2) Risolvere l'equazione

$$iz^2 - 2\overline{z} - 2 - i = 0.$$

Ponendo $z = x + iy$ si ha $i(x+iy)^2 - 2(x-iy) - 2 - i = 0$ da cui

$$i(x^2+i^2y^2+2xyi)-2x+2iy-2-i = 0 \Leftrightarrow ix^2-iy^2-2xy-2x+2iy-2-i = 0$$

e separando la parte reale da quella immaginaria

$$-2(xy + x + 1) + i(x^2 - y^2 + 2y - 1) = 0.$$

Si deve avere, quindi, parte reale ed immaginaria uguale a zero cioè

$$\begin{cases} xy + x + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo

$$y^2 - 2y + (1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \pm \sqrt{1 - (1 - x^2)} = 1 \pm \sqrt{x^2} = 1 \pm |x|.$$

Se allora si considera $y = 1 + |x|$, sostituendo nella prima equazione,

si ha

$$\begin{cases} y = 1 + |x| \\ x(1 + x) + x + 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 + |x| \\ x(1 - x) + x + 1 = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 + |x| \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 + |x| \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione ammissibile è $x = 1 - \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$.

Se invece $y = 1 - |x|$ allora

$$\begin{cases} y = 1 - |x| \\ x(1-x) + x + 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 - |x| \\ x(1+x) + x + 1 = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - |x| \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 - |x| \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni ammissibili di questo sistema sono $x = 1 + \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$; $x = 1, y = 0$. Riepilogando le soluzioni dell'equazione sono: $z = -1$ e $z = 1 \pm \sqrt{2} + i(\mp\sqrt{2})$.