

Calcoliamo il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\tan x}.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata  $\infty^0$ .

Si osservi che poiché possiamo scrivere

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\tan x \log(\cot x)}$$

basta studiare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \log(\cot x)$$

che risulta una forma indeterminata del tipo  $0 \cdot \infty$ . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \log(\cot x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cot x}{\tan^{-1} x}$$

che risulta rapporto di due infiniti. Verifichiamo che si può adoperare la regola di L'Hospital. Le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno opportuno del punto 0, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a  $-\tan^{-2} x \frac{1}{\cos^2 x}$ , risulta sempre diversa da zero. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cot x}{\tan^{-1} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\cot x} \frac{1}{\sin^2 x}}{-\tan^{-2} x \frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x \cos^2 x}{\cot x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cot x} = 0 \end{aligned}$$

e quindi il limite vale  $e^0 = 1$ .