Proprietà delle funzioni continue

Le funzioni continue rivestono, all'interno dello studio delle funzioni reali di variabile reale, un ruolo importante. Tra le varie proprietà che sono soddisfatte dalle funzioni continue qui esamineremo la conservazione della connessione e della compattezza. Questi argomenti sono ovviamente trattati nel libro di testo e qui vengono solo richiamati per sottolineare l'importanza di queste due proprietà e delle loro conseguenze.

Per quanto riguarda le conseguenze della conservazione delle connessione, nota anche come proprietà dei valori intermedi, ricordiamo il teorema degli zeri, il teorema del punto fisso, e alcuni metodi di approssimazione per le soluzioni di equazioni, non risolvibili in termini elementari.

La proprietà di conservazione della compattezza, nota come teorema di Weierstrass, ci permette di dimostrare l'esistenza di massimi e minimi assoluti.

Come applicazione dei vari teoremi qui riportati si hanno infine proprietà di continuità per la funzione inversa, nel caso questa esista.

Definizione 1 Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, diremo che esso è un *connesso* se, presi comunque due elementi a e b in A, con $a \leq b$, risulta $[a, b] \subset A$.

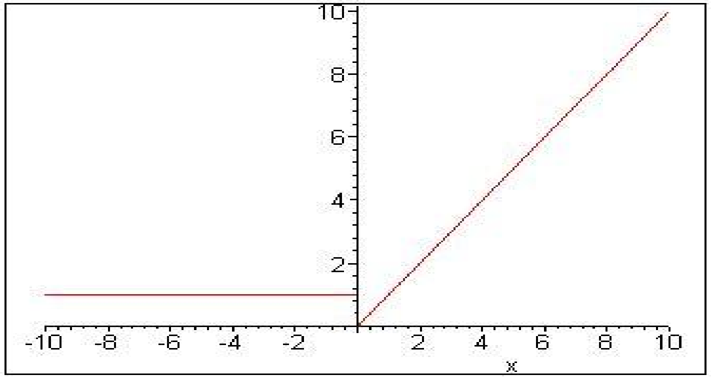
Pertanto, sono connessi in $\mathbb{R}$ i punti, i segmenti, le semirette e la retta reali.

Definizione 2 Dato un insieme connesso $A \subset \mathbb{R}$, e una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, diremo che f ha la proprietà dei *valori intermedi* se, per ogni scelta di $a \in A$ e di $b \in A$, con $f(a) < f(b)$, il codominio di $f/_{[a,b]}$ contiene tutto l'intervallo $[f(a), f(b)]$. In altre parole, deve accadere che, comunque si scelga un valore $y \in [f(a), f(b)]$, esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$.

Dunque se una funzione f è definita su un connesso A, e ha la proprietà dei valori intermedi, allora il codominio di f è un connesso.

Il viceversa è falso: esistono molte funzioni che hanno il codominio connesso, ma non hanno la proprietà dei valori intermedi; un esempio è la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



Il codominio di f è tutta la semiretta $[0, +\infty[$, ma f non ha la proprietà dei valori intermedi: se scegliamo $a = -1, b = 0$, non esiste nessun $x \in]a, b[$ tale che $f(x) = \frac{1}{10}$, benchè $\frac{1}{10} \in]f(b), f(a)[$. Una condizione sufficiente per ottenere la proprietà dei valori intermedi è la seguente:

Teorema 3 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme connesso, e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione* continua *in A. Allora f ha la proprietà dei valori intermedi.*

Da questo teorema discende che

Corollario 4 Teorema di Bolzano *Sia* $I \subset \mathbb{R}$ *un insieme connesso, e* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione* continua *in* I. *Se risulta* $f(a) < 0$ *per qualche punto* $a \in I$ *e* $f(b) > 0$ *per qualche* $b \in I$, *allora esiste un elemento* $x \in I$, *compreso fra* a *e* b, *tale che* $f(x) = 0$.

Corollario 5 *Ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale in* $\mathbb{R}$.

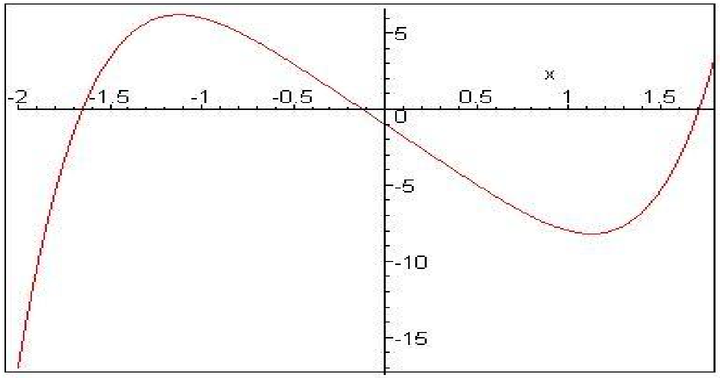
Un'altra importante conseguenza della conservazione della connessione riguarda il problema del punto fisso: data una funzione $f : [a, b] \to [a, b]$, esiste un punto $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = x$?

Corollario 6 *Data una funzione continua* $f : [a, b] \to [a, b]$, *esiste un punto* $x \in [a, b]$ *tale che* $f(x) = x$.

I teoremi precedenti, tuttavia, non forniscono un metodo per determinare gli zeri di una equazione o il punto fisso di una funzione. In generale, non esiste un metodo risolutivo, ma si può cercare di approssimare la soluzione cercata a meno di un errore piccolo a piacere. Un metodo utile in tal senso è quello delle bisezioni. Vedremo in seguito che esistono anche altri metodi per il calcolo approssimato degli zeri reali reali di una applicazione e come applicazione della derivabilità introdurremo il metodo delle corde e quello delle tangenti (o di Eulero-Fourier).

Cerchiamo di far vedere che l'equazione $x^5 - 8x - 1 = 0$ ha tre radici reali e calcoliamole con un errore inferiore a 10^{-2}. Calcoliamo innanzitutto il polinomio nei punti $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$, risulta $p(-2) = -32+16-1 = -17, p(-1) = -1+8-1 = 6, p(0) =$

$-1, p(1) = -1 - 8 - 1, p(2) = 32 - 16 - 1$. Dunque, per il teorema degli zeri esistono tre soluzionix_1, x_2, x_3 che appartengono rispettivamente agli intervalli $]-2, -1[,]-1, 0[,]1, 2[$. Per brevità approssimeremo con il metodo della bisezione soltanto la soluzione x_2, gli altri due punti si trattano analogamente. Calcoliamo $p(-1/2) = -(1/2)^5 + 8(1/2) - 1 = 95/32$, dunque lo zero si trova nell'intervallo $]-1/2, 0[$. Calcoliamo ora $p(-1/4) = 1023/1024$ e dunque la soluzione appartiene all'intervallo $]-1/4, 0[$. Così procedendo $p(-1/8) = -1/32768 = -0,0000305$ e quindi la soluzione si trova nell'intervallo $]-1/4, -1/8[$. Possiamo allora scegliere come soluzione approssimata il valore $x = -1/8$. Il grafico qualitativo del polinomio è il seguente:



Occupiamoci ora della conservazione della compattezza che che garantisce l'esistenza del massimo e del minimo assoluti per una funzione continua definita su un insieme compatto, cioè su un insieme chiuso e limitato.

Teorema 7 *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una generica funzione continua. Allora* f *ammette in tale intervallo il massimo e il minimo assoluti; cioè esistono in* $[a, b]$ *due punti,* α *e* β*, tali che* $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ *per ogni* $x \in [a, b]$.

Sfruttando allora entrambi i principi di conservazione della connessione e della compattezza si può allora affermare che:

Corollario 8 *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora il suo codominio è un intervallo chiuso e limitato $[c, d]$ (eventualmente degenere in un singolo punto).*

L'ultimo risultato che tratteremo qui riguarda la continuità della *funzione inversa*, nel caso questa esista.

Teorema 9 *Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva. Denotato con* [c,d] *il codominio di f, la funzione inversa $f^{-1} : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ è continua.*

Teorema 10 *Sia $f : A \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ una applicazione continua e biiettiva. Se A è compatto allora f^{-1} è continua in B.*