**4.** Data la funzione $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \arcsin \sqrt{2}x$, determinare: lo sviluppo in serie di potenze di $f$ e l'intervallo dove vale lo sviluppo; $f'(0)$ e $f^{(12)}(0)$

**Svolgimento**

Risulta

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2x^2}} = \sqrt{2}\left[1+(-2x^2)\right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-2x^2)^n = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}$$

e tale sviluppo vale per ogni $x$ tale che $-1 < -2x^2 < 1$ ovvero per $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ .

Quindi, integrando termine a termine, otteniamo

$$\arcsin \sqrt{2}x = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

e

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

per ogni $x$ tale che $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ .

Inoltre $f'(0) = \sqrt{2}$ e $f^{(12)}(0) = 0$.