1) Sia a = numero lettere del nome, b= numero delle lettere del cognome.

Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin^2 x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ |x|^\beta \cos^2(1/x) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

dove $\alpha = [(4-a)/2]$ e $\beta = [-1 + b/4]$.

Svolgimento

Studiamo la continuità di f al variare di α e β. L'unico punto che può dare problemi è $x = 0$, studiamo pertanto la continuità della f nell'origine.

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha \sin^2 x = \lim_{x\to0^+} x^{\alpha+2}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to0^+} x^{\alpha+2} = \begin{cases} 0 & \alpha > -2 \\ 1 & \alpha = -2 \\ +\infty & \alpha < -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-} |x|^\beta \cos^2(1/x) = \begin{cases} 0 & \beta > 0 \\ \nexists & \beta \geq 0 \end{cases}$$

Se infatti consideriamo $x_k = 1/k\pi$, $y_k = 1/(k\pi + \pi/2)$ con k intero negativo risulta, per $\beta < 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x_k \to 0^-} |x_k|^\beta \cos^2(1/x_k) &= \lim_{k \to -\infty} (1/|k|\pi)^\beta = \lim_{k \to -\infty} (|k|\pi)^{-\beta} = +\infty, \\
\lim_{y_k \to 0^-} |y_k|^\beta \cos^2(1/y_k) &= \lim_{k \to -\infty} 1/(|k\pi + \pi/2|)^\beta \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Dunque nel caso $\beta < 0$ abbiamo determinato due restrizioni che ammettono 0^- come punto di accumulazione ed i cui limiti sono distinti. Se invece $\beta = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x_k \to 0^-} \cos^2(1/x_k) &= \lim_{k \to -\infty} 1 = 1, \\
\lim_{y_k \to 0^-} \cos^2(1/y_k) &= \lim_{k \to -\infty} 0 = 0.
\end{aligned}$$