Studiare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + \frac{|x|}{2}}.$$

Il dominio della funzione risulta essere tutto l'asse reale, dunque $D = \mathbb{R}$.

Esplicitando il modulo si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \dfrac{2}{1 + \frac{x}{2}} & \text{per } x \geq 0 \\ x - 1 + \dfrac{2}{1 - \frac{x}{2}} & \text{per } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 + \frac{4}{2+x} & \text{per } x \geq 0 \\ x - 1 + \frac{4}{2-x} & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Non ci sono asintoti verticali; controlliamo quelli orizzontali

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Non ci sono, allora, neppure gli asintoti orizzontali; controlliamo, infine, quelli obliqui

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x(2 \pm x)} = 1 = m$$

mentre

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} -1 + \frac{4}{2 \pm x} = -1 = n.$$

Quindi la retta $y = x - 1$ risulta un asintoto obliquo.

Studiamo la derivabilità. Un punto di non derivabilità potrebbe risultare $x = 0$ poiché annulla il modulo. Per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{4}{(2+x)^2} & \text{per } x > 0 \\ 1 + \dfrac{4}{(2-x)^2} & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Studiamo ora $f'(0)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 2.$$

Dunque non esiste $f'(0)$. Per quanto riguarda il segno della derivata prima si ottiene

$$1 - \frac{4}{(2+x)^2} > 0 \Longleftrightarrow 1 > \frac{4}{(2+x)^2}$$

che risulta vero per ogni $x > 0$, mentre

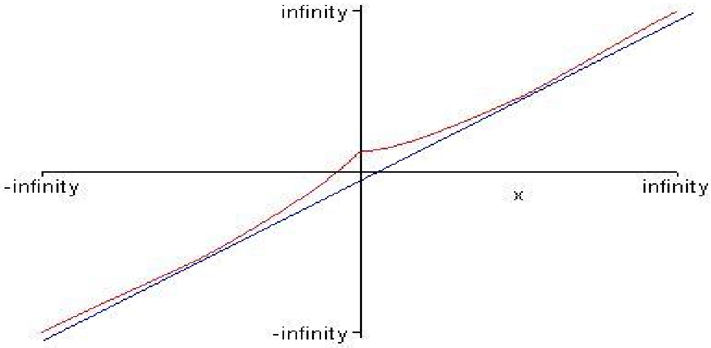
$$1 + \frac{4}{(2-x)^2} > 0$$

risulta soddisfatto per ogni $x < 0$. La funzione è allora sempre crescente in tutto il dominio.

Per concludere studiamo la derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{(2+x)^3} & \text{per } x > 0 \\ \dfrac{8}{(2-x)^3} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Entrambe le quantità sono sempre positive e quindi f risulta convessa separatamente per $x < 0$ e per $x \geq 0$. Il grafico della funzione è il seguente:


infinity
-infinity
x
infinity
-infinity