I appello - 10 Dicembre 2004

Risolvere gli esercizi motivando tutte le risposte.

I.1) Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\left|\sqrt[3]{1-x^2}\right|.$$

I.2) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$$

I.3) Calcolare

$$\int \frac{\log x + \sqrt{x}}{x}\, dx.$$

I.4) Calcolare

$$(i)^{2/3}.$$

Svolgimento

I.1) Osserviamo che la funzione f è pari e pertanto basta studiarla per $x \geq 0$. Inoltre $f(0) = 0, f(1) = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{1-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{1-x^2} & x > 1. \end{cases}$$

Studiamo ora il segno di f in $[0, \infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 \qquad &\iff \qquad \left|\sqrt[3]{1-x^2}\right| \leq 2 \quad \iff \\ &\left\{\sqrt[3]{1-x^2} \leq 2 \;\;\&\;\; x \in [0,1]\right\} \bigcup \left\{\sqrt[3]{1-x^2} \geq -2 \;\;\&\;\; x > 1\right\} \\ &[0,1] \bigcup \{1 - x^2 \geq -8 \;\;\&\;\; x > 1\} = [0,3]. \end{aligned}$$

Non ci sono asintoti orizzontali o obliqui, infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^3}} = 0 \end{aligned}$$

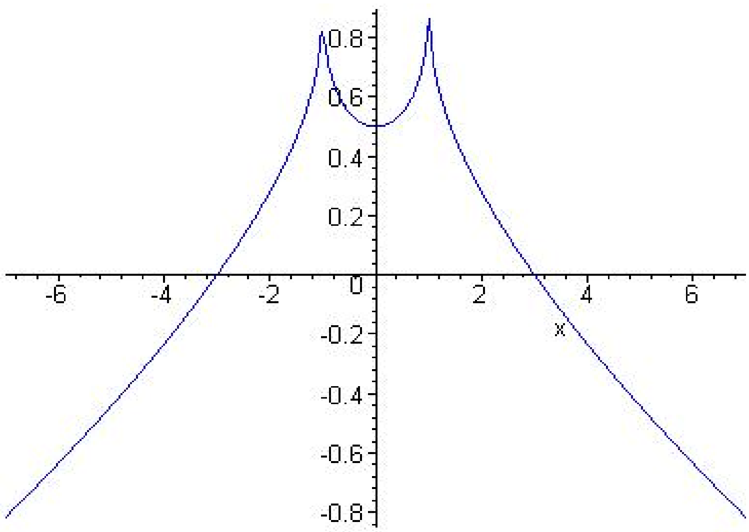
Studiamo ora la derivata prima di f:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{6}(1-x^2)^{-2/3}(-2x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} & 0 \le x < 1 \\ -\dfrac{1}{3}\dfrac{x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} & x > 1 \\ \nexists & x = 1. \end{cases}$$

La f è pertanto crescente in [0,1], decrescente in $[1,\infty[$ e ha un punto di massimo in $x = 1$ che è un punto di non derivabilità (in questo caso c'è la tangente verticale). Studiamo ora la derivata seconda in $x \ge 0, x \ne 1$.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{9}\dfrac{x^2+3}{(1-x^2)(1-x^2)^{2/3}} & 0 \le x < 1 \\ -\dfrac{1}{9}\dfrac{x^2+3}{(1-x^2)(1-x^2)^{2/3}} & x > 1 \end{cases}$$

Dunque la derivata seconda è positiva nel suo dominio e pertanto la funzione f è convessa separatamente in [0,1] e in $[1,\infty[$. Il grafico qualitativo della funzione f è il seguente:



I.2) Si tratta di una serie a termini positivi. Proviamo innanzitutto che il termine generale è un infinitesimo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n[\sqrt{n+1}+\sqrt{n}]} = 0 \end{aligned}$$

Dunque il termine generale è un infinitesimo di ordine 3/2 rispetto all'infinitesimo principale $1/n$. La serie data dunque converge per il criterio del confronto asintotico.

I.3) Spezziamo l'integrale in due addendi

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x + \sqrt{x}}{x}\, dx &= \int \frac{\log x}{x}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\log^2 x + 2\sqrt{x} + c.\end{aligned}$$

I.4) Osserviamo che $(i)^{2/3} = \sqrt[3]{i^2} = \sqrt[3]{-1}$. Il numero $-1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$ e dunque se, $z = \sqrt[3]{-1}$, allora

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3); \\ z_2 &= \cos(\pi) + i\sin(\pi); \\ z_3 &= \cos(5/3\pi) + i\sin(5/3\pi). \end{aligned}$$

II appello -11 Gennaio 2004

Risolvere gli esercizi motivando tutte le risposte.

II.1) Studiare la funzione

$$f(x) = |x-1| - \sqrt{1+x^2}.$$

II.2) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \log \frac{n+1}{n}.$$

II.3) Calcolare

$$\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x \log x}\, dx.$$

II.4) Risolvere l'equazione

$$z^6 + 1 = \sqrt{3}i.$$

Svolgimento

II.1) Spezziamo innanzitutto la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x-1-\sqrt{1+x^2} & x \geq 1 \\ 1-x-\sqrt{1+x^2} & x < 1. \end{cases}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 \iff & \begin{cases} \sqrt{1+x^2} \leq x-1 \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} \sqrt{1+x^2} \leq 1-x \\ x < 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} 1+x^2 \leq 1+x^2-2x \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 1+x^2 \leq 1+x^2-2x \\ x \leq 1 \end{cases} \\ \iff & x \in \mathbb{R}^-. \end{aligned}$$

La funzione f ha asintoti orizzontali, infatti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x-1-\sqrt{1+x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1-\sqrt{1+x^2}}{x-1+\sqrt{1+x^2}}[x-1+\sqrt{1+x^2}] = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x-1+\sqrt{1+x^2}} = \\
&= -2\frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1+\sqrt{1+x^2}}{x}} = -1 \\
\lim_{x\to-\infty} 1-x-\sqrt{1+x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x-\sqrt{1+x^2}}{1-x+\sqrt{1+x^2}}[1-x+\sqrt{1+x^2}] = 1.
\end{aligned}$$

Studiamo ora la derivata prima di f.

$$f'(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}} & x>1 \\ -1-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} & x<1 \\ \nexists & x=1 \end{cases}$$

La derivata prima è dunque positiva per $x>1$ mentre se $x<1$ risulta

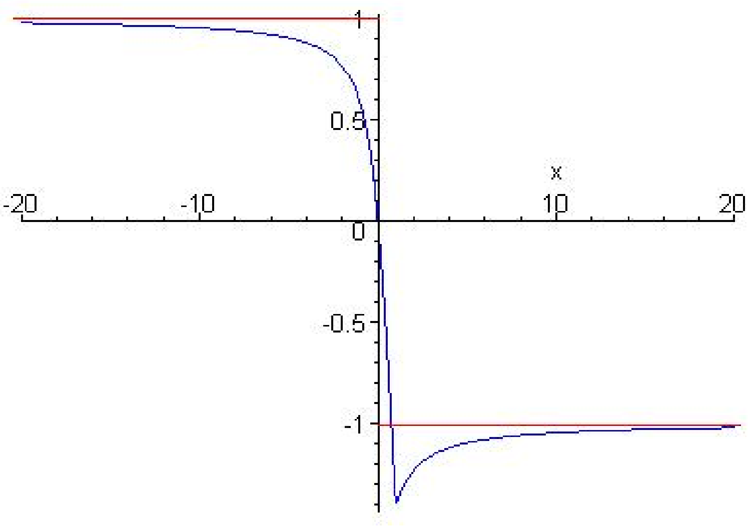
$$\begin{aligned}
f'(x)\geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad & \sqrt{1+x^2}+x\leq 0 \quad \& \quad x<1 \\
& \{x<0 : \sqrt{1+x^2}\leq -x\} \cup \{x\in[0,1[: \sqrt{1+x^2}\leq -x\} \\
& \{x<0 : 1+x^2\leq x^2\}\cup\emptyset = \emptyset.
\end{aligned}$$

La funzione f è dunque decrescente per $x<1$, crescente per $x>1$.

La derivata seconda di f è definita in tutti i punti tranne che in $x=1$, laddove esiste vale

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

e dunque la funzione f è concava per $x<1$ e per $x>1$. Il grafico qualitativo della funzione f è il seguente:



II.2) Calcoliamo il limite del termine generale della serie

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\log\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Questo ci dice che il termine generale è un infinitesimo di ordine $1/2$ rispetto all'infinitesimo principale $1/n$ e dunque la serie data, che è a termini positivi, diverge per il criterio del confronto asintotico.

II.3) Risolviamo l'integrale con la sostituzione $1+\log x=t^2$, dunque $\log x=t^2-1$ e $dx/x=2tdt$.

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{1+\log x}}{x\log x}\,dx &= 2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,dt=2\int 1+\frac{1}{t^2-1}dt=\\ &= 2\left[t-\frac{1}{2}\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]=\\ &= 2\log(\sqrt{1+\log x})-\log\left(\frac{\sqrt{1+\log x}-1}{\sqrt{1+\log x}+1}\right)\end{aligned}$$

II.4) Si tratta di calcolare

$$z=\sqrt[6]{-1+i\sqrt{3}}.$$

Intanto $-1+i\sqrt{3}=2(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi)$. Dunque le sei soluzioni dell'equazione hanno come modulo $\sqrt[6]{2}$ e come anomalie $\theta=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k}{3}\pi, k=0,1,2,3,4,5$. (Osserviamo che le sei soluzioni formano un esagono regolare iscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[6]{2}$ e dunque due anomalie consecutive distano tra di loro $\frac{\pi}{3}$).

III appello - 24 Marzo 2005

III.1) Una finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un triangolo equilatero. Trovare la proporzione della finistra (rapporto tra altezza totale e base) che garantisce la massima illuminazione una volta fissato il perimetro totale.

III.2) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{2n + \sin\frac{1}{n^2}}$$

III.3) Calcolare

$$\int \sqrt[3]{x}(2 + 3\sqrt[2]{x})^2 dx.$$

III.4) Determinare le radici quadrate di $5 - 12i$.

Svolgimento

III.1) Supponiamo che p sia il perimetro totale fissato, se con x e y indichiamo rispettivamente la base e l'altezza del rettangolo allora avremo $p = 3x + 2y$. La funzione da massimizzare è la funzione che esprime l'area della finestra. Area che è la somma delle aree del triangolo $x^2\sqrt{3}/2$ e del rettangolo xy che compongono la finestra. Dunque

$$\begin{aligned}
A(x,y) &= xy + x^2\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y = \frac{p-3x}{2} \\
A(x) &= x\frac{p-3x}{2} + x^2\frac{\sqrt{3}}{2} \\
A'(x) &= \frac{1}{2}xp - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}x \\
A'(x) &\geq 0 \iff x \leq \frac{p}{2}\cdot\frac{1}{3-\sqrt{3}/2} = p\cdot\frac{6+\sqrt{3}}{33}
\end{aligned}$$

Dunque il rapporto ottimale è dato da:

$$\frac{y + \frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\frac{p-3\cdot p\cdot\frac{6+\sqrt{3}}{33}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}p\cdot\frac{6+\sqrt{3}}{33}}{p\cdot\frac{6+\sqrt{3}}{33}} = \frac{9+3\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}}$$

III.2) Osserviamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e dunque la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \sin\frac{1}{n^2}}.$$

Denotiamo con $a_n = \dfrac{1}{2n + \sin\frac{1}{n^2}}$. Risulta $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. La serie data converge pertanto per il criterio di Leibnitz. Se la studiamo in valore assoluto la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + \sin\frac{1}{n^2}}$$

il cui termine generale a_n è un infinitesimo di ordine 1 rispetto all'infinitesimo principale $1/n$. Per il criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$. La serie dunque converge semplicemente perché converge ma non converge in valore assoluto.

III.3) Si tratta di un integrale binomio, $n = 2 \in \mathbb{N}$ e dunque operiamo la sostituzione $x = y^6, dx = 6y^5dy$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{x}(2 + 3\sqrt[2]{x})^2 dx &= 6\int y^7(2+3y^3)^2 dy = \\
&= 6\int 4y^7 + 12y^{10} + 9y^{13} dy = 24\frac{y^8}{8} + 72\frac{y^{11}}{11} + 54\frac{y^{14}}{14} + c = \\
&= 3y^8 + \frac{72}{11}y^{11} + \frac{27}{7}y^{14} + c = 3x^{4/3} + \frac{72}{11}x^{11/6} + \frac{27}{7}x^{7/3} + c
\end{aligned}$$

III.4) Osserviamo che se indichiamo con $z = (a + ib)$ una generica soluzione della radice quadrata che dobbiamo calcolare allora $12i$ deve essere un doppio prodotto e $5 = a^2 - b^2$. Ne segue immediatamente che $3 - 2i, -3 + 2i$ sono le radici cercate.