I appello - 12 Dicembre 2002

I.1) Data la funzione

$$f(x) = \log(\frac{1}{\sqrt{x}+1}),$$

a) dire se risulta iniettiva nel suo insieme di definizione,

b) calcolare la funzione g inversa di f,

c) studiare la funzione g e disegnarne il grafico.

I.2) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ \frac{x^{n+1}}{n},$$

con $x \in I\!R$ e calcolarne la somma.

I.3) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \log(\frac{1}{\sqrt{x}+1})dx.$$

Svolgimento

I.1) La funzione f è definita per ogni $x \geq 0$. Osserviamo poi che la funzione $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ è una funzione monotona decrescente e dunque anche la funzione f lo è perché il logaritmo è una funzione crescente. Questo prova l'iniettività della funzione f. Calcoliamo ora il codominio della funzione f: determiniamo cioè per quali $y \in I\!R$ l'equazione $y = \log(\frac{1}{\sqrt{x}+1})$ ammette almeno una soluzione (che risulta essere unica a causa della iniettività). Osserviamo innazitutto che $\sqrt{x}+1 \geq 1$ e dunque il suo reciproco è un numero positivo minore od uguale ad 1. La funzione f assumerà allora solo valori non positivi. Ricaviamo la x in funzione della y, per $y \leq 0$:

$$\begin{aligned} y = \log(\frac{1}{\sqrt{x}+1}) \quad &\Leftrightarrow \quad e^y = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow e^{-y} = \sqrt{x}+1 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-y} - 1 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = (e^{-y}-1)^2. \end{aligned}$$

Potevamo ottenere lo stesso risultato osservando che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

Siccome la funzione f è composizione di funzioni continue ed è definita in un connesso soddisfa la propietà dei valori intermedi e dunque il codominio contiene la semiretta negativa $]-\infty, 0]$; abbiamo visto prima che non può contenere valori positivi e dunque dunque la funzione $f : I\!R^+ \to I\!R^-$ è biiettiva ed ammette l'inversa $g : I\!R^- \to I\!R^+$ definita da:

$$g(y) = (e^{-y}-1)^2.$$

Per semplicità denotiamo di nuovo con x il nome della variabile indipendente per la funzione g. Il segno della funzione g è non negativo, $g(0) = 0$ ed inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

La funzione g risulta derivabile nel suo dominio di definizione (in $x = 0$ avremo soltanto la derivata sinistra) e

$$g'(x) = 2(e^{-x}-1)(-e^{-x}) = -2e^{-x}(e^{-x}-1).$$

Per determinare la crescenza, la decrescenza e gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo ed assoluti studiamo il segno della derivata prima:

$$g'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 0.$$

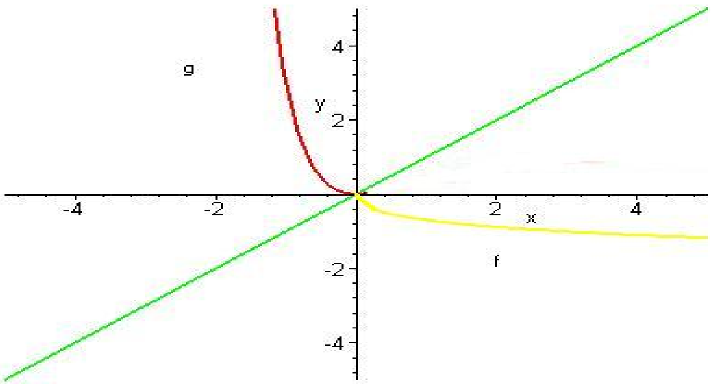
Quindi la funzione è sempre decrescente e $x = 0$ risulta punto di minimo assoluto. Per quanto riguarda lo studio della derivata seconda si ha

$$g''(x) = 2e^{-x}(e^{-x} - 1) - 2e^{-x}(-e^{-x}) = 2e^{-x}(2e^{-x} - 1)$$

da cui

$$g''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{-x} - 1 \geq 0;$$

poiché $x \leq 0$ si ha che $2e^{-x} = 2e^{|x|} \geq 2$ e dunque $g''(x) \geq 0 \quad \forall x \leq 0$. quindi la funzione è sempre convessa.



I.2) La serie data è una serie di potenze. Studiamo innanzitutto la convergenza assoluta. Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+2}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x|.$$

Quindi se $|x| < 1$ si ha convergenza assoluta. Se $x = \pm 1$ il criterio del rapporto non ci dà informazioni, se $|x| > 1$ la serie dei valori assoluti diverge, ma questo non ci fornisce informazioni dirette sulla convergenza o meno della serie di partenza. Se $x = 1$ la serie data diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n},$$

che risulta una serie a segni alterni convergente per il criterio di Leibnitz. Se invece $x = -1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n},$$

che risulta essere la serie armonica divergente. Se $x > 1$. la serie è a segni alterni, studiamo quindi la monotonia di

$$\frac{x^{n+1}}{n} = a_n.$$

Proviamo che $a_n < a_{n+1}\ \ \forall n > \overline{n}$. Si ha

$$\frac{x^{n+1}}{n} < \frac{x^{n+2}}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < x.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = 1,$$

per definizione di limite si ha che per ogni $\forall\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} : \forall n \geq \overline{n} \Rightarrow$

$$1-\varepsilon \leq \frac{n+1}{n} \leq 1+\varepsilon.$$

Perciò se consideriamo $\varepsilon > 0$ tale che $1+\varepsilon < x$ si ha che per ogni $n \geq \overline{n}$

$$\frac{n+1}{n} \leq 1+\varepsilon < x$$

e quindi la relazione $\frac{n+1}{n} < x$ risulta vera per ogni $nn \geq \overline{n}$. La serie allora è indeterminata per il secondo criterio di indeterminatezza. Supponiamo infine $x < -1$, in tal caso $x = -|x|$ e quindi la serie data diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{n}$$

che è una serie a termini positivi. Poiché il termine generale non tende a zero la serie diverge.

In conclusione la serie converge solo se $-1 < x \leq 1$. Per quanto riguarda la somma si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n} = x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x\log(1+x),$$

ricordando che lo sviluppo in serie di Taylor di $\log(1+x)$ in $]-1,1]$ risulta proprio

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

I.3) Eseguiamo il cambiamento di variabile$x = t^2$; $dx = 2tdt$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log(\frac{1}{\sqrt{x}+1})dx &= \int_0^1 \log(\frac{1}{t+1})2tdt = \int_0^1 (t^2)'\log(\frac{1}{t+1})dt \\
&= [t^2\log(\frac{1}{t+1})]_0^1 + \int_0^1 t^2(t+1)\frac{1}{(t+1)^2}dt \\
&= \log\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^2}{t+1}dt.
\end{aligned}$$

Poiché

$$\frac{t^2}{t+1} = t - 1 + \frac{1}{t+1},$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log(\frac{1}{\sqrt{x}+1})dx &= \log\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^2}{t+1}dt = \log\frac{1}{2} + \int_0^1 (t - 1 + \frac{1}{t+1})dt \\
&= \log\frac{1}{2} + \left[\frac{t^2}{2} - t + \log(|t+1|)\right]_0^1 = \log\frac{1}{2} + \log 2 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

II appello - 8 Gennaio 2003

II.1) Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}\sqrt{x^2-2x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

II.2) Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{1+\sin x} dx.$$

II.3) Disegnare nel piano complesso l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} = z\overline{z}\}$.

Svolgimento

II.1) La funzione f è definita in $D =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$. Si annulla in $x = -1, 0, 2$. Il segno di f in D è quello della frazione $\dfrac{x+1}{x-1}$ nello stesso insieme:

$$f(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x \in D \\ \dfrac{x+1}{x-1} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in D \\ x \leq -1 \text{ oppure } x > 1 \end{cases} \iff x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 2.$$

Studiamo ora il comportamento all'infinito della funzione:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1}\sqrt{x^2-2x} = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1}\sqrt{x^2-2x} = +\infty.$$

Esaminiamo allora se ci sono asintoti obliqui.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x(x-1)}\sqrt{x^2-2x} = +1; \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)\sqrt{x^2-2x} - x(x-1)}{x-1} = \\
& \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)\sqrt{x^2-2x} - x(x-1)}{x-1} \cdot \frac{(x+1)\sqrt{x^2-2x} + x(x-1)}{(x+1)\sqrt{x^2-2x} + x(x-1)} = \\
& \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x+1)^2(x^2-2x) - x^2(x-1)^2}{(x+1)\sqrt{x^2-2x} + x(x-1)} = \\
& \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x}{(x+1)\sqrt{x^2-2x} + x(x-1)},
\end{aligned}$$

applichiamo ora il principio di sostituzione degli infiniti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{2x^3}{x\sqrt{x^2-2x}+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\cdot\frac{2}{\left(\sqrt{1-2/x}+1\right)} = 1.$$

In modo analogo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x(x-1)}\sqrt{x^2-2x} = -1;$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = -1.$$

La funzione ha dunque due asintoti obliqui: $y = x+1$ per $x \to +\infty$, $y = -x-1$ per $x \to -\infty$.

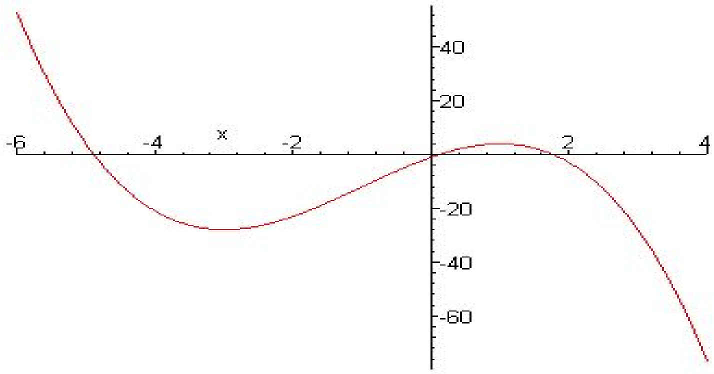
Passiamo ora a studiare la crescenza e la decrescenza della funzione, osserviamo che la derivata prima di f non è definita in $x = 0, 2$ e dunque studieremo f' solo nell'aperto di D.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2}{(x-1)^2}\sqrt{x^2-2x} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{-2(x^2-2x)+(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}} \\ &= \frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{(x-1)^3+2}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}} \geq 0 \iff \\ & \begin{cases} x < 0 \text{ oppure } x > 2 \\ x \geq 1-\sqrt[3]{2} \end{cases} \end{aligned}$$

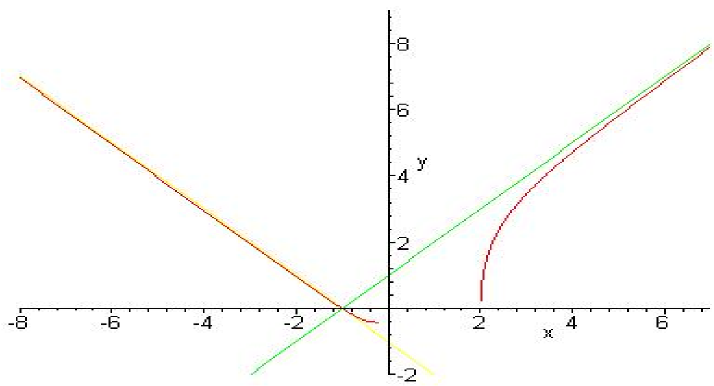
Pertanto la funzione f è decrescente per $x \leq 1-\sqrt[3]{2}$, cresce per $1-\sqrt[3]{2} < x \leq 0$, cresce per $x \geq 2$. Il punto $x = 1-\sqrt[3]{2}$ è un punto di minimo assoluto per la funzione. Studiamo ora la derivata seconda. Svolgendo i calcoli risulta:

$$f''(x) = -\frac{x^3+3x^2-9x+1}{x(x-2)(x-1)^3\sqrt{x^2-2x}}.$$

Studiamo il comportamento della derivata seconda per $x > 2$. Osserviamo innanzitutto che il denominatore è sempre positivo. Studiamo allora il comportamento del polinomio $g(x) = -(x^3+3x^2-9x+1)$. Studiando la derivata prima di g ed utilizzando il teorema degli zeri si ottiene il seguente grafico per la g:



Il grafico della g ci permette di dire immediatamente che la funzione f è concava per $x > 2$. Studiamo ora la derivata seconda di f per $x < 0$. Il denominatore della derivata seconda è sempre negativo e dunque per lo studio del segno di g la funzione dapprima è convessa e poi definitivamente diventa concava. Il grafico della funzione f è rappresentato da:



II.2) Spezziamo l'integrale in due addendi:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx.$$

Nel primo addendo trasformiamo in tangente di $x/2$ e poi operiamo la sostituzione

$\tan x/2 = y$; il secondo addendo è un integrale immediato

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2} \cdot \frac{1}{1+\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}} dx + [\log(1+\sin x)]_0^{\pi/2} =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2} \cdot \frac{1+\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2 + 2\tan x/2} dx + \log 2 =$$

$$\int_0^1 \frac{4y}{(1+y)^2(1+y^2)} dy + \log 2 = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{(1+y)^2}\right) dy + \log 2 =$$

$$2\left[\arctan y + \frac{1}{1+y}\right]_0^1 + \log 2 = \frac{\pi}{2} - 1 + \log 2$$

II.3) Denotiamo con $z \in \mathbb{C}$ il numero complesso dato da $z = x + iy$; allora $\overline{z} = x - iy$. Si tratta di risolvere l'equazione $z + \overline{z} = z\overline{z}$ o, equivalentemente, $x + iy + x - iy = (x+iy)(x-iy)$. Risolvendo si ottiene $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e dunque i punti z che appartengono all'insieme A sono quelli che si trovano nella circonferenza di raggio 1 e centro $(1, 0)$.

III appello - 28 Marzo 2003

III.1) Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{5 - |x^2 + 4x|}.$$

(non è richiesto lo studio della derivata seconda). Calcolare inoltre l'area di piano racchiusa tra la funzione f e l'asse delle x e le rette $x = -2$, $x = 1$.

III.2) Studiare, per $x \geq 0$, il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{1 + x^n}.$$

III.3) Calcolare

$$(i - \sqrt{3})^8 + (i + \sqrt{3})^8.$$

Svolgimento

III.1) Il campo di esistenza della funzione è l'insieme dei punti $\{x : |x^2 + 4x| \leq 5\} = [-5, 1]$. La funzione f è sempre non negativa, inoltre $f(-5) = f(1) = 0$ e dunque $x = -5, 1$ sono punti di minimo assoluto per la funzione f.

L'uguaglianza $x^2 + 4x = 0$ ammette come soluzioni $x = 0, -4$ e dunque tali punti sono di massimo assoluto: $f(-4) = f(0) = \sqrt{5}$. Per calcolare la derivata prima della funzione spezziamo il modulo:

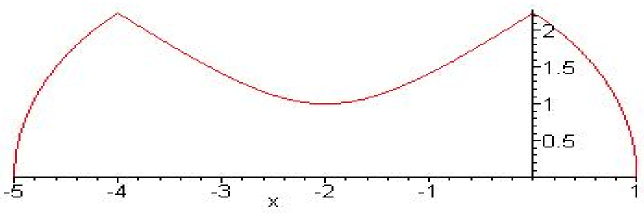
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{5 - x^2 - 4x} & x \in [-5, -4] \cup [0, 1] \\ \sqrt{5 + x^2 + 4x} & x \in]-4, 0[. \end{cases}$$

La funzione non risulta derivabile nei punti $x = -4, 0$, negli altri punti

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x + 4}{2\sqrt{5 - x^2 - 4x}} & x \in]-5, -4[\cup]0, 1[\\ \dfrac{2x + 4}{2\sqrt{5 + x^2 + 4x}} & x \in]-4, 0[. \end{cases}$$

Il fattore $2x + 4$ cambia di segno soltanto nell'intervallo $]-4, 0[$ ed il suo zero $x = -2$ risulta un punto di minimo relativo.

Riepilogando, dallo studio del segno della derivata di f si osserva che la funzione f è crescente per $[-5, -4]$, per $[-2, 0]$; è decrescente per $[-4, -2]$ e per $[0, 1]$. Il grafico della funzione è il seguente:



III.2) Si tratta di una serie a termini positivi e dunque può solo convergere o divergere. Se $x < 1$ allora $x^n \to 0$ per $n \to +\infty$ e dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{1 + x^n} = +\infty, \qquad x < 1.$$

Dunque la serie diverge per $x < 1$. Se $x = 1$ allora $\dfrac{2n}{1 + x^n} = n$ e pertanto la serie diverge anche in questo punto.

Supponiamo ora che $x > 1$. Risulta

$$0 < \frac{2n}{1 + x^n} < \frac{2n}{x^n} \qquad \forall\ n.$$

Applichiamo il criterio del rapporto alla seconda serie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{x^{n+1}} \cdot \frac{x^n}{2n} = \frac{1}{x}.$$

Dunque la seconda serie converge per $x > 1$ e, in tale insieme, per il teorema del confronto, converge anche la serie data.

III.3) Trasformiamo gli addendi della formula in coordinate polari:

$$\begin{aligned} i - \sqrt{3} &= 2\left(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\sin(\frac{5}{6}\pi)\right) \\ i + \sqrt{3} &= 2\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right). \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} (i-\sqrt{3})^8 + (i+\sqrt{3})^8 &= 2^8\left(\cos(\frac{20}{3}\pi) + i\sin(\frac{20}{3}\pi)\right) + 2^8\left(\cos(\frac{4}{3}\pi) + i\sin(\frac{4}{3}\pi)\right) = \\ &= 256\left(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi) + -\cos(\frac{\pi}{3}) - i\sin(\frac{\pi}{3})\right) = -256 \end{aligned}$$

IV appello - 9 Luglio 2003

IV.1) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|e^x - 1|}{1 + |x|}$$

(senza studiare la derivata seconda) e tracciarne il grafico.

IV.2) Studiare il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}.$$

IV.3) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso

$$\frac{1 + \cos t - i \sin t}{1 + \cos t + i \sin t}.$$

Svolgimento

IV.1) La funzione f è definita su tutto l'asse reale e $f(0) = 0$ mentre $f(x) > 0$ per ogni altro valore x. Risulta inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

La legge della funzione f si può scrivere in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{1+x} & x \geq 0 \\ \\ \dfrac{e^x - 1}{x-1} & x < 0. \end{cases}$$

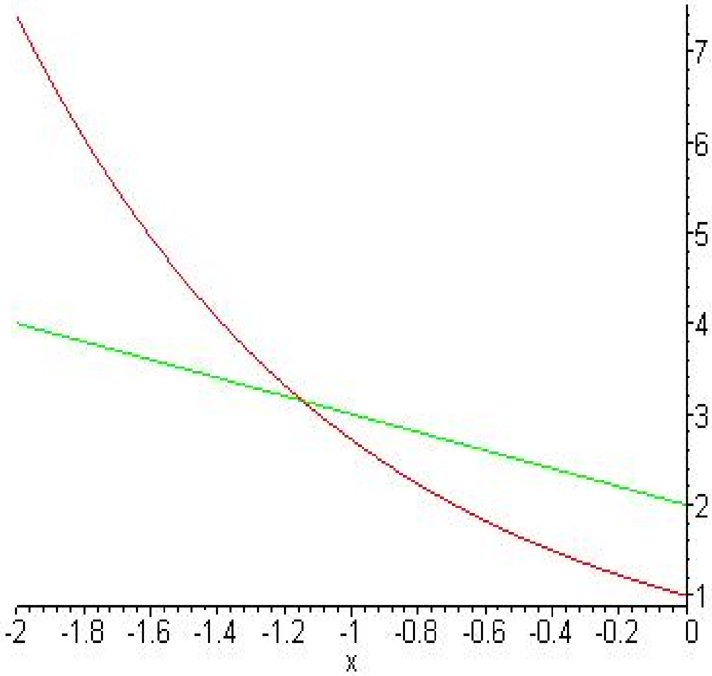
Nel punto $x = 0$ la funzione non è derivabile infatti:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{f(x)}{x} = -1;$$

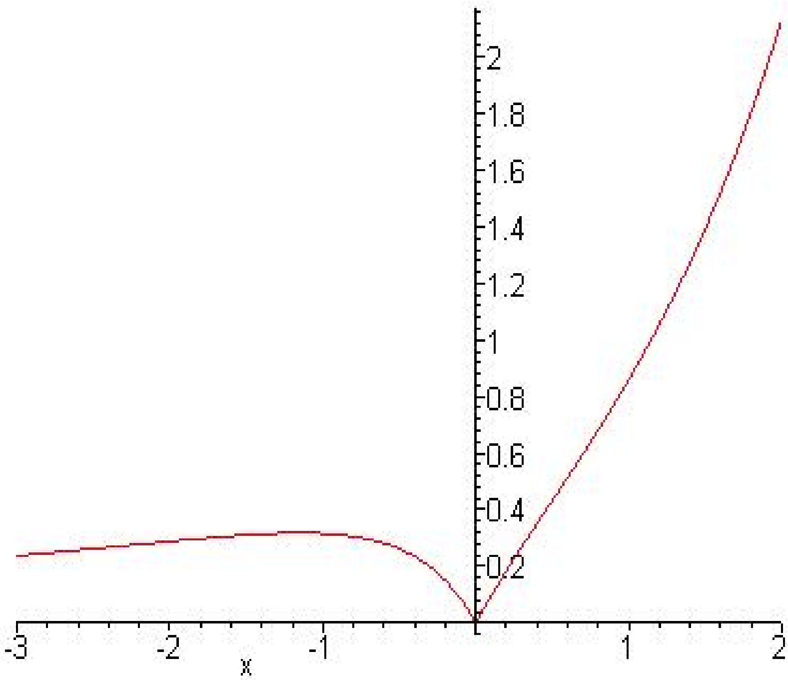
in tutti gli altri punti

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x + 1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ \\ \dfrac{xe^x - 2e^x + 1}{(x-1)^2} & x < 0. \end{cases}$$

Dunque la derivata prima è positiva per $x > 0$, mentre se $x < 0$ la derivata prima risulta positiva se $(x-2)e^x + 1 > 0$. Dunque quando $e^{-x} > 2 - x$ (per $x < 0$). Se disegniamo i grafici di e^{-x} e di $2 - x$ possiamo osservare che i due grafici si incontrano in un solo punto, chiamiamolo x_0.



Per $x_0 < x < 0$ la retta $2 - x$ si trova al di sopra dell'esponenziale e dunque la derivata prima di f è negativa, mentre per $x < x_0$ la derivata prima sarà positiva. Dunque il punto x_0 sarà un punto di massimo relativo. il grafico della funzione f è il seguente:



IV.2) Si tratta di una serie numerica a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto e calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

pertanto la serie converge.

IV.3) Razionalizziamo innanzitutto il denominatore:

$$\begin{aligned}
\frac{1+\cos t - i\sin t}{1+\cos t + i\sin t} &= \frac{1+\cos t - i\sin t}{1+\cos t + i\sin t} \cdot \frac{1+\cos t - i\sin t}{1+\cos t - i\sin t} = \\
&= \frac{1+\cos^2 t - \sin^2 t + 2\cos t - 2i\sin t - 2i\sin t\cos t}{1+\cos^2 t + 2\cos t + \sin^2 t} = \\
&= \frac{2\cos^2 t + 2\cos t - 2i\sin t - 2i\sin t\cos t}{2+2\cos t} = \\
&= \frac{2(1+\cos t)(\cos t - i\sin t)}{2(1+\cos t)}.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\Re\left(\frac{1+\cos t - i\sin t}{1+\cos t + i\sin t}\right) = \cos t \qquad \Im\left(\frac{1+\cos t - i\sin t}{1+\cos t + i\sin t}\right) = -\sin t.$$

V appello - 8 Settembre 2003

V.1) Senza tentare di calcolare l'integrale, determinare la derivata $f'(x)$ della funzione f definita dalla formula:

$$f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^3}{1+t^2} dt,$$

studiare inoltre la crescenza e la decrescenza di f determinando gli eventuali punti di massimo e di minimo relativi.

V.2) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan \frac{1}{n}.$$

V.3) Tracciare un disegno che mostri l'insieme di tutti i numeri complessi z che soddisfano

$$z - \overline{z} = i.$$

Svolgimento

V.1) La funzione $g(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$ è continua in tutto l'asse reale e dunque la funzione f è derivabile e la sua derivata è data da:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^6}{1+x^4}2x - \frac{x^9}{1+x^6}3x^2 = x^7 \left[\frac{2}{1+x^4} - \frac{3x^4}{1+x^6}\right] = \\ &= x^7 \left[\frac{2+2x^6-3x^4-3x^8}{(1+x^4)(1+x^6)}.\right] \end{aligned}$$

Denotiamo allora con h la funzione definita da $h(x) = -3x^8+2x^6-3x^4+2$ e studiamone il segno. Intanto la funzione continua h è pari e dunque basta studiarla per $x \geq 0$. La funzione h tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$ e $h(0) = 2$, è derivabile e

$$h'(x) = -24x^7 + 12x^5 - 12x^3 = 12x^3(-2x^4 + x^2 - 1).$$

Il segno di $-2x^4 + x^2 - 1$ è sempre negativo e dunque h cresce per $x < 0$, decresce per $x > 0$. Siccome $h(-1) = h(1) < 0$ allora la funzione ammette due zeri x_1, x_2 che si trovano negli intervalli $]-1, 0[$ e $]0, 1[$ rispettivamente. Dunque la funzione h assume valori non negativi in $[x_1, x_2]$ mentre assume valori negativi nel complementare. Siamo ora in grado di determinare il segno di h':

h crescente quando $x \in]-\infty, x_1[\cup]0, x_2[$
h decrescente quando $x \in]x_1, 0[\cup]x_2, \infty[$,
inoltre $f(0) = f(1) = 0$.

V.2) Si tratta di una serie a termini non negativi. Se applichiamo il teorema del confronto aisntotico otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

e dunque la serie data converge.

V.3) Poniamo $z = x + iy$, allora $\overline{z} = x - iy$ e dunque

$$i = z - \overline{z} = x + iy - x + iy = 2iy.$$

Il luogo dei punti che soddisfano l'equazione è allora dato dalla retta di punti $y = 1/2$.

VI appello - 29 Settembre 2003

VI.1) Sia $f : [0, \infty[\to I\!R$ definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$$

Provare che f è strettamente monotona. Denotata con g la funzione inversa di f calcolare g'.

VI.2) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\pi)$$

VI.3) Tracciare un disegno che mostri l'insieme di tutti i numeri complessi z che soddisfano

$$z + \overline{z} = |z|^2.$$

Svolgimento

VI.1) La funzione f è una funzione integrale, dunque è continua. Inoltre l'integranda è una funzione continua e quindi f è derivabile e la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} > 0, \forall x \geq 0.$$

f è pertanto strettamente monotona (crescente). Posto allora $x = g(y)$ per il teorema della derivata della funzione inversa

$$g'(y) = \frac{1}{f(x)} = \sqrt{1+x^3} = \sqrt{1+[g(y)]^3}.$$

VI.2) L'espressione $\cos(n\pi)$ vale $(-1)^n$ dunque la serie data è a segni alterni. La serie data non solo converge per il criterio di Leibnitz ma converge anche in valore assoluto.

VI.3) Poniamo $z = x + iy$, allora $\overline{z} = x - iy$. L'equazione data diventa $x^2 + y^2 = 2x$ che è la circonferenza di centro (1,0) e raggio 1.