

Calcoliamo il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{\sin x}.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata 0^0 . Si osservi che poiché possiamo scrivere

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \log \tan x}$$

basta studiare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log \tan x$$

che risulta una forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log \tan x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \tan x}{\frac{1}{\sin x}}$$

che è un rapporto di due infiniti. Verifichiamo che si può adoperare la regola di L'Hospital. Le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno destro del punto zero, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $-\sin^{-2} x \cos x$, risulta diversa da zero in un opportuno intorno destro di zero. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \tan x}{\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x}}{-\sin^{-2} \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x \cos x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin^2 x}{\sin x \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0. \end{aligned}$$

In definitiva allora il limite assegnato risulta uguale a $e^0 = 1$.