2) *Sia data la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 + x - 2\cos x}{x}, & x > 0,\ x \notin A \\ 1, & x \in A \\ x + \cos x\sqrt{x^2+1}, & x < 0 \end{cases}$$

dove $A = \left\{ \frac{n-1}{n^2},\ n \in I\!N^+ \right\}$.

Esaminare i punti di continuità di f *e classificare le eventuali discontinuità.*

Svolgimento

Risulta $A' = \{0\}$. Esaminiamo il punto $x_0 = 0$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f_{|_A} = 1 = f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^+} f_{|_{A^c}}(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2 + x - 2\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 + 2x\,\frac{1-\cos x}{x^2} = 1 = f(0),$$

essendo $(1-\cos x)$ di ordine due rispetto ad x per $x \to 0^+$. Quindi f risulta continua a destra in $x_0 = 0$.
Poiché $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x + \cos x\sqrt{1+x^2} = 1 = f(0)$, allora f risulta continua in $x_0 = 0$.

Studiamo ora i punti del tipo $x_0 = \frac{n-1}{n}$, con $x_0 > 0$.

Risulta $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \dfrac{2 + x_0 - 2\cos x_0}{x_0} \neq f(x_0) = 1$; infatti

$$\frac{2 + x_0 - 2\cos x_0}{x_0} = 1 \Leftrightarrow 2 + x_0 - 2\cos x_0 = x_0 \Leftrightarrow 2(1-\cos x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 2k\pi,$$

che non è vera perché, per $k = 0$, $x_0 = 0$ non è accettabile, essendo $x_0 > 0$ e se $k > 1$, $2k\pi \notin A$.

Quindi in x_0 la f ha una discontinuità di prima specie eliminabile. Negli altri punti la funzione risulta ovviamente continua.