Utilizziamo la definizione di limite per provare che

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2}+2=3.$$

Applicando la definizione bisogna provare che:

$\forall\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in [-1,1]$ con $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ risulta $1-\varepsilon \leq \sqrt{x^2-1} \leq 1+\varepsilon$.

Osserviamo innanzitutto che la disequazione $1+\varepsilon > 1 \geq \sqrt{1-x^2}$ è sempre verificata, basta dunque studiare la disequazione $\sqrt{1-x^2} \geq 1-\varepsilon$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $\varepsilon < 1$, in tal modo $1-\varepsilon > 0$ e la disequazione da verificare è equivalente a:

$$1-x^2 \geq (1-\varepsilon)^2 \Longleftrightarrow x^2-(2\varepsilon-\varepsilon^2) \leq 0 \Longleftrightarrow |x| \leq \sqrt{(2\varepsilon-\varepsilon^2)}.$$

Basta allora scegliere $\delta(\varepsilon) = \min\{1, \sqrt{(2\varepsilon-\varepsilon^2)}\}$.