Studiamo, al variare di $x \in I\!R$, il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \frac{1}{n^2}x^n$, consideriamo allora $|a_n| = \frac{1}{n^2}|x|^n$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2}|x|^{n+1} \cdot n^2 \frac{1}{|x|^n} = |x|$$

Dunque,

- se $|x| < 1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x > 1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;
- se $x = \pm 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge, dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x < -1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}|x|^n$. Denotiamo con $b_n = \frac{1}{n^2}|x|^n$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ è una serie a segni alterni. Proviamo che $b_n \leq b_{n+1}$ da un certo n in poi.

  $$b_n = \frac{1}{n^2}|x|^n \leq \frac{1}{(n+1)^2}|x|^{n+1} = b_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{(n+1)^2}{n^2} \leq |x|$$

  Sappiamo che

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

e dunque, per la definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $1 + \varepsilon < |x|$, esiste $m \in I\!N$ tale che

$$1 - \varepsilon \leq \frac{(n+1)^2}{n^2} \leq 1 + \varepsilon < |x|$$

per ogni $n > m$. Allora, per ogni $n > m$ risulta $b_n \leq b_{n+1}$ e dunque la serie data è indeterminata.