5. Determinare, dopo averne giustificato l'esistenza, lo sviluppo in serie di Mac Laurin di ordine 3 della funzione:

$$f(x) = \sqrt{1+\sinh x}.$$

Svolgimento

Si ha $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e lo sviluppo della binomiale ha senso per ogni x tale che $-1 < \sinh x < 1$, ovvero per $\log(\sqrt{2}-1) < x < \log(\sqrt{2}+1)$. D'altra parte risulta

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in I\!R, \qquad\qquad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \quad \forall x \in I\!R,$$

e dunque, sommando termine a termine, si ottiene:

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ora, poniamo $y = \sinh x$; si ha $f(x) = g(y) = \sqrt{1+y}$. Per ogni $x \in]\log(\sqrt{2}-1), \log(\sqrt{2}+1)[$

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} y^n = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3).$$

Pertanto f risulta sviluppabile in serie di Mac Laurin per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $\log(\sqrt{2}-1) < x < \log(\sqrt{2}+1)$ e si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{2}\left[x + \frac{x^3}{3!}\right] - \frac{1}{8}\left[x + \frac{x^3}{3!}\right]^2 + \frac{1}{16}\left[x + \frac{x^3}{3!}\right]^3 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}\left[x + \frac{x^3}{6}\right] - \frac{1}{8}\left[x^2 + \frac{x^6}{36} + \frac{x^4}{3}\right] + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{48}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$