I appello - 15 Dicembre 2003

I.1) Studiare la funzione $f(x) = \log|x| - \dfrac{x^2-1}{2x}$. Disegnarne il grafico qualitativo e calcolare l'area della porzione di piano compresa tra l'asse delle x, il grafico di f e le due rette $x = 1$, $x = e$.

I.2) Studiare, per $x \geq 0$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2+3x+2}{2x+3} \right)^{n+3} \frac{n \log n}{2n+7}$$

I.3) Calcolare

$$\log_e(-4+4i)^{\frac{1}{5}}.$$

I.1) La funzione è definita in tutti i punti tranne che nell'origine. Inoltre in $x = \pm 1$ la funzione si annulla e dunque taglia l'asse delle x. Determiniamo gli evenutali asintoti della funzione:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log x - \frac{x^2-1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\log x - x^2 + 1}{2x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \log(-x) - \frac{x^2-1}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x\log(-x) - x^2 + 1}{2x} = -\infty$$

poiché $\lim_{x\to 0} 2x \log|x| = 0$. L'asse delle y è dunque un asintoto verticale.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x\log x - x^2 + 1}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2+1}{2x} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x\log(-x) - x^2 + 1}{2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^2+1}{2x} = -\infty$$

perché nel calcolo del limite possiamo togliere gli infiniti di ordine inferiore. Non ci sono dunque asintoti orizzontali. Cerchiamo ora gli asintoti obliqui

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\log x-x^2+1}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+1}{2x^2}=-\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\frac{1}{2}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\log x-x^2+1+x^2}{2x}=+\infty.$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x\log(-x)-x^2+1}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+1}{2x^2}=-\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to-\infty}f(x)+\frac{1}{2}x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x\log(-x)-x^2+1+x^2}{2x}=+\infty$$

e dunque non ci sono neanche asintoti obliqui. Studiamo ora la derivabilità della funzione:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{4x^2-2(x^2-1)}{4x^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2+1}{2x^2} & x>0\\[2ex] -\dfrac{1}{x}(-1)-\dfrac{x^2+1}{2x^2} & x<0\end{cases}$$

e dunque, per ogni $x\neq 0$,

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{x^2+1}{2x^2}=-\frac{(x-1)^2}{2x^2}.$$

La derivata pertanto, nel suo campo di definizione è sempre negativa e si annulla in $x=1$. Siccome in un intorno del punto $x=1$ la derivata non cambia di segno non possiamo dire nulla sul comportamento di f in $x=1$. La funzione è decrescente per $x<0$ e non crescente $x>0$. Studiamo la derivata seconda di f per $x\neq 0$

$$f''(x)=-\frac{2(x-1)2x^2-4x(x-1)^2}{4x^4}=\frac{1-x}{x^3}$$

e dunque il segno della derivata seconda è positivo se $0<x<1$, negativo se $x<0$ oppure $x>1$ e quindi $x=1$ è un punto di flesso per f, la funzione è concava per $x<0$ oppure $x>1$, convessa se $0<x<1$. Il grafico della funzione è il seguente:

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned}\int_1^e \log x - \frac{x^2-1}{2x}\,dx &= \int_1^e (x)'\log x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\,dx = \\ &= [x\log x]_1^e - \int_1^e dx + \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\log x\right]_1^e = \\ &= e-(e-1) - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(7-e^2)\end{aligned}$$

L'area cercata vale

$$A = \frac{1}{4}(e^2-7).$$

I.2) La serie è banalmente a termini positivi. Lo studio della convergenza, mediante il criterio del rapporto, fornisce

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+7)}{n(2n+9)}\cdot\frac{\log(n+1)}{\log n}\cdot\frac{x^2+3x+2}{2x+3} = \frac{x^2+3x+2}{2x+3}$$

Pertanto la serie converge in

$$\left\{x\geq 0 : \frac{x^2+3x+2}{2x+3} < 1\right\} = \left[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[.$$

e diverge in $\left\{x\geq 0 : \dfrac{x^2+3x+2}{2x+3} > 1\right\} = \left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[.$

Infine, per $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, il Criterio del rapporto non fornisce alcuna informazione. Tuttavia, se $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\log n}{2n+7}$ diverge in quanto

$$\lim \frac{n\log n}{2n+7} = +\infty.$$

I.3) Calcoliamo innanzitutto il numero $z^{1/5} = (-4+4i)^{1/5}$. Risulta

$$r = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}\ \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e dunque

$$z = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

Le cinque soluzioni della radice quinta di z sono date da:

$$\begin{aligned}
w &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{5}\right), \qquad k = 0,1,2,3,4 \\
w_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{20}\pi + i\sin\frac{3}{20}\pi\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{20}\pi} \\
w_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{20}\pi + i\sin\frac{11}{20}\pi\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{11}{20}\pi} \\
w_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{19}{20}\pi + i\sin\frac{19}{20}\pi\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{19}{20}\pi} \\
w_4 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{27}{20}\pi + i\sin\frac{27}{20}\pi\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{27}{20}\pi} \\
w_5 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{35}{20}\pi + i\sin\frac{35}{20}\pi\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{35}{20}\pi}
\end{aligned}$$

e dunque le infinite soluzioni del logaritmo sono date da:

$$\begin{aligned}
\log_e w_1 &= \log_e \sqrt{2}e^{i\frac{3}{20}\pi} = \log_e\sqrt{2} + i\pi\left(\frac{3}{20} + 2k\right) \\
\log_e w_2 &= \log_e \sqrt{2}e^{i\frac{11}{20}\pi} = \log_e\sqrt{2} + i\pi\left(\frac{11}{20} + 2k\right) \\
\log_e w_3 &= \log_e \sqrt{2}e^{i\frac{19}{20}\pi} = \log_e\sqrt{2} + i\pi\left(\frac{19}{20} + 2k\right) \\
\log_e w_4 &= \log_e \sqrt{2}e^{i\frac{27}{20}\pi} = \log_e\sqrt{2} + i\pi\left(\frac{27}{20} + 2k\right) \\
\log_e w_5 &= \log_e \sqrt{2}e^{i\frac{35}{20}\pi} = \log_e\sqrt{2} + i\pi\left(\frac{35}{20} + 2k\right)
\end{aligned}$$

Calcoliamo ora $\frac{1}{5}\log_e z = \frac{1}{5}\log_e(\sqrt{32}e^{i\frac{3}{4}\pi})$. Otteniamo

$$v = \frac{1}{5}\left[\log_e\sqrt{32} + i\pi\left(\frac{3}{4} + 2k\right)\right] = \log_e\sqrt{2} + i\frac{\pi}{5}\left(\frac{3}{4} + 2k\right).$$

Se k è un multiplo di 5 riotteniamo le soluzioni di $\log_e w_1$ e analogamente, se il resto della divisione tra k e 5 è j, otteniamo le soluzioni di $\log_e w_{j+1}$ per $j = 1,2,3,4$.

II appello - 8 Gennaio 2004

II.1) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n} \left(\frac{|x|}{x^2+1} \right)^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

II.2) Sia $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{e^{2+\arctan x}}{1+x^2}.$$

Calcolare la sua funzione integrale e tracciarne un grafico approssimativo.

II.3) Risolvere l'equazione

$$|z|^4 + iz^2 + \overline{z}^2 + i = 0$$

e rappresentare le soluzioni nel piano complesso

Svolgimento

II.1) Si tratta di una serie a termini non negativi e dunque può convergere o divergere. Se $x = 0$ tutti i termini della serie sono nulli e dunque la somma della serie è 0. Se invece $x \neq 0$ possiamo applicare il criterio del rapporto ed ottenere:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^3 + (n+1)} \left(\frac{|x|}{x^2+1} \right)^{n+1} (n^3+n) \left(\frac{x^2+1}{|x|} \right)^n = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{(n+1)^3+(n+1)} \left(\frac{|x|}{x^2+1} \right) = \frac{|x|}{x^2+1} \end{aligned}$$

Se $|x| \leq 1$ allora $|x| \leq 1 \leq x^2 + 1$; mentre se $|x| > 1$ allora $x^2 + 1 > x^2 \geq |x|$. In ogni caso, dunque, la frazione individuata attraverso il criterio del rapporto è un numero minore strettamente di 1. Ne segue che la serie data converge qualunque sia $x \in \mathbb{R}$.

II.2) la funzione f è una funzione continua e dunque integrabile. La sua funzione integrale è data da:

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{2+\arctan t}}{1+t^2} dt.$$

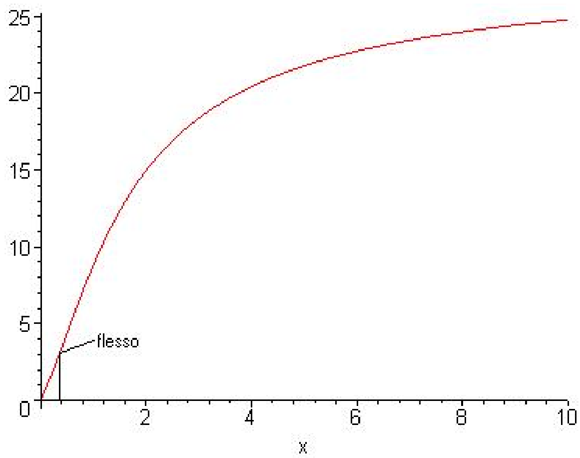
Possiamo inoltre dire che la funzione F è non negativa perchè la f è positiva. Siccome la funzione integranda è continua la funzione integrale è una sua primitiva; cioè $F'(x) = f(x) > 0$ e questo ci dice che la F è crescente. Calcoliamo ora la derivata seconda di F.

$$\begin{aligned} F''(x) &= f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} e^{2+\arctan x} + e^{2+\arctan x} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{e^{2+\arctan x}}{(1+x^2)^2} (1-2x) . \end{aligned}$$

La F è definita in $[0, 10]$ e dunque nel suo dominio F è convessa se $F''(x) > 0$, concava se $F''(x) < 0$. Abbiamo dunque un flesso per $x = 1/2$, la F è convessa per $x < 1/2$, concava altrove. Possiamo calcolare anche l'espressione della F calcolando l'integrale precedente per sostituzione:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{e^{2+\arctan t}}{1+t^2} dt = \int_2^{2+\arctan x} e^y dy = \\ &= e^{2+\arctan x} - e^2. \end{aligned}$$

Il grafico della funzione F è il seguente:



II.3) Dobbiamo trovare le soluzioni della equazione:

$$|z|^4 + iz^2 + \overline{z}^2 + i = 0.$$

Osserviamo innazitutto che, se $z = x + iy$, allora $z\overline{z} = x^2 + y^2$ e dunque

$$|z|^4 + iz^2 + \overline{z}^2 + i = z^2\overline{z}^2 + iz^2 + \overline{z}^2 + i =$$

$$z^2(\overline{z}^2 + i) + \overline{z}^2 + i = (\overline{z}^2 + i)(z^2 + 1) = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione dunque vanno cercate tra le soluzioni di $z^2 + 1 = 0$ e $\overline{z}^2 + i = 0$. Per quanto riguarda la prima equazione

$$0 \quad = \quad z^2 + 1 = x^2 - y^2 + 1 + 2ixy.$$

Siccome si devono annullare sia la parte reale che quella immaginaria otteniamo che:

- se $x = 0$ allora $y = \pm 1$;
- se $y = 0$ allora la parte reale non si annulla e dunque non soddisfa alla equazione.

Studiamo ora

$$0 \quad = \quad \overline{z}^2 + i = x^2 - y^2 - 2xyi + i = x^2 - y^2 + i(1 - 2xy).$$

Anche in questo caso si devono annullare sia la parte reale che la parte immaginaria. La parte reale si annulla solo lungo le rette $y = \pm x$, se andiamo a sostituire questi valori nella parte immaginaria otteniamo che: per $y = -x$ non ci sono soluzioni, mentre se $x = y$ le soluzioni sono $x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Riepilogando le soluzioni dell'equazione sono: $(0, \pm 1)$, $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

III appello - 24 Marzo 2004

III.1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ e disegnarne il grafico.

III.2) Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2n^2+1}.$$

III.3) Calcolare

$$\int_{-2}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$$

III.4) Risolvere l'equazione $z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$.

Svolgimento

III.1) Il campo di esistenza della funzione è $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Inoltre $f(0) = 1$, $f(x) > 0$ per $x > -1$, $f(x) < 0$ per $x < -1$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \\
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{asintoto orizzontale}, \\
&\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \\
&\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \qquad \text{asintoto verticale}, \\
&\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty.
\end{aligned}$$

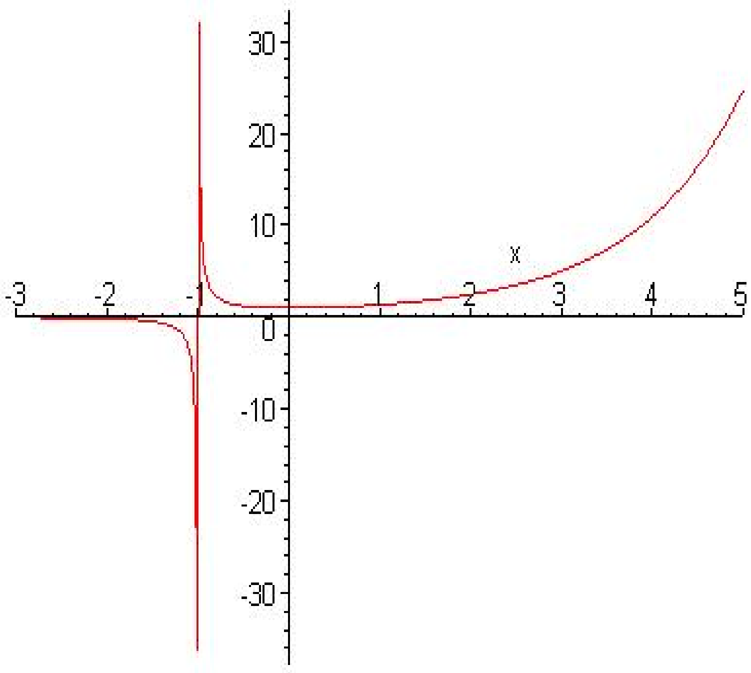
Se $x \neq -1$ allora

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

Risulterà $f'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$ & $x \neq -1$. Dunque per $x > 0$ la funzione è crescente, per $-1 < x < 0$ e per $x < -1$ la funzione sarà decrescente. In $x = 0$ la funzione ha un minimo relativo. Studiamo ora la derivata seconda sempre per $x \neq -1$.

$$f''(x) = \frac{(e^x + xe^x)(x+1)^2 - 2xe^x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}.$$

Dunque f è convessa per $x > -1$, concava altrove. Il grafico qualitativo della funzione è il seguente:



III.2) Studiamo con il criterio del rapporto la serie dei valori assoluti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x+3|^{n+1}}{2(n+1)^2+1} \frac{2n^2+1}{|x+3|^n} = |x+3|.$$

La serie converge assolutamente se $|x+3| < 1$, cioè $-4 < x < -2$. Se $x = -2$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+1}$$

e dunque converge assolutamente; lo stesso discorso vale per $x = -4$ anche se il numeratore della serie diventa $(-1)^n$.

Se $x > -2$ la serie è a termini positivi e dunque coincide con la serie dei valori assoluti; per il criterio del rapporto allora diverge a $+\infty$.

Se $x < -4$ la serie diventa a segni alterni. Proviamo che è indeterminata. Scriviamola nella forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{|x+3|^n}{2n^2+1}$$

e dimostriamo che definitivamente

$$\frac{|x+3|^n}{2n^2+1} \leq \frac{|x+3|^{n+1}}{2(n+1)^2+1}.$$

Se semplifichiamo la disuguaglianza otteniamo

$$\frac{2(n+1)^2+1}{2n^2+1} \leq |x+3|.$$

Siccome $x < -4$, $|x+3| > 1$ e dunque la precedente disuguaglianza è sicuramente verificata da un certo n in poi (basta applicare la definizione di limite al primo membro e scegliere $\varepsilon = |x+3| - 1$.

III.3) Risolviamo l'integrale per sostituzione utlizzando il cambiamento di variabili: $e^x = y,\ e^x dx = dy$. In tal caso se $x = -2, y = e^{-2},\ x = -1, y = e^{-1}$.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx &= \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \\ &= [\arcsin y]_{e^{-2}}^{e^{-1}} = \arcsin(e^{-1}) - \arcsin(e^{-1}).\end{aligned}$$

III.4) Risolviamola come semplice equazione di secondo grado

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4(5-i)}}{2} = \frac{3-2i \pm \sqrt{-15-8i}}{2} = \\ &= \frac{3-2i \pm \sqrt{(1-4i)^2}}{2} = \begin{cases} z = 2-3i \\ z = 1+i \end{cases}\end{aligned}$$

IV appello - 12 Luglio 2004

Risolvere gli esercizi motivando tutte le risposte.

IV.1) Trovare i punti della ellisse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

per cui sia minima la distanza dal punto di coordinate $(a, 0)$. Discutere le soluzioni al variare del parametro a.

IV.2) Si provi che la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(\ln n)}$$

converge e si stimi quandi addendi occorre sommare per ottenere la somma della serie con un errore inferiore a 0,1.

IV.3)
- Dati $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = -2 + 4i$ calcolare il valore dell'espressione

$$\left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i} \right| ;$$

- scrivere in forma trigonometrica il numero complesso $z = 2 + i$.

Svolgimento

IV.1) Supponiamo che il parametro a sia positivo, quelli negativi si trattano in maniera analoga. Siano (x, y) le coordinate del punto P, allora $y^2 = 1 - \frac{1}{4}x^2$. Se con A indico il punto di coordinate $(a, 0)$ allora

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 1 - \frac{1}{4}x^2}.$$

Minimizzare questa funzione è equivalente a minimizzare il suo quadrato e dunque studiamo la funzione $f(x) = (x-a)^2 + 1 - \frac{1}{4}x^2$, quando $|x| \leq 2$ perché il punto deve stare sulla ellisse.

Risulta

$$f'(x) = \frac{3}{2}x - 2a \geq 0 \iff x \geq \frac{4}{3}a \;\;\&\;\; |x| \leq 2.$$

Risulta $\dfrac{4}{3}a < 2$ se e solo se $a \leq \dfrac{3}{2}$.
Dunque se $a \leq \dfrac{3}{2}$ il punto P cercato ha coordinate $P = (\dfrac{4}{3}a, 1 - \dfrac{1}{4}(\dfrac{4}{3}a)^2)$. In particolare se $a = \dfrac{3}{2}$ il punto P cercato è il punto (2,0).
Se invece $a > \dfrac{3}{2}$ allora è evidente (dal grafico, e da semplici considerazioni geometriche) che il punto P più vicino ad A è ancora il punto $P = (2, 0)$.

IV.2) Siccome $n \geq 3 > e$ allora $\ln n > 1$ e dunque $\ln(\ln n) > 0$. La serie data è allora a segni alterni. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)} = 0.$$

Resta da provare che $a_n = \frac{1}{\ln(\ln n)}$ è monotona non crescente. Sappiamo che il logaritmo naturale è una funzione monotona crescente, dunque $\ln n < \ln(n+1)$ e, applicando di nuovo il logaritmo $\ln(\ln n) < \ln(\ln(n+1))$. Passando ai reciproci si ottiene che la successione $(a_n)_n$ è monotona decrescente. Per il criterio di Leibnitz la serie data converge (solo semplicemente) e l'errore R_n che si commette sostituendo la somma con la somma parziale n-esima è inferiore a a_{n+1}. Basta allora studiare la disequazione

$a_{n+1} < 0,1$.

$$a_{n+1} < 0,1 \iff \ln(ln(n+1)) > 10 \iff \ln(n+1) > e^{10}$$
$$\iff n+1 > e^{e^{10}}$$

IV.3) Calcoliamo il numeratore ed il denominatore dell'espressione e poi facciamone il rapporto e la norma

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 + 1 &= 1 - i - 2 + 4i + 1 = 3i \\
z_1 - z_2 + i &= 1 - i + 2 - 4i + i = 3 - 4i \\
\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i} &= \frac{3i}{3-4i} = \frac{3i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \\
&= \frac{9i - 12}{25} \\
\left|\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right| &= \frac{1}{25}\sqrt{81+144} = \frac{1}{25}\sqrt{225} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Il numero $2+i$ ha norma $r = \sqrt{5}$ e angolo $t \in [0, \pi/2]$ perché sia la parte reale che quella immaginaria sono positive. Inoltre

$$\cos t = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin t = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{dunque} \quad \tan t = \frac{1}{2}.$$

La rappresentazione del numero complesso $2+i$ è

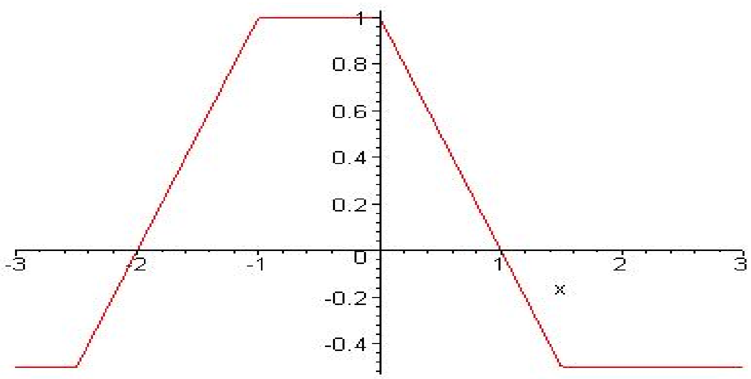
$$2 + i = \sqrt{5} e^{i \ \arctan(1/2)}.$$

V appello - 9 Settembre 2004

Risolvere gli esercizi motivando tutte le risposte.

V.1) Trovare un polinomio di terzo grado $P(x)$ tale che $P(0) = P(1) = 0$, $P'(1) = 1$ e $\int_0^1 P(x)dx = 1$.

V.2) Si consideri la funzione $y = f(x)$ il cui grafico è riportato nella figura. Si disegnino i grafici di $y = f(|x|)$, $f(x) + f(-x)$.



V.3) Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

è convergente.

Svolgimento

V.1) Sia $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; la sua derivata vale $P'(x) = 3x^2 + 2bx + c$, mentre $\int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c + d$.

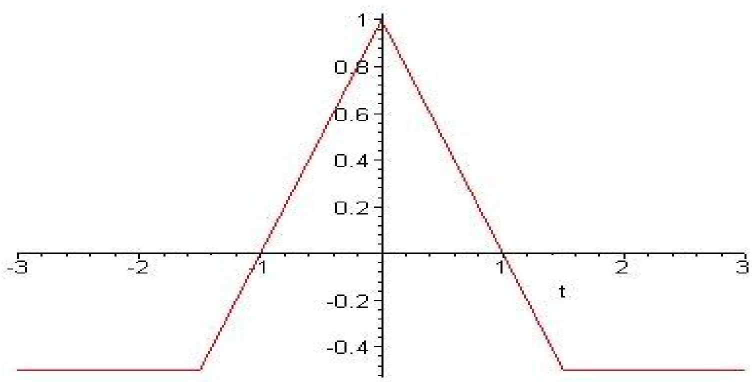
Le condizioni imposte danno luogo al seguente sistema

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ 3a + 2b + c = 1 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c + d = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 14 \\ b = -27 \\ c = 13 \\ d = 0. \end{cases}$$

V.2) Per prima cosa osserviamo che la legge di f è facilmente deducibile dal grafico:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 \le x \le 3/2 \\ -1/2 & x > 3/2 \text{ oppure } x < -5/2 \\ 1 & -1 \le x < 0 \\ x + 2 & -5/2 \le x < -1. \end{cases}$$

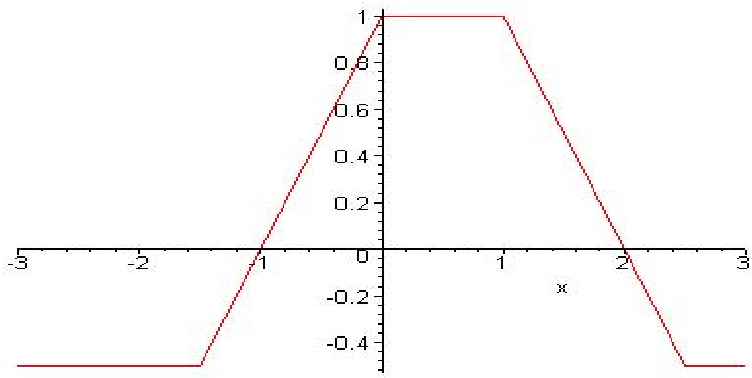
Consideriamo la funzione g che associa $x \mapsto f(|x|)$. Tale funzione è pari e dunque il suo grafico saraà simmetrico rispetto all'asse delle y e coinciderà con quello di f nel semipiano delle x positive.



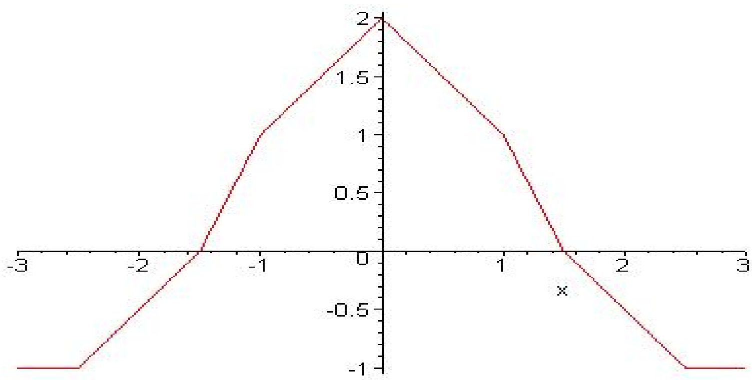
La funzione che associa ad $x \mapsto f(-x)$ si ottiene invece ribaltando il grafico di f

rispetto all'asse delle y. Pertanto la sua legge sarà:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & -3/2 \leq x < 0 \\ -1/2 & x > 5/2 \text{ oppure } \; x < -3/2 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ -x+2 & 1 \leq x < 5/2. \end{cases}$$



Se sommiamo $f(x) + f(-x)$ otteniamo



V.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Peranto la serie data converge ma non assolutamente (diventa in questo caso la serie armonica).

VI appello - 23 Settembre 2004

VI.1) Definiamo $f(x) = \sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Dire se questa funzione è invertibile e disegnare il grafico della funzione inversa.

VI.2) Calcolare i massimi ed i minimi assoluti della funzione $g(x) = 2 + |x^2 - 4x|$ quando $x \in [-2, 6]$.

VI.3) Calcolare le radici quarte di -4.

Svolgimento

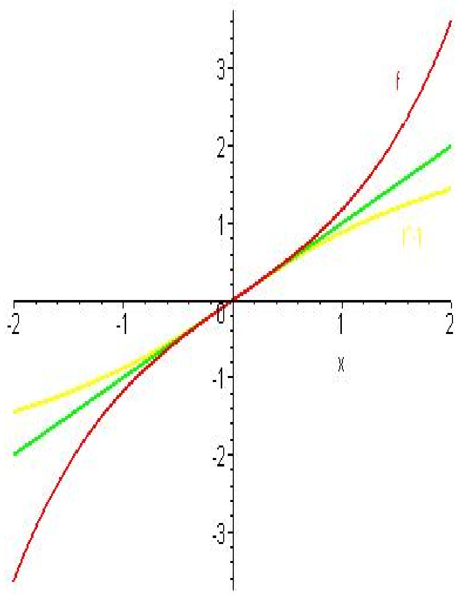
VI.1) Intanto $\sinh(0) = 0$, mentre se $x \neq 0$ il numeratore asume il segno di x. La funzione è derivabile e la sua derivata vale:

$$(\sinh(x))' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dunque la funzione è strettamente crescente e quindi iniettiva. Proviamone ora la suriettività.

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \\ & e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \longleftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}. \end{aligned}$$

La soluzione $e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$ va scartata perché il secondo membro è negativo. Dunque rimane $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, cioè $x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$ che è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è esattamente la legge della funzione inversa. Piuttosto che studiare la legge inversa disegniamo il grafico del seno iperbolico e poi simmetrizziamo rispetto alla bisettrice del I e III quadrante. Abbiamo già studiato il segno di f e della sua derivata prima, inoltre $f'(0) = 1$. (Questo ci dice che la tangente al grafico nell'origine è la bisettrice del primoe terzo quadrante. Studiamo ora la derivata seconda: $f''(x) = \sinh(x)$ e dunque la funzione è convessa per $x > 0$, concava per $x < 0$ e presenta un flesso nell'origine. Abbiamo ora tutti gli strumenti per disegnare i grafici di f e f^{-1}.

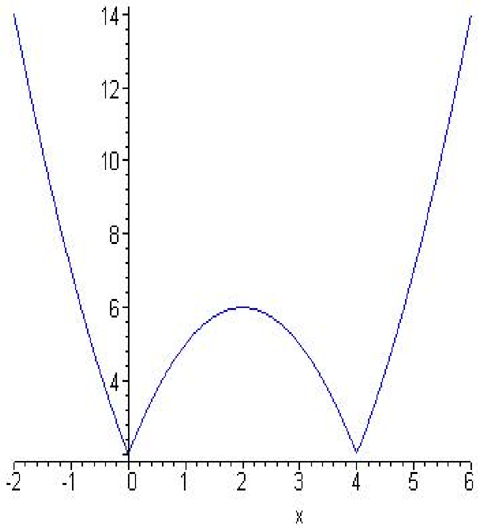


VI.2) La funzione g è continua in un compatto e dunque assume massimi e minimi assoluti per il teorema di Weierstrass. Osserviamo poi che se $x = 0$ oppure $x = 4$ l'addendo in valore assoluto si annulla e dunque il tali punti la funzione g assume il minimo assoluto che vale 2. Inoltre $g(-2) = g(6) = 14$.

Per calcolare i massimi assoluti invece studiamo la derivata prima della funzione nell'aperto $]-2, 6[\setminus\{0, 4\}$. Risulta

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x \in]-2, 0[\cup]4, 6[\\ 4 - 2x & x \in]0, 4[. \end{cases}$$

L'unico punto in cui la derivata prima si annulla, ed è quindi un candidato per essere un massimo o un minimo relativo, è il punto $x = 2$; in tale punto $g(x) = 6$ e dunque il massimo assoluto della funzione è raggiunto agli estremi dell'intervallo della definizione, come si può anche vedere dal grafico di g:



VI.3) Innanzitutto $r = 4$ e $t = \pi$ perché si tratta di un numero reale negativo. Dovrà allora risultare

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{-4} &= 4^{1/4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\\
z_1 &= \sqrt{2}\,(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) = \sqrt{2}(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2) = 1+i\\
z_2 &= \sqrt{2}\,(\cos 3\pi/4 + i\sin 3\pi/4) = -1+i\\
z_3 &= \sqrt{2}\,(\cos 5\pi/4 + i\sin 5\pi/4) = -1-i\\
z_4 &= \sqrt{2}\,(\cos 7\pi/4 + i\sin 7\pi/4) = 1-i
\end{aligned}$$