Utilizziamo la definizione di limite per provare che

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2+1} = 1.$$

Applicando la definizione bisogna provare che:

$\forall \varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in I\!R$ con $0 < |x| < \delta(\varepsilon)$ risulta $1 - \varepsilon \leq \sqrt{x^2+1} \leq 1 + \varepsilon$.

Osserviamo innanzitutto che la disequazione $1 - \varepsilon \leq \sqrt{x^2+1}$ è sempre verificata, basta dunque studiare la disequazione $\sqrt{x^2+1} \leq 1 + \varepsilon$.

Siccome la radice quadrata è sempre definita e $1 + \varepsilon > 0$ allora la disequazione data è equivalente a:

$$x^2 + 1 \leq (1+\varepsilon)^2 = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon \qquad \Longleftrightarrow$$
$$|x| \leq \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}.$$

Basta allora prendere $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}$.