Analisi Matematica Ia - II Test di verifica
Compito A

Sia a = numero lettere del nome, b= numero delle lettere del cognome.

1) Studiare e tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{1-x|x|+|\log(x+1)|}$$

(Non è richiesto lo studio della derivata seconda).

2) Dati gli insiemi definiti rispettivamente da $A = \{z : |z-1| < 3\}$ e $B = \{|z-2i| > 2\}$ determinare, anche geometricamente, $A \cap B$.

3) Calcolare le radici di $(-2\sqrt{3}-2i)^{1/4}$ e collocarle nel piano complesso.

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{ax}{(ax^2+1)(x+ab)}\, dx.$$

---

1 Poichè compare ad esponente $\log(x+1)$ deve essere $x+1>0$ cioè il dominio D della funzione è la semiretta $]-1,+\infty)$. La funzione f è continua in D perchè è un'esponenziale e l'esponente è somma di funzioni continue.

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x^2+\log(x+1)} = (x+1)e^{1-x^2} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ e^{1+x^2-\log(x+1)} = \dfrac{e^{1-x^2}}{x+1} & \text{se} \quad -1 < x < 0. \end{cases}$$

La funzione f assume inoltre solo valori positivi. Per la ricerca di eventuali asintoti si ha:

$$\lim_{x\to -1^+} 1+x^2-\log(x+1) = 2 - \lim_{x\to -1^+} \log(x+1) = +\infty,$$

e quindi

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

cioè in $x=-1$ si ha un asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} 1-x^2+\log(x+1) = -\infty$$

in quanto $-x^2$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $\log(x+1)$. Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

ovvero f presenta un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ ed è l'asse delle x.

Dalle regole di derivazione si trova:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{1-x^2}\left[-2x^2-2x+1\right] & \text{se } x>0 \\ \\ e^{1-x^2}\left[\dfrac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right] & \text{se } -1<x<0, \end{cases}$$

mentre nell'origine

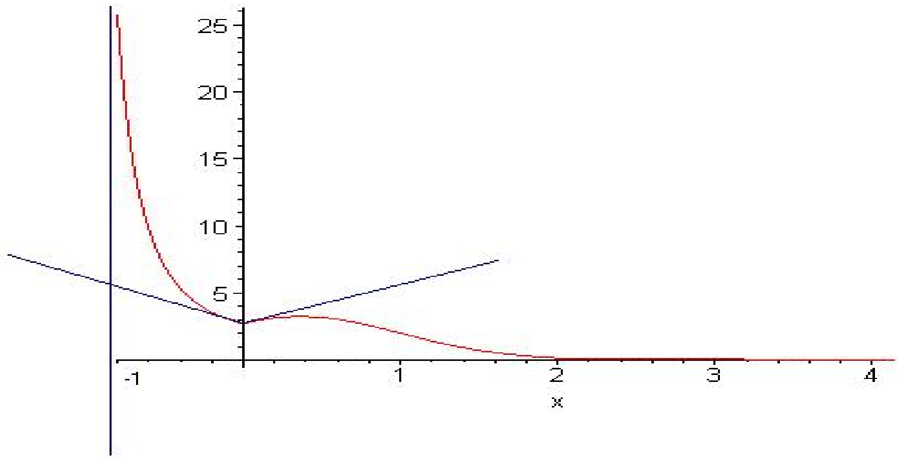
$$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)e^{1-x^2}-e}{x} = e \quad \text{e} \quad f'_-(0) = \lim_{x\to0^-}\frac{\dfrac{e^{1-x^2}}{x+1}-e}{x} = -e,$$

cioè non esiste $f'(0)$.
Risulta

$$f'(x)\geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x^2+2x-1\leq 0 & \text{se } x>0 \\ 2x^2+2x-1\geq 0 & \text{se } -1<x<0 \end{cases}$$

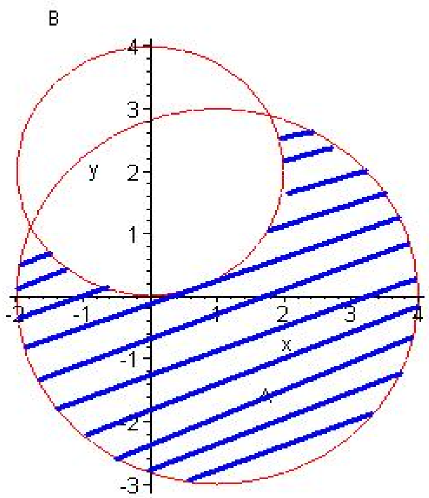
$$\Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}\leq x\leq\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} & \text{se } x>0 \\ x\leq\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2} \text{ oppure } x\geq\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} & \text{se } -1<x<0 \end{cases}$$

Dunque la funzione f decresce nell'intervallo $[-1,0]$, cresce tra $[0,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}]$, decresce per $x>\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Ne segue che in $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ c'è un massimo relativo mentre in $x=0$ c'è un minimo relativo anche se il punto è di non derivabilità. Il grafico della f è



2 L'insieme A è costituito dai numeri complessi z per i quali $\sqrt{(x-1)^2+y^2} < 3$ e dunque dai punti del piano complesso interni alla circonferenza $(x-1)^2+y^2=9$.

I punti di B invece saranno esterni alla circonferenza $x^2+(y-2)^2=4$ e dunque l'insieme $A \cap B$ è rappresentato geometricamente da:



3 Rappresentiamo innanzitutto il numero $z = -2\sqrt{3} - 2i$ in funzione di modulo r e argomento x. Risulta

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{12+4} = 4 \\ \cos x &= \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

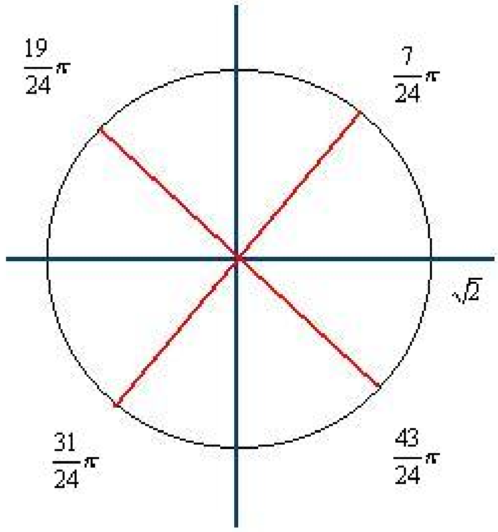
Dunque

$$z = 4\left[\cos(\frac{7}{6}\pi) + i\sin(\frac{7}{6}\pi)\right].$$

Le 4 radici quarte di z saranno date pertanto da:

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{2}\left[\cos(\frac{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi}{4})\right] \qquad k = 0,1,2,3.\\
z_1 &= \sqrt{2}\left[\cos(\frac{7}{24}\pi) + i\sin(\frac{7}{24}\pi)\right]\\
z_2 &= \sqrt{2}\left[\cos(\frac{19}{24}\pi) + i\sin(\frac{19}{24}\pi)\right]\\
z_3 &= \sqrt{2}\left[\cos(\frac{31}{24}\pi) + i\sin(\frac{31}{24}\pi)\right]\\
z_4 &= \sqrt{2}\left[\cos(\frac{43}{24}\pi) + i\sin(\frac{43}{24}\pi)\right]
\end{aligned}$$

La rappresentazione delle radici nel piano complesso è la seguente:



4 Scomponiamo in addendi l'integranda utilizzando la formula di Hermite:

$$\begin{aligned}
\frac{ax}{(ax^2+1)(x+ab)} &= \frac{A}{x+ab} + \frac{Bx+C}{ax^2+1} = \\
= \quad & \frac{[A(ax^2+1) + (Bx+C)(x+ab)]}{(ax^2+1)(x+ab)}
\end{aligned}$$

Occupiamoci in seguito di calcolare A, B, C e supponiamo di averli trovati. Risulta allora

$$\begin{aligned}\int \frac{ax}{(ax^2+1)(x+ab)}\,dx &= \int \frac{A}{x+ab}\,dx \int \frac{Bx+C}{ax^2+1}\,dx = \\ &= A\log(|x+ab|) + \frac{B}{2a}\log(ax^2+1) + \frac{C}{\sqrt{a}}\arctan(\sqrt{a}x) + k\end{aligned}$$

Risolviamo ora il sistema di 3 equazioni in 3 incognite:

$$A(ax^2+1) + (Bx+C)(x+ab) = ax.$$

$$\begin{cases} Aa + B = 0 \\ Bab + C = a \\ A + Cab = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{a^2b}{1+a^3b^2} \\ B = \dfrac{a^3b}{1+a^3b^2} \\ C = \dfrac{a}{1+a^3b^2} \end{cases}$$

Analisi Matematica Ia -II Test di verifica
Compito B

1) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\left|\frac{x^2 - x - 2}{x - 3}\right|},$$

studiarla e tracciarne il grafico (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

2) Dati gli insiemi definiti rispettivamente da $A = \{z : |z - 1| < 3\}$ e $B = \{|z - 2i| > 2\}$ determinare, anche geometricamente, $A \setminus B$.

3) Calcolare le radici di $(2 + 2\sqrt{3}i)^{1/3}$ e collocarle nel piano complesso.

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{ax}{(ax^2 + 1)(x + ab)}\, dx.$$

---

1 Campo di esistenza $D = I\!R \setminus \{3\}$. La funzione è a valori non negativi e poichè $x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1$ o $x = 2$, si ha che tali punti sono di minimo assoluto per f; inoltre

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}} & \text{se } x \in [-1, 2] \cup]3, +\infty) \\ \\ \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 2}{3 - x}} & \text{se } x \in (-\infty, -1[\cup]2, 3[\end{cases}$$

Pertanto $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, mentre non ci sono asintoti obliqui perchè $\dfrac{f(x)}{x}$ tende a 0 in entrambe le direzioni.

Inoltre $\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = +\infty$, quindi si ha un asintoto verticale in $x = 3$.

Il calcolo della derivata prima fornisce

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x - 3}{x^2 - x - 2}} \cdot \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} & \text{se } x \in]-1, 2[\cup]3, +\infty) \\ \\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3 - x}{x^2 - x - 2}} \cdot \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} & \text{se } x \in (-\infty, -1[\cup]2, 3[\end{cases}$$

e poichè

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to-1^+} \sqrt{\frac{(x - 2)}{(x - 3)(x + 1)}} = +\infty$$

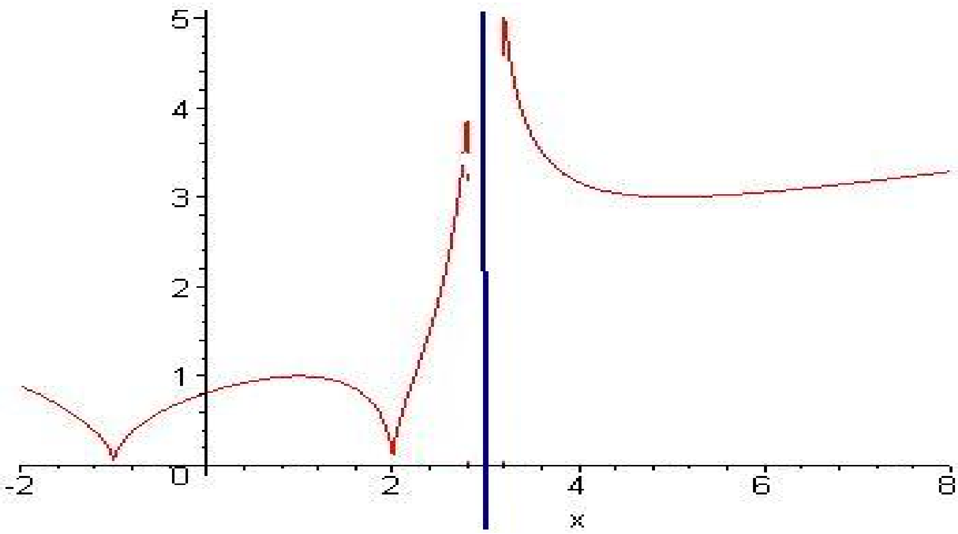
non esiste $f'(-1)$, e analogamente non esiste $f'(2)$.

Risulta

$$f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \geq 0 & x \in]-1, 2[\cup]3, +\infty[\\ x^2 - 6x + 5 \leq 0 & x \in]-\infty, -1[\cup]2, 3[\end{cases}$$

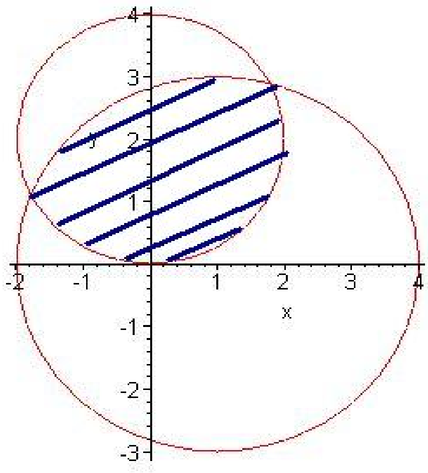
f è non decrescente in $[-1, 1]$, in $[2, 3[$ e in $[5, +\infty)$, mentre è non crescente in $(-\infty, -1]$, in $[1, 2]$ e in $]3, 5]$. Quindi $x = -1$, $x = 2$ sono di minimo assoluto per quanto visto all'inizio, $x = 5$ è di minimo locale, mentre $x = 1$ è un punto di massimo locale.

Il grafico della funzione f è:



2 L'insieme A è costituito dai numeri complessi z per i quali $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 3$ e dunque dai punti del piano complesso interni alla circonferenza $(x-1)^2 + y^2 = 9$.

I punti di B invece saranno esterni alla circonferenza $x^2 + (y-2)^2 = 4$ e dunque l'insieme $A \cap B$ è rappresentato geometricamente da:



3 Rappresentiamo innanzitutto il numero $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ in funzione di modulo r e argomento x. Risulta

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{4+12} = 4 \\ \cos x &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin x &= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

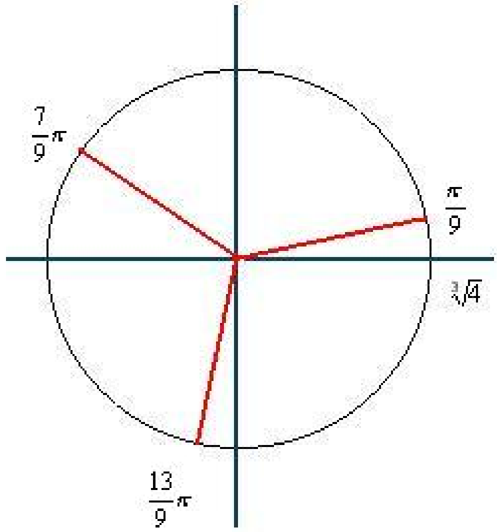
Dunque

$$z = 4\left[\cos(\frac{1}{3}\pi) + i\sin(\frac{1}{3}\pi)\right].$$

Le 3 radici cubiche di z saranno date pertanto da:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{4}\left[\cos(\frac{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi}{3})\right] \qquad k = 0, 1, 2. \\ z_1 &= \sqrt[3]{4}\left[\cos(\frac{1}{9}\pi) + i\sin(\frac{1}{9}\pi)\right] \\ z_2 &= \sqrt[3]{4}\left[\cos(\frac{7}{9}\pi) + i\sin(\frac{7}{9}\pi)\right] \\ z_3 &= \sqrt[3]{4}\left[\cos(\frac{13}{9}\pi) + i\sin(\frac{13}{9}\pi)\right] \end{aligned}$$

La rappresentazione delle radici nel campo complesso è:



4 vedi compito A.

Analisi Matematica Ia - II Test di verifica
Compito C

1) Data la funzione

$$f(x) = e^{-x^2}\sqrt{|9 - x^2|}$$

studiarla e tracciarne il grafico (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

2) Dati gli insiemi definiti rispettivamente da $A = \{z : |z - 1| < 3\}$ e $B = \{|z - 2i| > 2\}$ determinare, anche geometricamente, $A \cup B^c$.

3) Calcolare le radici di $(-2\sqrt{3} + 2i)^{1/3}$ e collocarle nel piano complesso.

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{ax}{(ax^2 + 1)(x + ab)}\, dx.$$

---

1 Il campo di esistenza, dato che il radicando è sempre non negativo è tutto $I\!R$.

La funzione è continua, perchè prodotto di funzioni continue, non negativa ed inoltre è simmetrica, perchè la variabile x vi compare solo al quadrato.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}\sqrt{9 - x^2} & |x| \le 3 \\ e^{-x^2}\sqrt{x^2 - 9} & |x| > 3. \end{cases}$$

Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

e quindi che l'asse delle ascisse è un asintoto orizzontale.

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}\dfrac{2x^2 - 19}{\sqrt{9 - x^2}} & \text{se } x \in]-3, 3[\\ \\ xe^{-x^2}\dfrac{19 - 2x^2}{\sqrt{x^2 - 9}} & \text{se } x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[\end{cases}$$

mentre, risultando

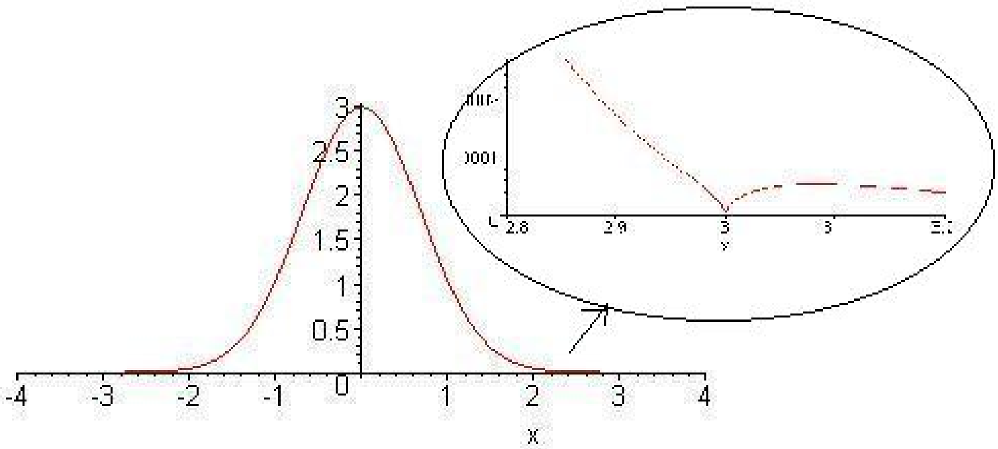
$$\lim_{x\to3^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to3^+} f'(x) = +\infty$$

non esiste $f'(3)$ e, per simmetria, non esiste $f'(-3)$.

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x(2x^2-19) \geq 0 & |x| < 3 \\ x(2x^2-19) \leq 0 & |x| > 3 \end{cases}$$

e dunque la funzione è crescente in $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{19}{2}}\right]$, in $[-3, 0]$ ed in $\left[3, \sqrt{\frac{19}{2}}\right]$, decrescente in $\left[-\sqrt{\frac{19}{2}}, -3\right]$ in $[0, 3]$ ed in $\left[\sqrt{\frac{19}{2}}, +\infty\right[$.

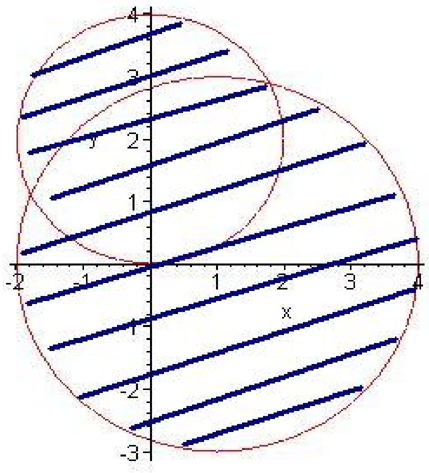
Se ne conclude che i punti $-\sqrt{\frac{19}{2}}, 0$ e $\sqrt{\frac{19}{2}}$ sono di massimo, mentre i punti ± 3 sono due punti di minimo. Il grafico della funzione è:



N.B. il grafico è analogo si ha in prossimità di x= -3.

2 L'insieme A è costituito dai numeri complessi z per i quali $\sqrt{(x-1)^2+y^2} < 3$ e dunque dai punti del piano complesso interni alla circonferenza $(x-1)^2+y^2 = 9$.

I punti di B invece saranno esterni alla circonferenza $x^2 + (y-2)^2 = 4$ e dunque l'insieme $A \cap B$ è rappresentato geometricamente da:



3 Rappresentiamo innanzitutto il numero $z = -2\sqrt{3} + 2i$ in funzione di modulo r e argomento x. Risulta

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{12+4} = 4 \\ \cos x &= -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

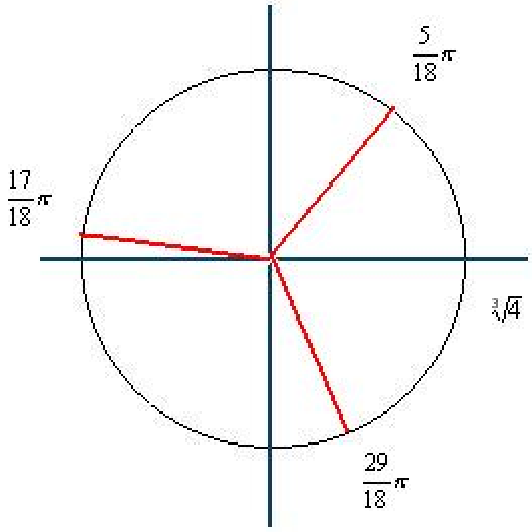
Dunque

$$z = 4\left[\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\sin(\frac{5}{6}\pi)\right].$$

Le 3 radici cubiche di z saranno date pertanto da:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{4}\left[\cos(\frac{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi}{3})\right] \qquad k = 0,1,2. \\ z_1 &= \sqrt[3]{4}\left[\cos(\frac{5}{18}\pi) + i\sin(\frac{5}{18}\pi)\right] \\ z_2 &= \sqrt[3]{4}\left[\cos(\frac{17}{18}\pi) + i\sin(\frac{17}{18}\pi)\right] \\ z_3 &= \sqrt[3]{4}\left[\cos(\frac{29}{18}\pi) + i\sin(\frac{29}{18}\pi)\right] \end{aligned}$$

La rappresentazione delle radici nel piano complesso è:



4 vedi compito A.

Analisi Matematica Ia - II Test di verifica
Compito D

1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{|x^2 - 1|}$$

studiarla e tracciarne il grafico (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

2) Dati gli insiemi definiti rispettivamente da $A = \{z : |z - 1| < 3\}$ e $B = \{|z - 2i| > 2\}$ determinare, anche geometricamente, $A \cup B$.

3) Calcolare le radici di $(-16i)^{1/4}$ e collocarle nel piano complesso.

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{ax}{(ax^2 + 1)(x + ab)}\, dx.$$

---

1 La funzione f è dispari e il suo campo di esistenza è $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e il segno della funzione f è dato dal segno di x. Risulta:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} & |x| > 1 \\ \dfrac{x^3}{1 - x^2} & |x| < 1. \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quindi non ci sono asintoti orizzontali.

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to (1)^-} f(x) = \lim_{x \to (1)^+} f(x) = +\infty,$$

quindi $x = \pm 1$ sono asintoti verticali. Ricerchiamo gli eventuali asintoti obliqui. La funzione $f(x)/x$ diventa pari e dunque

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = 0.$$

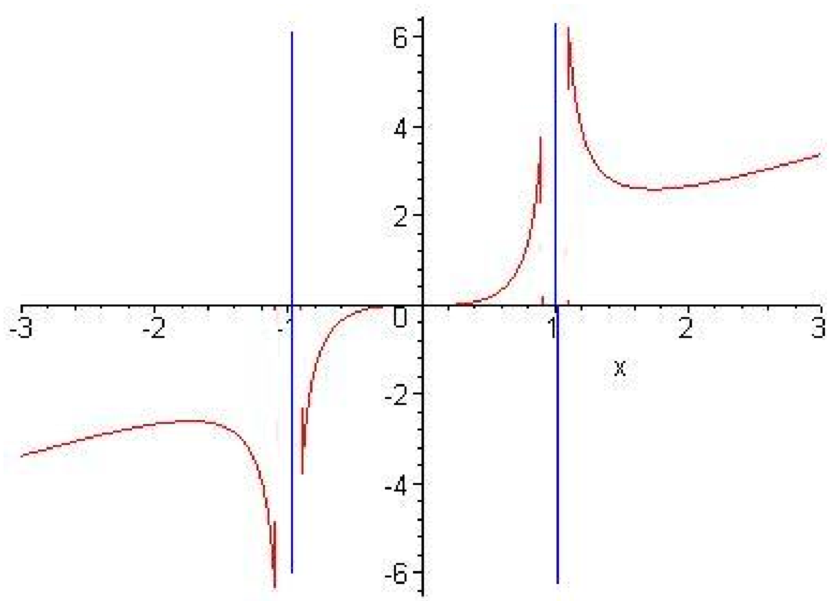
Quindi $y = x$ è un asintoto obliquo per x che tende a $\pm\infty$.

Il calcolo della derivata prima fornisce

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}, & |x| > 1 \\ \dfrac{x^2(3-x^2)}{(x^2-1)^2}, & |x| < 1 \end{cases}$$

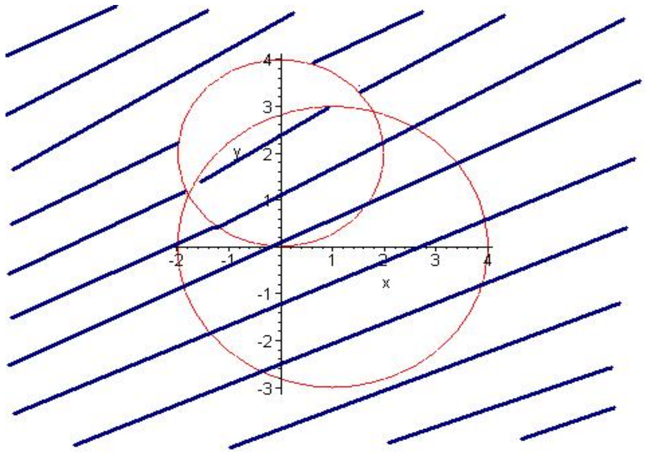
$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2(x^2-3) \geq 0 & |x| > 1 \\ x^2(x^2-3) \leq 0 & |x| < 1 \end{cases}$$

e dunque $f'(x) > 0$ per $x \in]-\infty, -\sqrt{3}[,\ x \in]-1, 0[,\ x \in]0, 1[,\ x \in]\sqrt{3}, +\infty[$; quindi $x = -\sqrt{3}$ è un punto di massimo locale e $x = \sqrt{3}$ è un punto di minimo locale. Il grafico della funzione f è il seguente:



2 L'insieme A è costituito dai numeri complessi z per i quali $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} < 3$ e dunque dai punti del piano complesso interni alla circonferenza $(x-1)^2 + y^2 = 9$.

I punti di B invece saranno esterni alla circonferenza $x^2 + (y-2)^2 = 4$ e dunque l'insieme $A \cap B$ è rappresentato geometricamente da:



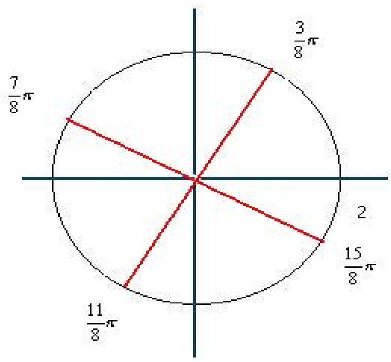
3 Rappresentiamo innanzitutto il numero $z = -16i$ in funzione di modulo r e argomento x. Risulta

$$z = 16\left[\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi)\right].$$

Le 4 radici quarte di z saranno date pertanto da:

$$\begin{aligned}
z &= 2\left[\cos(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{4})\right] \qquad k = 0, 1, 2. \\
z_1 &= 2\left[\cos(\frac{3}{8}\pi) + i\sin(\frac{3}{8}\pi)\right] \\
z_2 &= 2\left[\cos(\frac{7}{8}\pi) + i\sin(\frac{7}{8}\pi)\right] \\
z_3 &= 2\left[\cos(\frac{11}{8}\pi) + i\sin(\frac{11}{8}\pi)\right] \\
z_4 &= 2\left[\cos(\frac{15}{8}\pi) + i\sin(\frac{15}{8}\pi)\right]
\end{aligned}$$

La rappresentazione delle radici nel campo complesso è



4 vedi compito A.