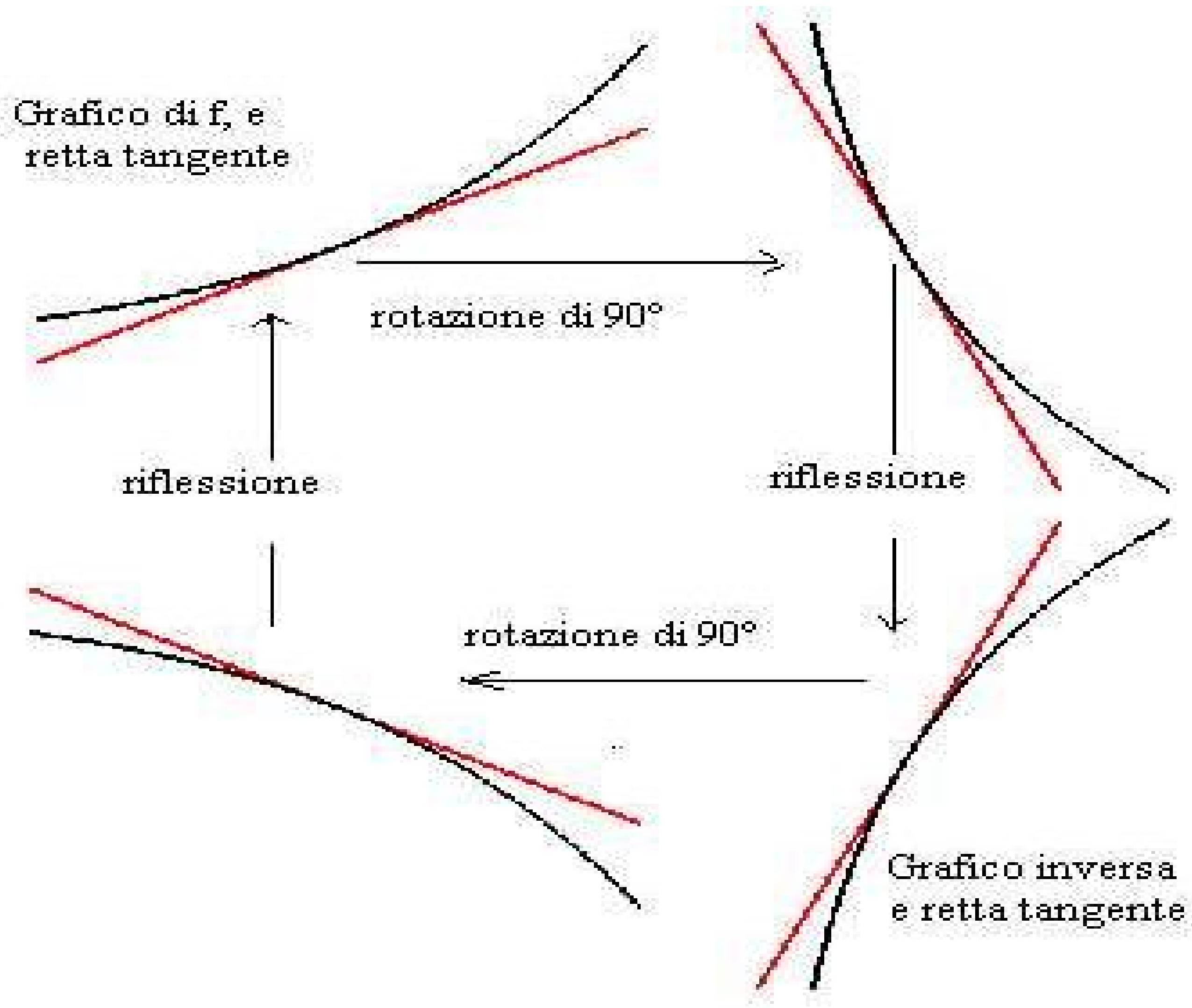
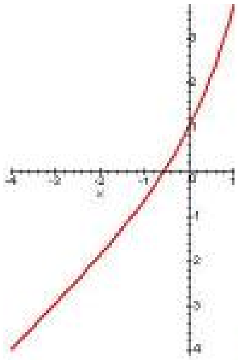


Grafico di f, e
retta tangente
rotazione di 90°
riflessione
riflessione
rotazione di 90°
Grafico inversa
e retta tangente

Riportiamo qui di seguito alcuni grafici di funzioni insieme alle loro inverse:



f(x) = x + exp(x)

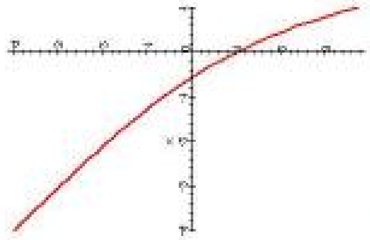
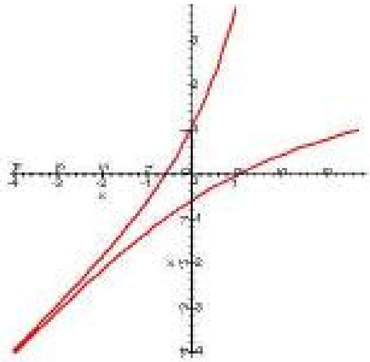


grafico inversa di x+exp(x)



Grafici sovrapposti

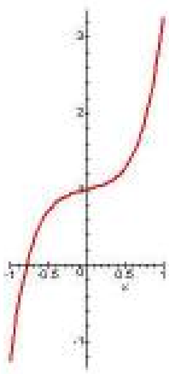


grafico di y = x^5 + x^3 + x^4 + 1

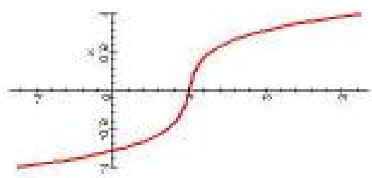
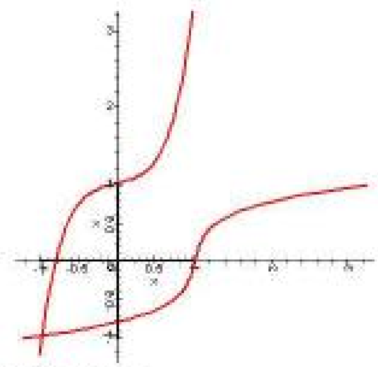


grafico inversa di y = x^5+x^3+x^4+1



Grafici sovrapposti

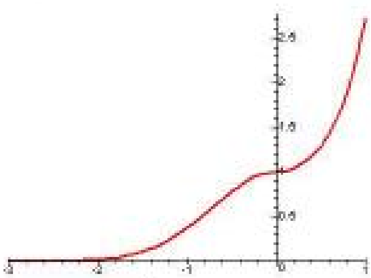
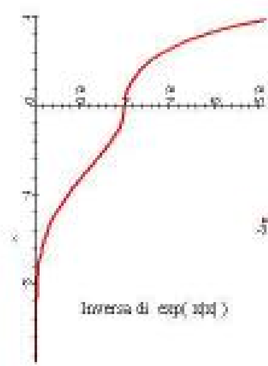
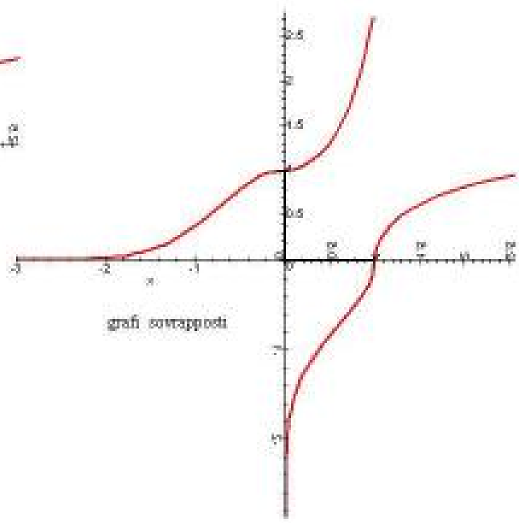


grafico di y = exp (x |x|)



Inversa di exp(x|x|)



grafi sovrapposti