Limiti notevoli

Richiamiamo brevemente alcuni limiti di notevole importanza.

1.

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & x > 1 \\ 1 & x = 1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

Se $x > 1$ allora posto $y = x - 1$ si ha

$$x^n = (1+y)^n = 1 + ny + \cdots + y^n > ny$$

se invece $-1 < x < 1, x \neq 0$ poniamo $y = \frac{1}{|x|}$. Allora

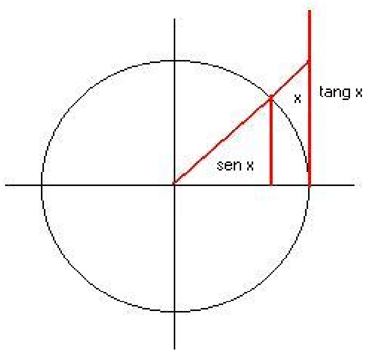
$$\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} (\text{segno } x \cdot 1)^n \frac{1}{y^n}$$

e dunque il risultato si ottiene dal passaggio precedente. Se $x <\leq -1$ possiamo sempre determinare due sottosuccessioni (ad esempio quella dei pari e quella dei dispari) che ammettono limiti distinti.

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

È facile vedere che la funzione data è *pari* almeno per $x \in [-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$. Dunque, se esiste il limite da destra in 0, anche il limite da sinistra esisterà, ed avrà lo stesso valore. Supponiamo dunque che $x > 0$.



Osservando la figura si può vedere che $\sin x < x < \tan x$. Avremo quindi:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

e dunque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

.

3. Una conseguenza di questo limite notevole è un altro limite notevole:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Infatti, ricordando le *formule di bisezione*, abbiamo: $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, e quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

4. Dei seguenti limiti non riportiamo la dimostrazione che può essere consultata nel libro di testo

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad x \geq 1$	$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad x \leq 1$

Il numero e si chiama costante di Nepero ed è la base dei logaritmi naturali.

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log_e\ a, \qquad a \neq 1.$$

Basta effettuare la sostituzione $y = 1/(a^x - 1)$

$$\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = y\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right) = \frac{x}{a^x-1}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{a^x-1} = \lim_{y\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \log_a e$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a$$

6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a\ e, \qquad a>0, a\neq 1.$$

Per calcolarlo effettuiamo la sostituzione $\log_a(1+x) = y$.

$$\frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{y}{a^y - 1}$$

e dunque il risultato si ottiene utilizzando il limite notevole precedente.

7. Supponiamo che $f > 0$ e g siano due funzioni reali, e che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$. Si può calcolare il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}?$$

In tal caso vale la seguente formula $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$. Il problema si riconduce quindi al calcolo del limite dell'esponente, tranne che nei seguenti casi che danno luogo a forme indeterminate e che devono essere risolte diversamente

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, forma indeterminata 0^0;
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, forma indeterminata $1^{\pm\infty}$;
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, forma indeterminata $+\infty^0$.