

11) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso

$$\frac{1 + \cos t - i \sin t}{1 + \cos t + i \sin t}.$$

Razionalizziamo innanzitutto il denominatore:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos t - i \sin t}{1 + \cos t + i \sin t} &= \frac{1 + \cos t - i \sin t}{1 + \cos t + i \sin t} \cdot \frac{1 + \cos t - i \sin t}{1 + \cos t - i \sin t} = \\ &= \frac{1 + \cos^2 t - \sin^2 t + 2 \cos t - 2i \sin t - 2i \sin t \cos t}{1 + \cos^2 t + 2 \cos t + \sin^2 t} = \\ &= \frac{2 \cos^2 t + 2 \cos t - 2i \sin t - 2i \sin t \cos t}{2 + 2 \cos t} = \\ &= \frac{2(1 + \cos t)(\cos t - i \sin t)}{2(1 + \cos t)}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\Re \left(\frac{1 + \cos t - i \sin t}{1 + \cos t + i \sin t} \right) = \cos t \quad \Im \left(\frac{1 + \cos t - i \sin t}{1 + \cos t + i \sin t} \right) = -\sin t.$$