Utilizziamo la definizione di limite per provare che

$$\lim_{x \to 1} x^2 - x + 1 = 1.$$

Applicando la definizione bisogna provare che:

$\forall \varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in I\!R$ con $x \neq 1$ e $|x - 1| < \delta(\varepsilon)$

risulta

$$-\varepsilon \leq x^2 - x \leq +\varepsilon.$$

Senza perdita di generalità supponiamo $\varepsilon < 1/4$.

$$\begin{cases} x^2 - x - \varepsilon \leq 0 \\ \\ x^2 - x + \varepsilon \geq 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon}) \leq x \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}) \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}) \leq x \text{ oppure } x \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}) \end{cases}$$

Basta allora prendere $\delta(\varepsilon) = \min\{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}) - 1, 1 - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon})\}$.