Analisi Matematica I - Test di verifica
Compito A

Sia a = numero lettere del nome, b= numero delle lettere del cognome.

1) Utilizzando la definizione di limite provare che

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}=1.$$

2) Studiare la continuità della funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin^2 x & 0<x<1\\ 0 & x=0\\ |x|^\beta\cos^2(1/x) & -1<x<0\end{cases}$$

dove $\alpha=[(4-a)/2]$ e $\beta=[-1+b/4]$.

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2+x^4}.$$

4) Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}x^{2n+1}$$

al variare di $x\in\mathbb{R}$.

5) Studiare la funzione:

$$f(x)=\frac{x^2+a}{x^2-x+(-1)^a b}$$

e tracciarne il grafico.

6) Scrivere il numero 8 come somma di due numeri non negativi tali che la somma del quadrato del primo e il cubo del secondo sia minima. Risolvere il problema anche nel caso in cui la somma debba essere massima.

7) Svolgere il seguente integrale

$$\int\frac{x+b}{(ax^2+b)(x^2-a^2)}dx$$

8) Svolgere il seguente integrale

$$\int\frac{1}{x(\cos\log x)^2\tan\log x}dx.$$

1) Applicando la definizione di limite bisogna provare che:
$\forall\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ risulta $1-\varepsilon \leq \sqrt{x^2+1} \leq 1+\varepsilon$.
Osserviamo innanzitutto che la disequazione $1-\varepsilon \leq \sqrt{x^2+1}$ è sempre verificata, basta dunque studiare la disequazione $\sqrt{x^2+1} \leq 1+\varepsilon$.
Siccome la radice quadrata è sempre definita e $1+\varepsilon > 0$ allora la disequazione data è equivalente a:

$$x^2+1 \leq (1+\varepsilon)^2 = 1+\varepsilon^2+2\varepsilon \iff x^2 \leq \varepsilon^2+2\varepsilon \iff |x| \leq \sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}.$$

Basta allora prendere $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}$.
2) Studiamo la continuità di f al variare di α e β. L'unico punto che può dare problemi è $x = 0$, studiamo pertanto la continuità della f nell'origine.

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \sin^2 x = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+2}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+2} = \begin{cases} 0 & \alpha > -2 \\ 1 & \alpha = -2 \\ +\infty & \alpha < -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} |x|^\beta \cos^2(1/x) = \begin{cases} 0 & \beta > 0 \\ \nexists & \beta \geq 0 \end{cases}$$

Se infatti consideriamo $x_k = 1/k\pi$, $y_k = 1/(k\pi + \pi/2)$ con k intero negativo risulta, per $\beta < 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x_k\to 0^-} |x_k|^\beta \cos^2(1/x_k) &= \lim_{k\to-\infty} (1/|k|\pi)^\beta = \lim_{k\to-\infty} (|k|\pi)^{-\beta} = +\infty, \\ \lim_{y_k\to 0^-} |y_k|^\beta \cos^2(1/y_k) &= \lim_{k\to-\infty} 1/(|k\pi+\pi/2|)^\beta \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dunque nel caso $\beta < 0$ abbiamo determinato due restrizioni che ammettono 0^- come punto di accumulazione ed i cui limiti sono distinti. Se invece $\beta = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x_k\to 0^-} \cos^2(1/x_k) &= \lim_{k\to-\infty} 1 = 1, \\ \lim_{y_k\to 0^-} \cos^2(1/y_k) &= \lim_{k\to-\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

3) Applichiamo il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2+x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \\ &= 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

4) Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \frac{n}{n^3+1}x^{2n+1}$, consideriamo allora $|a_n| = \frac{n}{n^3+1}|x|^{2n+1}$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+1)^3+1}|x|^{2n+3} \cdot \frac{n^3+1}{n} \frac{1}{|x|^{2n+1}} = x^2$$

Dunque,

- se $x^2 < 1$, cioè $|x| < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x > 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;
- se $x < -1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge a $+\infty$, siccome $a_n = -|a_n|$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $-\infty$;
- se $x = \pm 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$, applicando il criterio del confronto asintotico e confrontandola con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ si ottiene che la serie data converge assolutamente.

5) Esamineremo i seguenti due casi: a pari, a dispari. Chiamiamo con f_p la funzione nel primo caso, con f_d quella del secondo caso. Studiamo il comportamento della funzione $f = f_p = \frac{x^2+a}{x^2-x+b}$. Il denominatore di f_p è x^2-x+b. Il determinante Δ di questa equazione vale $\Delta = 1 - 4b$. Siccome b è un intero maggiore di 1 il determinante risulta sempre negativo e dunque il denominatore assume sempre il segno del coefficiente di x^2 (positivo). Questo fatto ci dice inoltre che f_p è sempre non negativa. Dunque $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.
Oserviamo che sia il numeratore che il denominatore sono due infiniti di ordine 2 e quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$$

dunque la funzione ammette asintoti orizzontali a $\pm\infty$.
La funzione f_p, essendo definita su tutto $\mathbb{R}$ non ha asintoti verticali. Studiamo ora la crescenza e la decrescenza di f_p:

$$\begin{aligned} f_p'(x) &= -\frac{x^2 - 2x(b-a) - a}{(x^2 - x + b)^2} \\ f_p'(x) &\geq 0 \Longleftrightarrow x^2 - 2x(b-a) - a \leq 0 \Longleftrightarrow \\ & b - a - \sqrt{(b-a)^2 + a} \leq x \leq b - a + \sqrt{(b-a)^2 + a} \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f_p''(x) &= 2\frac{x^3-3x^2(b-a)-3ax+b^2+a-ab}{(x^2-x+b)^3} \\ f_p''(x) &\geq 0 \Longleftrightarrow x^3-3x^2(b-a)-3ax+b^2+a-ab \geq 0 \end{aligned}$$

Con queste informazioni e dando ad a, b valori particolari cerchiamo di disegnare alcune di queste funzioni: supponiamo ad esempio che $(a, b) = (8, 9)$. In questo caso f è definita su tutto $\mathbb{R}$, ha asintoti orizzontali, è non negativa. La sua derivata prima è

$$f'(x) = -\frac{x^2-2x-8}{(x^2-x+9)^2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 4.$$

Quindi f è crescente nell'intervallo $[-2, 4]$, altrove è decrescente, $x = -2$ è un punto di minimo, $x = 4$ è un punto di massimo. La sua derivata seconda è

$$f''(x) = 2\frac{x^3-3x^2-24x+17}{(x^2-x+9)^3} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3-3x^2-24x+17 \geq 0$$

Si tratta di studiare ora il segno del polinomio di terzo grado $g(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 17$. Sappiamo che tale polinomio può avere uno oppure tre zeri reali, per cercare di determinarli studiamo g'.

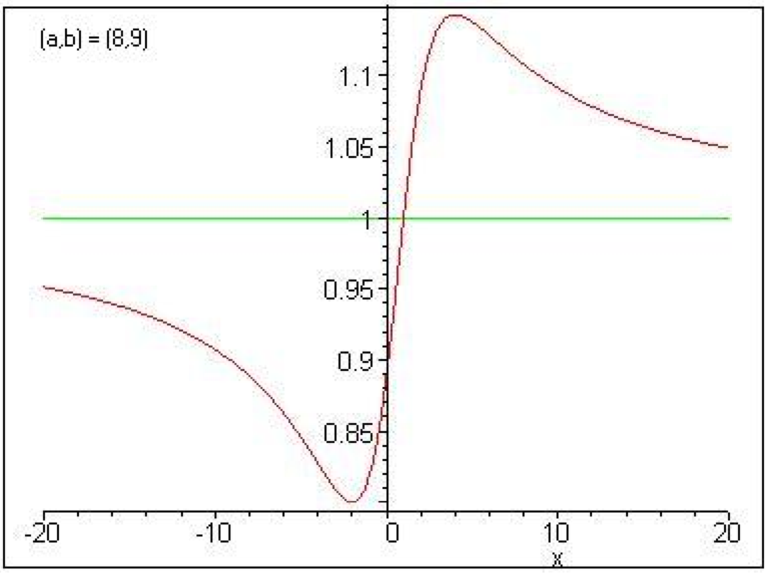
$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq -2 \ \cup \ x \geq 4.$$

Risulta

$$g(-2) > 0, \quad g(4) < 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

e dunque, per il teorema degli zeri, la funzione g ammette tre zeri reali, $x_1 < -2, x_2 \in]-2, 4[, x_3 > 4$.

Se $x < x_1$, oppure $x_2 < x < x_3$ la funzione f è concava, se $x_1 < x < x_2$ oppure $x > x_3$ la funzione f è convessa, i punti x_1, x_2, x_3 sono punti di flesso. A questo punto possiamo disegnare il grafico della funzione f:



Studiamo ora la funzione $f = f_d$. Il determinante del denominatore $x^2 - x - b$ è dato da $\Delta = 1 + 4b > 0$ e dunque la funzione non è definita nei punti $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4b})$.
Pertanto $f_d : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4b})\} \to \mathbb{R}$.
Studiamo il segno di f_d. La funzione è positiva in $]-\infty, \frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4b})[\cup]\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4b}), +\infty[$, negativa in $]\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4b}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4b})[$.
Oserviamo che sia il numeratore che il denominatore sono due infiniti di ordine 2 e quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$$

dunque la funzione ammette asintoti orizzontali a $\pm\infty$.
Studiamo anche la disequazione $f_d(x) \geq 1$ per capire quando il grafico della funzione si trova al di sopra dell'asintoto.

$$\frac{x^2+a}{x^2-x-b} \geq 1 \iff \frac{x^2+a-x^2+x+b}{x^2-x-b} = \frac{x+a+b}{x^2-x-b} \geq 0$$

Per quanto riguarda gli asintoti verticali:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4b})^\pm} f_d(x) = \mp\infty;$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4b})^\pm} f_d(x) = \pm\infty.$$

Studiamo ora la crescenza e la decrescenza di f_d:

$$\begin{aligned} f_d'(x) &= -\frac{x^2+2x(b+a)-a}{(x^2-x-b)^2} \\ f_d'(x) &\geq 0 \iff x^2+2x(b+a)-a \leq 0 \iff x \text{ appartiene al dominio di } f_d \text{ e} \\ &\quad -(b+a)-\sqrt{(b+a)^2+a} \leq x \leq -(b+a)+\sqrt{(b+a)^2+a} \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$f_d''(x) = 2\frac{x^3 + 3x^2(b+a) - 3ax + b^2 + a + ab}{(x^2 - x - b)^3}$$

Con queste informazioni e dando ad a, b valori particolari cerchiamo di disegnare alcune di queste funzioni: supponiamo ad esempio che $(a, b) = (7, 8)$.
In tal caso $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{33})\} \to \mathbb{R}$ è definita da:

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - x - 8}.$$

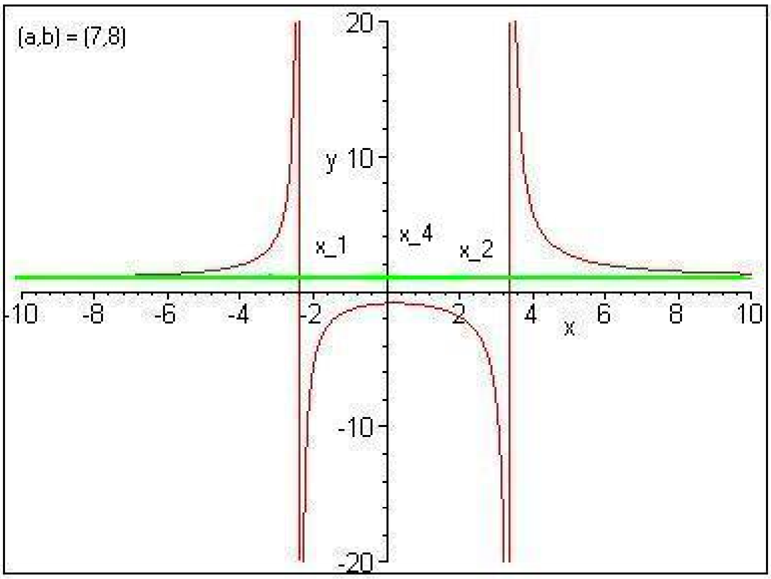
Chiamiamo con $x_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33}) \sim -2.37$, $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33}) \sim 3.37$.
f ammette asintoti verticali in x_1, x_2, ammette asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$. Rispetto all'asintoto orizzontale $y = 1$

$$\frac{x^2+7}{x^2-x-8} \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2+7-x^2+x+8}{x^2-x-8} = \frac{x+15}{x^2-x-b} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$-15 < x < x_1 \quad \cup \quad x > x_2$$

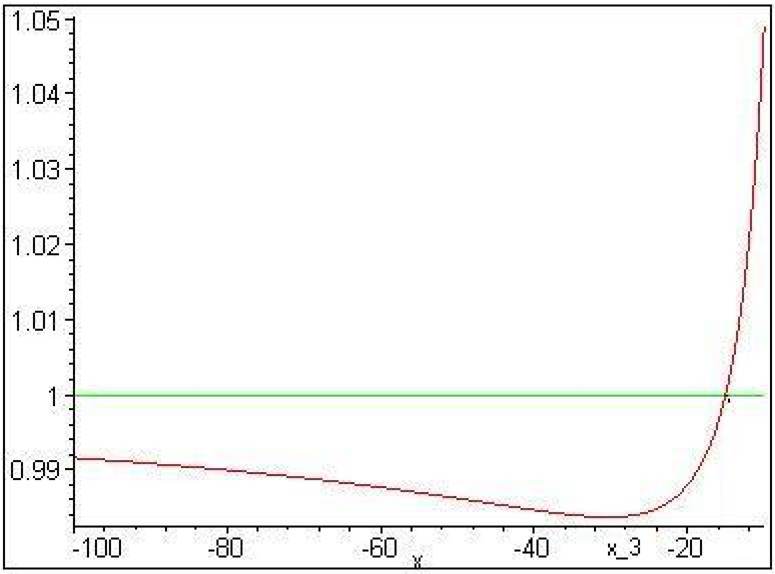
Inoltre

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 + 30x - 7}{(x^2 - x - 8)^2} \geq 0 \Longleftrightarrow x \text{ appartiene al dominio di } f_d \text{ e} \\ & \quad x_3 = -15 - \sqrt{232} \leq x \leq -15 + \sqrt{232} = x_4 \\ f''(x) &= 2\frac{x^3 + 45x^2 - 21x + 127}{(x^2 - x - 8)^3} \end{aligned}$$

Osserviamo che $x_3 \sim -30.23, x_4 \sim 0.23$ e dunque $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$. Quindi la funzione f risulta crescente se $x_3 < x < x_1$, oppure se $x_1 < x < x_4$; decrescente se $x < x_3$, oppure se $x_4 < x < x_2$, oppure se $x > x_2$; x_3 è un punto di minimo relativo, x_4 è un punto di massimo relativo.
Non studiamo il segno di f'' per non appesantire i calcoli e perchè la concavità e la convessità della funzione risultano evidenti già con le informazioni fin qui ottenute. Riportiamo ora il grafico della funzione f evidenziando in una seconda immagine il comportamento per $x < -15$, intervallo in cui la funzione si trova al di sotto dell'asintoto.



Ecco ora un ingrandimento della funzione per $x < -15$.



6) Si tratta di risolvere il seguente problema di massimo e di minimo

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + y = 8 \\ \min x^2 + y^3,\ \ \max x^2 + y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x = 8 - y \\ \min (8-y)^2 + y^3,\ \ \max (8-y)^2 + y^3. \end{cases}$$

Studiamo allora i massimi e minimi assoluti della funzione $g(y) = (8-y)^2 + y^3$, con il vincolo che $0 \leq y \leq 8$.

$$g'(y) = -2(8-y) + 3y^2 \geq 0 \iff x \leq -\frac{8}{3} \quad \cup \quad x \geq 2.$$

Dunque la funzione g è crescente per $2 < x \leq 8$, decrescente per $0 \leq x < 2$, ne risulta che il minimo assoluto è raggiunto per $y = 2$ (in tal caso $g(2) = 44$), mentre il massimo assoluto è il $\max\{g(0), g(8)\} = 512$.

7) L'integrale

$$\int \frac{x+b}{(ax^2+b)(x^2-a^2)}dx = \int \frac{x+b}{(ax^2+b)(x-a)(x+a)}dx$$

rientra nella classe degli integrali delle forme razionali. Si risolve utilizzaando la formula di Hermite

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x+b}{(ax^2+b)(x-a)(x+a)}dx = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} + \frac{Cx+D}{ax^2+b} \\
= &\ \frac{A(x+a)(ax^2+b) + B(x-a)(ax^2+b) + (Cx+D)(x^2-a^2)}{(x-a)(x+a)(ax^2+b)} \\
= &\ \frac{aAx^3 + bAx + a^2Ax^2 + abA + aBx^3 + bBx - a^2Bx^2 - abB + Cx^3 - a^2Cx + Dx^2 - a^2D}{(x-a)(x+a)(ax^2+b)} \\
= &\ \frac{(aA+aB+C)x^3 + (a^2A - a^2B + D)x^2 + (bA + bB - a^2C)x + abA - abB - a^2D}{(x-a)(x+a)(ax^2+b)}.
\end{aligned}$$

Per il principio di identitá dei polinomi possiamo scrivere

$$\begin{cases}
aA + aB + C = 0 \\
a^2A - a^2B + D = 0 \\
bA + bB - a^2C = 1 \\
abA - abB - a^2D = b.
\end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases}
C = -a(A+B) \\
D = a^2(B-A) \\
bA + bB + a^3A + a^3B = 1 \\
abA - abB - a^4(B-A) = b
\end{cases}
=
\begin{cases}
C = -a(A+B) \\
D = a^2(B-A) \\
A(b+a^3) + B(b+a^3) = 1 \\
ab(A-B) + a^4(A-B) = b
\end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -a(A+B) \\ \\ D = a^2(B-A) \\ \\ (b+a^3)(A+B) = 1 \\ \\ a(A-B)(b+a^3) = b \end{cases} = \begin{cases} C = -a(A+B) \\ \\ D = a^2(B-A) \\ \\ A = \frac{1}{b+a^3} - B \\ \\ a(\frac{1}{b+a^3} - 2B)(b+a^3) = b \end{cases}$$

Svolgendo i conti dell'ultima equazione si ottiene

$$a(\frac{1-2bB-2a^3B}{b+a^3})(b+a^3) = b \Leftrightarrow a - 2abB - 2a^4B = b \Leftrightarrow B = \frac{(b-a)}{-2a(b+a^3)}$$

da cui sostituendo nelle rimanenti si ha

$$A = \frac{1}{b+a^3} + \frac{(b-a)}{2a(b+a^3)} = \frac{a+b}{2a(b+a^3)}$$

$$C = -a(\frac{a+b}{2a(b+a^3)} - \frac{b-a}{2a(b+a^3)}) = \frac{-a}{b+a^3}$$
$$D = a^2(\frac{-(b-a)}{2a(b+a^3)} - \frac{a+b}{2a(b+a^3)}) = \frac{-ab}{b+a^3}.$$

Quindi risulta

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x+b}{(ax^2+b)(x^2-a^2)}dx \\
= & \int \frac{a+b}{2a(b+a^3)}\frac{1}{x-a} - \int \frac{(b-a)}{2a(b+a^3)}\frac{1}{x+a} + \int (\frac{-ax}{b+a^3} - \frac{ab}{b+a^3})\frac{1}{ax^2+b} \\
= & \frac{a+b}{2a(b+a^3)}\log|x-a| - \frac{(b-a)}{2a(b+a^3)}\log|x+a| - \frac{a}{b+a^3}\int \frac{x+b}{ax^2+b}dx \\
= & \frac{a+b}{2a(b+a^3)}\log|x-a| - \frac{(b-a)}{2a(b+a^3)}\log|x+a| - \frac{a}{b+a^3}\int \frac{x}{ax^2+b}dx \\
- & \frac{ab}{b+a^3}\int \frac{1}{ax^2+b}dx \\
= & \frac{a+b}{2a(b+a^3)}\log|x-a| - \frac{(b-a)}{2a(b+a^3)}\log|x+a| - \frac{1}{2(b+a^3)}\log|ax^2+b| \\
- & \frac{a}{2(b+a^3)}\int \frac{1}{1+(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}})^2}dx \\
= & \frac{a+b}{2a(b+a^3)}\log|x-a| - \frac{(b-a)}{2a(b+a^3)}\log|x+a| - \frac{1}{2(b+a^3)}\log|ax^2+b| \\
- & \frac{\sqrt{ab}}{b+a^3}\arctan(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}}) + C
\end{aligned}$$

8) Poniamo $\log x = t$ da cui $dx = e^t dt$.

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(\cos \log x)^2 \tan \log x} dx &= \int \frac{1}{e^t \cos^2 t \tan t} e^t dt \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 t \tan t} dt \\
&= \int \frac{(\tan t)'}{\tan t} dt \\
&= \log(\tan t) + C \\
&= \log(\tan \log x) + C.
\end{aligned}$$

Analisi Matematica I - Test di verifica
Compito B

Sia a = numero lettere del nome, b= numero delle lettere del cognome.

1) Utilizzando la definizione di limite provare che

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+1}+x=1.$$

2) Studiare la continuità della funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin^2 x & 0<x<1 \\ 0 & x=0 \\ |x|^\beta \cos^2(1/x) & -1<x<0 \end{cases}$$

dove $\alpha=[(4-a)/2]$ e $\beta=[-1+b/4]$.

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+x^7+2\tan x}{x+\tan^2 x}.$$

4) Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2} x^{2n+1}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

5) Studiare la funzione:

$$f(x)=\frac{x^2+a}{x^2-x+(-1)^a b}$$

e tracciarne il grafico.

6) Un triangolo di base b e altezza h ha gli angoli alla base acuti. Un rettangolo è iscritto nel triangolo con un lato sulla base del triangolo. Dimostrare che il rettangolo di area massima ha base $b/2$ e altezza $h/2$ e quindi la sua area è la metà di quella del triangolo.

7) Svolgere il seguente integrale

$$\int \frac{x+b}{(ax^2+b)(x^2-a^2)} dx$$

8) Svolgere il seguente integrale

$$\int \frac{1}{2x(\cos^2 \log x)\sqrt{\tan \log x}} dx.$$

---

1) Applicando la definizione di limite bisogna provare che:

$\forall \varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ con $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ risulta $1 - \varepsilon \leq \sqrt{x^2+1} + x \leq 1 + \varepsilon$.

Senza perdita di generalità, visto che $x \to 0$, possiamo considerare solo $x \in]-1/2, 1/2[$, ed $\varepsilon < 1/2$. In tal modo le quantità $1 + \varepsilon - x, 1 - \varepsilon - x$ risulteranno entrambe positive. Grazie a questo fatto il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} \leq 1 + \varepsilon - x \\ \sqrt{x^2+1} \geq 1 - \varepsilon - x \end{cases}$$

è equivalente a:

$$\begin{cases} x^2 + 1 \leq 1 + x^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon - 2x - 2\varepsilon x \\ x^2 + 1 \geq 1 + x^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon - 2x + 2\varepsilon x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1+\varepsilon) \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon \\ 2x(1-\varepsilon) \geq \varepsilon^2 - 2\varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq \frac{\varepsilon^2+2\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \\ x \geq \frac{\varepsilon^2-2\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \end{cases}$$

Osserviamo che $\frac{\varepsilon^2-2\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} < 0 < \frac{\varepsilon^2+2\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$. Basta allora scegliere

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon^2+2\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}, \frac{2\varepsilon-\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon)}\}.$$

2) Vedere il compito A.

3) Applichiamo il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + x^7 + 2\tan x}{x + \tan^2 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + 2\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x}{x} = \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

4) Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \frac{n^2+1}{n^3+2} x^{2n+1}$, consideriamo allora $|a_n| = \frac{n^2+1}{n^3+2} |x|^{2n+1}$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+2} |x|^{2n+3} \cdot \frac{n^3+2}{n^2+1} \frac{1}{|x|^{2n+1}} = x^2$$

Dunque,

- se $x^2 < 1$, cioè $|x| < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x > 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;

- se $x < -1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge a $+\infty$, siccome $a_n = -|a_n|$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $-\infty$;

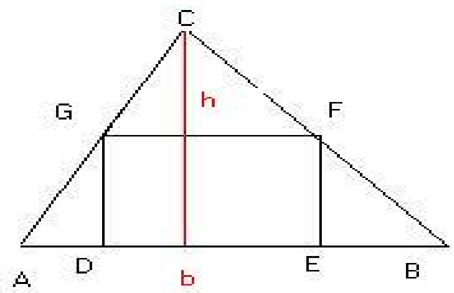
- se $x = \pm 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2}$. Applicando il criterio del confronto asintotico alla serie dei valori assoluti e utilizzando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ si ottiene che:

  - la serie data diverge a $+\infty$ se $x = 1$, infatti $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$,

  - la serie data diverge a $-\infty$ se $x = -1$, poiché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} -|a_n|$.

5) Vedere il compito A.

6) Disegnamo innanzitutto la figura del problema



e denotiamo con $x = \overline{AD} + \overline{EB}$. Risulta: $b : x = h : \overline{GD}$ dunque $\overline{GD} = x\frac{h}{b}$. Denotiamo con $f(x)$ la funzione area del rettangolo, $f(x) = (b-x)x\frac{h}{b}$.

$$f'(x) = h - 2x\frac{h}{b} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h(1 - \frac{2}{b}x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq \frac{b}{2}$$

Dunque la funzione area f è crescente tra $[0, \frac{b}{2}[$, decrescente se $]\frac{b}{2}, b]$. Il punto $x = \frac{b}{2}$ è un punto di massimo assoluto per la funzione, in tal caso $\overline{GD} = \frac{h}{2}$ e l'area massima è data da $\frac{bh}{4}$. **7)** Vedere il compito A.

8) Poniamo $\log x = t$ da cui $dx = e^t dt$.

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2x(\cos^2 \log x)\sqrt{\tan \log x}} dx &= \int \frac{1}{2e^t \sqrt{\tan t} \cos^2 t} e^t dt \\
&= \int \frac{1}{2\sqrt{\tan t} \cos^2 t} dt \\
&= \sqrt{\tan t} + C \\
&= \sqrt{\tan \log x} + C.
\end{aligned}$$

Analisi Matematica I - Test di verifica
Compito C

Sia a = numero lettere del nome, b= numero delle lettere del cognome.

1) Utilizzando la definizione di limite provare che

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2}+2=3.$$

2) Studiare la continuità della funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin^2 x & 0<x<1 \\ 0 & x=0 \\ |x|^\beta \cos^2(1/x) & -1<x<0 \end{cases}$$

dove $\alpha=[(4-a)/2]$ e $\beta=[-1+b/4]$.

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\tan^2 x+x^3}{1-\cos x}.$$

4) Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$$

al variare di $x\in I\!R$.

5) Studiare la funzione:

$$f(x)=\frac{x^2+a}{x^2-x+(-1)^a b}$$

e tracciarne il grafico.

6) Trovare l'area del più grande rettangolo con la base sull'asse x e vertici superiori sulla parabola $y=27-x^2$.

7) Svolgere il seguente integrale

$$\int\frac{x+b}{(ax^2+b)(x^2-a^2)}dx$$

8) Svolgere il seguente integrale

$$\int\frac{1}{\sin x+\cos x}dx.$$

---

1) Applicando la definizione di limite bisogna provare che:

$\forall\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in [-1, 1]$ con $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ risulta $1 - \varepsilon \leq \sqrt{x^2 - 1} \leq 1 + \varepsilon$.

Osserviamo innanzitutto che la disequazione $1 + \varepsilon > 1 \geq \sqrt{1 - x^2}$ è sempre verificata, basta dunque studiare la disequazione $\sqrt{1 - x^2} \geq 1 - \varepsilon$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $\varepsilon < 1$, in tal modo $1-\varepsilon > 0$ e la disequazione da verificare è equivalente a:

$$1 - x^2 \geq (1 - \varepsilon)^2 \iff x^2 - (2\varepsilon - \varepsilon^2) \leq 0 \iff |x| \leq \sqrt{(2\varepsilon - \varepsilon^2)}.$$

Basta allora scegliere $\delta(\varepsilon) = \min\{1, \sqrt{(2\varepsilon - \varepsilon^2)}\}$.

2) Vedere il compito A.

3) Applichiamo il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \tan^2 x + x^3}{1 - \cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \tan^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \tan^2 x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0} (\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\tan^2 x}{x^2}) \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} == 2 \cdot 2 = 4.\end{aligned}$$

4) Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \frac{1}{n^2}x^n$, consideriamo allora $|a_n| = \frac{1}{n^2}|x|^n$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2}|x|^{n+1} \cdot n^2 \frac{1}{|x|^n} = |x|$$

Dunque,

- se $|x| < 1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x > 1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;
- se $x = \pm 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge, dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x < -1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}|x|^n$. Denotiamo con $b_n = \frac{1}{n^2}|x|^n$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ è una serie a segni alterni. Proviamo che $b_n \leq b_{n+1}$ da un certo n in poi.

  $$b_n = \frac{1}{n^2}|x|^n \leq \frac{1}{(n+1)^2}|x|^{n+1} = b_{n+1} \qquad \iff \qquad \frac{(n+1)^2}{n^2} \leq |x|$$

  Sappiamo che

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

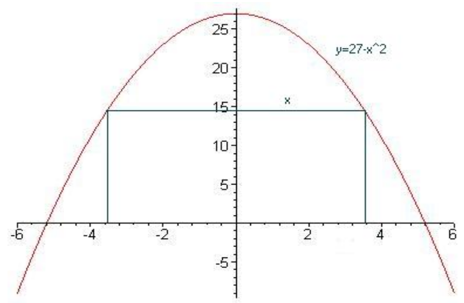
e dunque, per la definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $1+\varepsilon < |x|$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$1-\varepsilon \leq \frac{(n+1)^2}{n^2} \leq 1+\varepsilon < |x|$$

per ogni $n > m$. Allora, per ogni $n > m$ risulta $b_n \leq b_{n+1}$ e dunque la serie data è indeterminata.

5) Vedere il compito A.

6) Disegnamo innanzitutto la figura del problema



e denotiamo con x la semibase del rettangolo iscritto. Dobbiamo massimizzare la funzione area $f(x) = 2x(27-x^2)$ con il vincolo che $0 \leq x \leq 3\sqrt{3}$. Risulta:

$$f'(x) = 54 - 6x^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -3 \leq x \leq 3$$

Dunque la funzione area f è crescente tra $[0,3[$, decrescente se $x \in]3, 3\sqrt{3}]$. Il punto $x = 3$ è un punto di massimo assoluto per la funzione, in tal caso l'area vale 108.

7) Vedere il compito A.

8) Dalle formule

$$\sin x = \frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2} \quad \cos x = \frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}$$

poniamo $\tan x/2 = t$ da cui

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int \frac{2}{2t + 1 - t^2} dt \\
&= -2 \int \frac{1}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})} dt \\
&= -2 \int \left(\frac{1}{2\sqrt{2}(t-1-\sqrt{2})} - \frac{1}{2\sqrt{2}(t-1+\sqrt{2})}\right) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \log|t-1+\sqrt{2}| - \frac{1}{\sqrt{2}} \log|t-1-\sqrt{2}| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \log|\tan x/2 - 1 + \sqrt{2}| - \frac{1}{\sqrt{2}} \log|\tan x/2 - 1 - \sqrt{2}| + C.
\end{aligned}$$

Analisi Matematica I - Test di verifica
Compito D

Sia a = numero lettere del nome, b= numero delle lettere del cognome.

1) Utilizzando la definizione di limite provare che

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x+1}+2x = 1.$$

2) Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin^2 x & 0<x<1 \\ 0 & x=0 \\ |x|^\beta \cos^2(1/x) & -1<x<0 \end{cases}$$

dove $\alpha = [(4-a)/2]$ e $\beta = [-1+b/4]$.

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x + x^2 + \tan^2 x}{x^2+e^{-1/x}}.$$

4) Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

al variare di $x \in I\!R$.

5) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2+a}{x^2-x+(-1)^a b}$$

e tracciarne il grafico.

6) Un triangolo isoscele ha vertice nell'origine e base parallela all'asse x con vertici sulla parabola $9y = 27 - x^2$. Trovare l'area del triangolo più grande.

7) Svolgere il seguente integrale

$$\int \frac{x+b}{(ax^2+b)(x^2-a^2)}dx$$

8) Svolgere il seguente integrale

$$\int \frac{\log x}{x^{1-\log x}}dx.$$

---

1) Applicando la definizione di limite bisogna provare che:

$\forall \varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ con $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ risulta $1 - \varepsilon \leq \sqrt{x^2 + x + 1} + 2x \leq 1 + \varepsilon$.

Senza perdita di generalità possiamo supporre che $\varepsilon < 1/4, |x| < 1/4$, in tal modo le quantità $1-2x\pm\varepsilon$ risulteranno positive. La catena di disuguaglianze $1-\varepsilon \leq \sqrt{x^2+x+1}+2x \leq 1+\varepsilon$ sarà allora equivalente a:

$$(1 - \varepsilon - 2x)^2 \leq x^2 + x + 1 \leq (1 + \varepsilon - 2x)^2.$$

Risolviamo allora il sistema

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 4x^2 + 1 + \varepsilon^2 - 4x - 2\varepsilon + 4\varepsilon x \\ x^2 + x + 1 \leq 4x^2 + 1 + \varepsilon^2 - 4x + 2\varepsilon - 4\varepsilon x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x(5 - 4\varepsilon) - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \leq 0 \\ 3x^2 - x(5 + 4\varepsilon) + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}(5 - 4\varepsilon - \sqrt{25 + 4\varepsilon^2 - 16\varepsilon}) \leq x \leq \frac{1}{6}(5 - 4\varepsilon + \sqrt{25 + 4\varepsilon^2 - 16\varepsilon}) = x_2 \\ x \leq x_3 = \frac{1}{6}(5 + 4\varepsilon - \sqrt{25 + 4\varepsilon^2 + 16\varepsilon}) \cup x \geq x_4 = \frac{1}{6}(5 + 4\varepsilon + \sqrt{25 + 4\varepsilon^2 + 16\varepsilon}) \end{cases}$$

Osserviamo che per la scelta fatta su ε tutti i radicandi sono positivi, inoltre risulta $x_1 < 0, x_2, x_3, x_4 > 0$. Dunque basta scegliere

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\frac{1}{4}, x_2, x_3, |x_1|\}.$$

2) Vedere il compito A.

3) Applichiamo il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos x + x^2 + \tan^2 x}{x^2 + e^{-1/x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos x + x^2 + \tan^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{\tan^2 x}{x^2} = \\ &= \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

4) Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = nx^n$, consideriamo allora $|a_n| = n|x|^n$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x|^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \frac{1}{|x|^n} = |x|$$

Dunque,

- se $|x| < 1$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x > 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;
- se $x = 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} n$ che diverge a $+\infty$;

- se $x = -1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$ è una serie a segni alterni. Posto $b_n = n$, si osserva che la successione $(b_n)_n$ è crescente e dunque la serie data è indeterminata;

- se $x < -1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n|x|^n$. Denotiamo con $b_n = n|x|^n$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ è una serie a segni alterni. Proviamo che $b_n \le b_{n+1}$ da un certo n in poi.

$$b_n = n|x|^n \le (n+1)|x|^{n+1} = b_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{n}{n+1} \le |x|$$

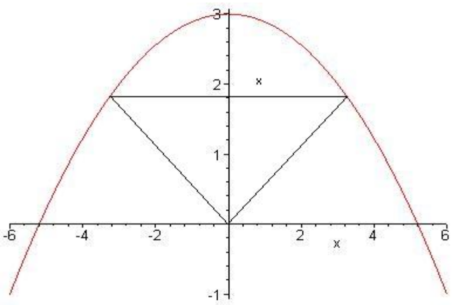
Questa disequazione è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$ infatti

$$\frac{n}{n+1} \le 1 < |x|$$

e dunque la serie data è indeterminata.

5) Vedere il compito A.

6) Disegnamo innanzitutto la figura del problema



e denotiamo con x la semibase del triangolo isoscele. La funzione area del triangolo è data da $f(x) = \frac{1}{9}(27x - x^3)$, con il vincolo che $x \in [0, 3\sqrt{3}]$. Risulta:

$$f'(x) = \frac{1}{9}(27 - 3x^2) \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 9 - x^2 \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -3 \le x \le 3$$

Dunque la funzione area f è crescente tra $[0, 3[$, decrescente se $x \in]3, 3\sqrt{3}]$. Il punto $x = 3$ è un punto di massimo assoluto per la funzione, in tal caso l'area vale 6.

7) Vedere il compito A.

8) Poniamo $\log x = t$ da cui $dx = e^t dt$. Si ha allora

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{x^{1-\log x}} dx &= \int \frac{t}{e^t (e^t)^{-t}} e^t dt \\ &= \int t e^{t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int 2t e^{t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} e^{t^2} + C \end{aligned}$$

Analisi Matematica I - Test di verifica
Compito E

Sia a = numero lettere del nome, b= numero delle lettere del cognome.

1) Utilizzando la definizione di limite provare che

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{2x^2 + x + 1} - x - 1 = 0.$$

2) Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin^2 x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ |x|^\beta \cos^2(1/x) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

dove $\alpha = [(4-a)/2]$ e $\beta = [-1 + b/4]$.

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \tan x + x^4}{\log(1+x) + \sin^2 x}.$$

4) Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} x^n$$

al variare di $x \in I\!R$.

5) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 - x + (-1)^a b}$$

e tracciarne il grafico.

6) Se un rettangolo ha area pari a 32 cm^2, quali devono essere le sue dimensioni se la distanza di un vertice dal punto medio del lato non adiacente deve essere minima?

7) Svolgere il seguente integrale

$$\int \frac{x + b}{(ax^2 + b)(x^2 - a^2)} dx$$

8) Svolgere il seguente integrale

$$\int \frac{\log(2 + e^x)^{e^{2x}}}{e^x} dx.$$

---

1) Applicando la definizione di limite bisogna provare che:

$\forall\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ con $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ risulta $x + 1 - \varepsilon \leq \sqrt{2x^2 + x + 1} \leq 1 + x + \varepsilon$.
Senza perdita di generalità supponiamo che $\varepsilon < 1/4, |x| < 1/2$, in tal modo $x + 1 \pm \varepsilon > 0$.
Con queste restrizioni il sistema

$$x + 1 - \varepsilon \leq \sqrt{2x^2 + x + 1} \leq 1 + x + \varepsilon$$

è equivalente a:

$$\begin{cases} 1 + x^2 + \varepsilon^2 + 2x - 2\varepsilon - 2\varepsilon x \leq 2x^2 + x + 1 \\ 2x^2 + x + 1 \leq 1 + x^2 + \varepsilon^2 + 2x + 2\varepsilon + 2\varepsilon x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - x(1 - 2\varepsilon) + 2\varepsilon - \varepsilon^2 \geq 0 \\ x^2 - x(1 + 2\varepsilon) - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) \leq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{sempre vera perché } \Delta = 8\varepsilon^2 - 12\varepsilon + 1 < 0 \quad \text{se } \varepsilon < 1/4 \\ x_1 = \frac{1}{2}(1 + 2\varepsilon - \sqrt{8\varepsilon^2 + 12\varepsilon + 1}) \leq x \leq \frac{1}{2}(1 + 2\varepsilon + \sqrt{8\varepsilon^2 + 12\varepsilon + 1}) = x_2 \end{cases}$$

Si prova facilmente che $x_1 < 0 < x_2$ e dunque basta scegliere

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\frac{1}{2}, |x_1|, x_2\}.$$

2) Vedere il compito A.

3) Applichiamo il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x + \tan x + x^4}{\log(1 + x) + \sin^2 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + \tan x}{\log(1 + x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \tan x}{x} \cdot \frac{x}{\log(1 + x)} = \\ &= 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

4) Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \frac{1}{\log(n+1)} x^n$, consideriamo allora $|a_n| = \frac{1}{\log(n+1)} |x|^n$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n + 2)} |x|^{n+1} \cdot \log(n + 1) \frac{1}{|x|^n} = |x|$$

Dunque,

- se $|x| < 1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x > 1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;
- se $x = 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$. Denotiamo con $b_n = \frac{1}{\log(n)}$. Risulta $b_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $(b_n)_n$ decrescente. Applichiamo allora il criterio di Cauchy e studiamo la serie

$$\sum_{k=1} 2^k b_{2^k} = \sum_{k=1} 2^k \frac{1}{\log(2^k)} = \sum_{k=1} 2^k \frac{1}{k \log(2)}.$$

Risulta:

$$\lim_{k\to\infty} 2^k \frac{1}{k\log(2)} = +\infty.$$

Il termine generale dunque non converge a zero e siccome la serie è a termini non negativi la serie diverge a $+\infty$;

- se $x = -1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\log(n)}$ è una serie a segni alterni. Posto $b_n = \frac{1}{\log(n)}$, si osserva che la successione $(b_n)_n$ è decrescente, infinitesima e dunque la serie data è convergente per il criterio di Leibnitz;

- se $x < -1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\log(n)}|x|^n$. Denotiamo con $b_n = \frac{1}{\log(n)}|x|^n$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ è una serie a segni alterni. Proviamo che $b_n \leq b_{n+1}$ da un certo n in poi.

$$b_n = \frac{1}{\log(n)}|x|^n \leq \frac{1}{\log(n+1)}|x|^{n+1} = b_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\log(n+1)}{\log(n)} \leq |x|.$$

Sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n)} = 1$$

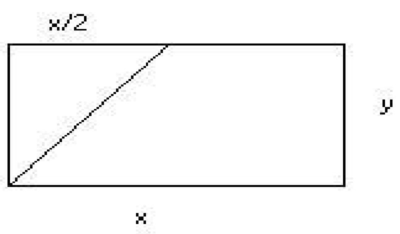
e dunque, per la definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $1+\varepsilon < |x|$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$1-\varepsilon \leq \frac{\log(n+1)}{\log(n)} \leq 1+\varepsilon < |x|$$

per ogni $n > m$. Allora, per ogni $n > m$, risulta $b_n \leq b_{n+1}$ e dunque la serie data è indeterminata.

5) Vedere il compito A.

6) Disegnamo innanzitutto la figura del problema



e denotiamo con x la base del rettangolo e con y la sua altezza. Dobbiamo minimizzare la funzione $f(x) = \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}x^2}$, con il vincolo che $xy = 32$ e che $x > 0, y > 0$. Risulta $y = \frac{32}{x}$; invece di minimizzare la distanza minimizziamo il suo quadrato

$$
\begin{aligned}
f^2(x) &= g(x) = 1024\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}x^2 \\
g'(x) &= -2048\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2}x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^4 - 4096}{2x^3} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 64 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \\
& \quad x \leq -8 \quad \cup \quad x \geq 8
\end{aligned}
$$

Dunque la funzione area f è crescente per $x > 8$, decrescente se $x \in]0, 8[$. Il punto $x = 8, y = 4$ è un punto di massimo assoluto per la funzione, in tal caso la distanza vale $4\sqrt{3}$.

7) Vedere il compito A. **8)** Poniamo $e^x = t$ da cui $dx = \frac{1}{t}dt$. Si ha allora

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\log(2 + e^x)^{e^{2x}}}{e^x} dx &= \int e^{2x} \frac{\log(2 + e^x)}{e^x} dx \\
&= \int e^x \log(2 + e^x) dx \\
&= \int t \log(2 + t) \frac{1}{t} dt \\
&= \int \log(2 + t) dt \\
&= \int (t)' \log(2 + t) dt \\
&= t \log(2 + t) - \int \frac{t}{2 + t} dt \\
&= t \log(2 + t) - \int (1 - \frac{2}{t + 2}) dt \\
&= t \log(2 + t) - t + 2 \log(2 + t) + C \\
&= e^x \log(2 + e^x) - e^x + 2 \log(2 + e^x) + C.
\end{aligned}
$$

Analisi Matematica I - Test di verifica
Compito F

Sia a = numero lettere del nome, b= numero delle lettere del cognome.

1) Utilizzando la definizione di limite provare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1.$$

2) Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin^2 x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ |x|^\beta \cos^2(1/x) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

dove $\alpha = [(4-a)/2]$ e $\beta = [-1 + b/4]$.

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + x^2}{\sin x + \log(1+x^2)}.$$

4) Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})\ x^n$$

al variare di $x \in I\!R$.

5) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 - x + (-1)^a b}$$

e tracciarne il grafico.

6) Esprimere 18 come somma di due numeri positivi tali che il prodotto di uno con il quadrato dell'altro sia massimo.

7) Svolgere il seguente integrale

$$\int \frac{x+b}{(ax^2+b)(x^2-a^2)} dx$$

8) Svolgere il seguente integrale

$$\int x \log(1+x) dx.$$

---

1) Il limite da verificare è falso, basta osservare che per $x > 0$ e preso $M > 1$ risulta

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \geq \frac{1}{x} \geq M \quad \forall x < \frac{1}{M}$$

e dunque non può essere vero che per gli x positivi e vicini a zero risulti $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \leq \varepsilon$, con ε arbitrariamente piccolo.

2) Vedere il compito A.

3) Applichiamo il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + x^2}{\sin x + \log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = 1.$$

4) Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \sin(\frac{1}{n})x^n$, consideriamo allora $|a_n| = \sin(\frac{1}{n})|x|^n$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n+1})|x|^{n+1} \cdot [\sin(\frac{1}{n})]^{-1} \frac{1}{|x|^n} = |x|$$

Dunque,

- se $|x| < 1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se $x > 1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;
- se $x = 1$ la serie data diverge a $+\infty$ infatti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$, (si può provare utilizzando il criterio del confronto asintotico ed il limite notevole $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n})/(1/n) = 1$);
- se $x = -1$ la serie data converge semplicemente per il criterio di Leibnitz poiché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\frac{1}{n})$ e la successione non negativa $(\sin(\frac{1}{n}))_n$ è infinitesima e decrescente a zero;
- se $x < -1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n|x|^n \sin(\frac{1}{n})$. Proviamo che $b_n = |x|^n \sin(\frac{1}{n})$ è crescente da un certo $m \in \mathbb{N}$ in poi.

  $$b_n = \sin(\frac{1}{n})|x|^n \leq \sin(\frac{1}{n+1})|x|^{n+1} = b_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin(\frac{1}{n})[\sin(\frac{1}{n+1})]^{-1} \leq |x|$$

  Sappiamo che

  $$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n})[\sin(\frac{1}{n+1})]^{-1} = 1$$

e dunque, per la definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $1+\varepsilon < |x|$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$1-\varepsilon \leq \sin(\frac{1}{n})[\sin(\frac{1}{n+1})]^{-1} \leq 1+\varepsilon < |x|$$

e dunque la serie data è indeterminata.

5) Vedere il compito A.

6) Si tratta di risolvere il seguente problema di massimo

$$\begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0 \\ x+y = 18 \\ \max xy^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0 \\ x = 18-y \\ \max(18-y)y^2. \end{cases}$$

Cerchiamo allora il massimo assoluto della funzione $g(y) = (18-y)y^2$, con il vincolo che $0 \leq y \leq 18$.

$$g'(y) = 36y - 3y^2 \geq 0 \quad \iff \quad 0 \leq x \leq 12.$$

Dunque la funzione g è crescente per $0 < y < 12$, decrescente per $12 \leq x < 18$, ne risulta che il massimo assoluto è raggiunto per $y = 12$, in tal caso $g(12) = 864$.

7) Vedere compito A.

8) Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int x\log(1+x)dx &= \int (\frac{x^2}{2})'\log(1+x)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x+1}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\int (x-1+\frac{1}{x+1})dx \\
&= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} - x + \log(1+x)) \\
&= \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x) + C
\end{aligned}$$

Analisi Matematica I - Test di verifica
Compito G

Sia a = numero lettere del nome, b= numero delle lettere del cognome.

1) Utilizzando la definizione di limite provare che

$$\lim_{x\to 0} x\sqrt{1-x^2} = 0.$$

2) Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin^2 x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ |x|^\beta \cos^2(1/x) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

dove $\alpha = [(4-a)/2]$ e $\beta = [-1 + b/4]$.

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + \sin^2 x}{e^x - 1 + x^4}.$$

4) Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)} x^n$$

al variare di $x \in I\!R$.

5) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 - x + (-1)^a b}$$

e tracciarne il grafico.

6) Dimostrare che il rettangolo di perimetro minimo di area fissata è il quadrato.

7) Svolgere il seguente integrale

$$\int \frac{x+b}{(ax^2+b)(x^2-a^2)} dx$$

8) Svolgere il seguente integrale

$$\int \frac{\sin 2x}{e^x} dx.$$

---

1) Applicando la definizione di limite bisogna provare che:

$\forall \varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in [-1, 1]$ con $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ risulta $-\varepsilon \leq$

$x\sqrt{1-x^2} \leq +\varepsilon$.

Osserviamo che risulta:

$$-|x| \leq x\sqrt{1-x^2} \leq |x|$$

e dunque basta prendere $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

2) Vedere il compito A.

3) Applichiamo il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + \sin^2 x}{e^x - 1 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} = 1.$$

4) Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \frac{1}{n\log(n)}x^n$, consideriamo allora $|a_n| = \frac{1}{n\log(n)}|x|^n$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}|x|^{n+1} \cdot n\log(n)\frac{1}{|x|^n} = |x|$$

Dunque,

- se $|x| < 1$ allora $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;

- se $x > 1$, allora $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;

- se $x = 1$ allora $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$. Visto che $(\frac{1}{n\log(n)})_n$ è una successione non negativa, infinitesima e decrescente a zero applichiamo il criterio di Cauchy e studiamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k\log(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\log(2)}$. Tale serie risulta divergente e dunque diverge anche la serie data;

- se $x = -1$ la serie data converge semplicemente per il criterio di Leibnitz poiché $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log(n)}$ e la successione non negativa $(\frac{1}{n\log(n)})_n$ è infinitesima e decrescente a zero;

- se $x < -1$, allora $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log(n)}|x|^n$. Proviamo che $b_n = \frac{1}{n\log(n)}|x|^n$ è crescente da un certo $m \in \mathbb{N}$ in poi.

  $$b_n = \frac{1}{n\log(n)}|x|^n \leq \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}|x|^{n+1} = b_{n+1} \iff \frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log(n)} \leq |x|$$

  Sappiamo che

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log(n)} = 1$$

e dunque, per la definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $1+\varepsilon < |x|$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$1-\varepsilon \leq \frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log(n)} \leq 1+\varepsilon < |x|$$

e dunque la serie data è indeterminata.

5) Vedere il compito A.

6) Denotata con x la base del rettangolo e y la sua altezza, si tratta di risolvere il seguente problema di mimimo

$$\begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ xy = a > 0 \\ \min 2(x+y) \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ x = \frac{a}{y} \\ \min 2[\frac{a}{y} + y]. \end{cases}$$

Cerchiamo allora il minimo assoluto della funzione $g(y) = 2[\frac{a}{y} + y]$, con il vincolo che $y > 0$.

$$g'(y) = -\frac{2a}{y^2} + 2 \geq 0 \iff y \leq -\sqrt{a}, \quad \cup \quad y \geq \sqrt{a}.$$

Dunque la funzione g è crescente per $y > \sqrt{a}$, decrescente per $0 < y < \sqrt{a}$, ne risulta che il minimo assoluto è raggiunto per $y = \sqrt{a}$, in tal caso il rettangolo è un quadrato.

7) Vedere compito A.

8) Integrando due volte per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin 2x}{e^x} dx &= \int e^{-x} \sin 2x dx \\
&= \int (-e^{-x})' \sin 2x dx \\
&= -e^{-x} \sin 2x + 2 \int e^{-x} \cos 2x dx \\
&= -e^{-x} \sin 2x + 2 \int (-e^{-x})' \cos 2x dx \\
&= -e^{-x} \sin 2x + 2(-e^{-x} \cos 2x - 2 \int e^{-x} \sin 2x dx) \\
&= -e^{-x} \sin 2x - 2e^{-x} \cos 2x - 4 \int e^{-x} \sin 2x dx.
\end{aligned}$$

Portando a primo membro l'ultimo integrale si ha

$$5 \int \frac{\sin 2x}{e^x} dx = -e^{-x} \sin 2x - 2e^{-x} \cos 2x$$

e infine

$$\int \frac{\sin 2x}{e^x} dx = \frac{1}{5} e^{-x}(-\sin 2x - 2\cos 2x).$$

Analisi Matematica I - Test di verifica
Compito H

Sia a = numero lettere del nome, b= numero delle lettere del cognome.

1) Utilizzando la definizione di limite provare che

$$\lim_{x\to 0^+}(x+1)\sqrt{x} = 0.$$

2) Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin^2 x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ |x|^\beta \cos^2(1/x) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

dove $\alpha = [(4-a)/2]$ e $\beta = [-1 + b/4]$.

3) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x + \sin x + \log(1+x) + x^3}{x + e^x - 1}.$$

4) Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(x+1)^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

5) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 - x + (-1)^a b}$$

e tracciarne il grafico.

6) Dimostrare che tra tutti i triangoli isosceli di perimetro assegnato quello equilatero ha area massima.

7) Svolgere il seguente integrale

$$\int \frac{x+b}{(ax^2+b)(x^2-a^2)}dx$$

8) Svolgere il seguente integrale

$$\int (x+1)\arctan x dx.$$

---

1) Applicando la definizione di limite bisogna provare che:

$\forall\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x > 0$ con $x < \delta(\varepsilon)$ risulta $-\varepsilon \le (x+1)\sqrt{x} \le +\varepsilon$. Osserviamo che, se supponiamo $x < 1$, risulta:

$$-\varepsilon < 0 \le (x+1)\sqrt{x} \le 2\sqrt{x} \le +\varepsilon$$

e dunque basta prendere $\delta(\varepsilon) = (\varepsilon/2)^2$.

2) Vedere il compito A.

3) Applichiamo il principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + \sin x + \log(1+x) + x^3}{x + e^x - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x + \sin x + \log(1+x)}{x + e^x - 1} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x + \sin x + \log(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{x + e^x - 1} = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{x+e^x-1}{x}} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

4) Si tratta di una serie di segno qualunque. Sia $a_n = \frac{1}{n+1}(x+1)^n$, consideriamo allora $|a_n| = \frac{1}{n+1}|x+1|^n$. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2}|x+1|^{n+1} \cdot (n+1)\frac{1}{|x+1|^n} = |x+1|$$

Dunque,

- se $|x+1| < 1$, cioè $-2 < x < 0$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge e dunque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;

- se $x > 0$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$;

- se $x = 0$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge;

- se $x = -2$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ che è la serie armonica a segni alterni (convergente semplicemente per il criterio di Leibnitz),

- se $x < -2$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}|x+1|^n$. Proviamo che $b_n = \frac{1}{n+1}|x+1|^n$ è crescente da un certo $m \in \mathbb{N}$ in poi.

$$b_n = \frac{1}{n+1}|x+1|^n \le \frac{1}{n+2}|x+1|^{n+1} = b_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{n+2}{n+1} \le |x|$$

Sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$$

e dunque, per la definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $1+\varepsilon < |x|$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$1-\varepsilon \le \frac{n+2}{n+1} \le 1+\varepsilon < |x|$$

e dunque la serie data è indeterminata.

5) Vedere il compito A.

6) Denotata con $2y$ la base del triangolo isoscele e x la lunghezza del lato obliquo, si tratta di risolvere il seguente problema di massimo

$$\begin{cases} x > 0, \; y > 0 \\ 2x + 2y = 2p > 0 \\ \max y\sqrt{x^2 - y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \; y > 0 \\ x = p - y \\ \max y\sqrt{p^2 - 2py}. \end{cases}$$

Cerchiamo allora il minimo assoluto della funzione $g(y) = y\sqrt{p^2 - 2py}$, con il vincolo che $y > 0$.

$$g'(y) = \sqrt{p^2 - 2py} - \frac{py}{\sqrt{p^2 - 2py}} = \frac{p^2 - 3py}{\sqrt{p^2 - 2py}} \ge 0 \iff y \le \frac{p}{3}.$$

Dunque la funzione g è crescente per $0 < y < \frac{p}{3}$, decrescente per $y > \frac{p}{3}$, ne risulta che il massimo assoluto è raggiunto per $y = \frac{p}{3}$, in tal caso il triangolo è equilatero.

7) Vedere compito A.

8) Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int (x+1)\arctan x dx &= \int (\frac{(x+1)^2}{2})' \arctan x \\ &= \frac{(x+1)^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx \\ &= \frac{(x+1)^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx \\ &= \frac{(x+1)^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int (1 + \frac{2x}{x^2+1})dx \\ &= \frac{(x+1)^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x + \log(x^2+1)) + C \\ &= \frac{(x+1)^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C. \end{aligned}$$