Si tratta di risolvere il seguente problema di massimo

$$\begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0 \\ x + y = 18 \\ \max xy^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0 \\ x = 18 - y \\ \max(18 - y)y^2. \end{cases}$$

Cerchiamo allora il massimo assoluto della funzione $g(y) = (18 - y)y^2$, con il vincolo che $0 \leq y \leq 18$.

$$g'(y) = 36y - 3y^2 \geq 0 \iff 0 \leq x \leq 12.$$

Dunque la funzione g è crescente per $0 < y < 12$, decrescente per $12 \leq x < 18$, ne risulta che il massimo assoluto è raggiunto per $y = 12$, in tal caso $g(12) = 864$.

6) Dimostrare che il rettangolo di perimetro minimo di area fissata è il quadrato.

---

6) Denotata con x la base del rettangolo e y la sua altezza, si tratta di risolvere il seguente problema di mimimo

$$\begin{cases} x > 0, \ y > 0 \\ xy = a > 0 \\ \min 2(x + y) \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \ y > 0 \\ x = \frac{a}{y} \\ \min 2[\frac{a}{y} + y]. \end{cases}$$

Cerchiamo allora il minimo assoluto della funzione $g(y) = 2[\frac{a}{y} + y]$, con il vincolo che $y > 0$.

$$g'(y) = -\frac{2a}{y^2} + 2 \geq 0 \iff y \leq -\sqrt{a}, \quad \cup \quad y \geq \sqrt{a}.$$

Dunque la funzione g è crescente per $y > \sqrt{a}$, decrescente per $0 < y < \sqrt{a}$, ne risulta che il minimo assoluto è raggiunto per $y = \sqrt{a}$, in tal caso il rettangolo è un quadrato.

6) Dimostrare che tra tutti i triangoli isosceli di perimetro assegnato quello equilatero ha area massima.

6) Denotata con $2y$ la base del triangolo isoscele e x la lunghezza del lato obliquo, si tratta di risolvere il seguente problema di massimo

$$\begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ 2x + 2y = 2p > 0 \\ \max y\sqrt{x^2 - y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ x = p - y \\ \max y\sqrt{p^2 - 2py}. \end{cases}$$

Cerchiamo allora il minimo assoluto della funzione $g(y) = y\sqrt{p^2 - 2py}$, con il vincolo che $y > 0$.

$$g'(y) = \sqrt{p^2 - 2py} - \frac{py}{\sqrt{p^2 - 2py}} = \frac{p^2 - 3py}{\sqrt{p^2 - 2py}} \geq 0 \iff y \leq \frac{p}{3}.$$

Dunque la funzione g è crescente per $0 < y < \frac{p}{3}$, decrescente per $y > \frac{p}{3}$, ne risulta che il massimo assoluto è raggiunto per $y = \frac{p}{3}$, in tal caso il triangolo è equilatero.