Esamineremo i seguenti due casi: a pari, a dispari. Chiamiamo con f_p la funzione nel primo caso, con f_d quella del secondo caso. Studiamo il comportamento della funzione $f = f_p = \frac{x^2+a}{x^2-x+b}$. Il denominatore di f_p è x^2-x+b. Il determinante Δ di questa equazione vale $\Delta = 1-4b$. Siccome b è un intero maggiore di 1 il determinante risulta sempre negativo e dunque il denominatore assume sempre il segno del coefficiente di x^2 (positivo). Questo fatto ci dice inoltre che f_p è sempre non negativa. Dunque $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.
Oserviamo che sia il numeratore che il denominatore sono due infiniti di ordine 2 e quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$$

dunque la funzione ammette asintoti orizzontali a $\pm\infty$.
La funzione f_p, essendo definita su tutto $\mathbb{R}$ non ha asintoti verticali. Studiamo ora la crescenza e la decrescenza di f_p:

$$\begin{aligned}
f_p'(x) &= -\frac{x^2-2x(b-a)-a}{(x^2-x+b)^2} \\
f_p'(x) &\geq 0 \Longleftrightarrow x^2-2x(b-a)-a \leq 0 \Longleftrightarrow \\
& b-a-\sqrt{(b-a)^2+a} \leq x \leq b-a+\sqrt{(b-a)^2+a}
\end{aligned}$$

Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$\begin{aligned}
f_p''(x) &= 2\frac{x^3-3x^2(b-a)-3ax+b^2+a-ab}{(x^2-x+b)^3} \\
f_p''(x) &\geq 0 \Longleftrightarrow x^3-3x^2(b-a)-3ax+b^2+a-ab \geq 0
\end{aligned}$$

Con queste informazioni e dando ad a, b valori particolari cerchiamo di disegnare alcune di queste funzioni: supponiamo ad esempio che $(a, b) = (8, 9)$. In questo caso f è definita su tutto $\mathbb{R}$, ha asintoti orizzontali, è non negativa. La sua derivata prima è

$$f'(x) = -\frac{x^2-2x-8}{(x^2-x+9)^2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 4.$$

Quindi f è crescente nell'intervallo $[-2, 4]$, altrove è decrescente, $x = -2$ è un punto di minimo, $x = 4$ è un punto di massimo. La sua derivata seconda è

$$f''(x) \quad = \quad 2\frac{x^3 - 3x^2 - 24x + 17}{(x^2 - x + 9)^3} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 - 3x^2 - 24x + 17 \geq 0$$

Si tratta di studiare ora il segno del polinomio di terzo grado $g(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 17$. Sappiamo che tale polinomio può avere uno oppure tre zeri reali, per cercare di determinarli studiamo g'.

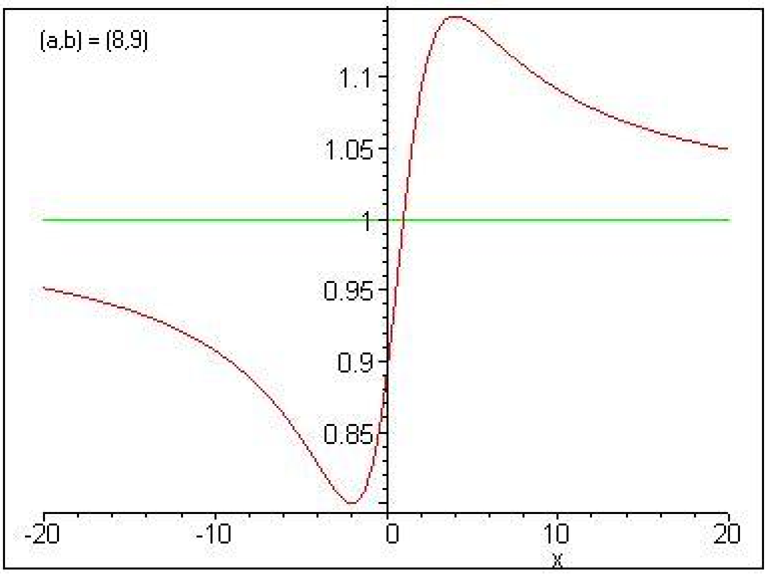
$$g'(x) \quad = \quad 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq -2 \ \cup \ x \geq 4.$$

Risulta

$$g(-2) > 0, \quad g(4) < 0, \quad \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

e dunque, per il teorema degli zeri, la funzione g ammette tre zeri reali, $x_1 < -2, x_2 \in]-2, 4[, x_3 > 4$.

Se $x < x_1$, oppure $x_2 < x < x_3$ la funzione f è concava, se $x_1 < x < x_2$ oppure $x > x_3$ la funzione f è convessa, i punti x_1, x_2, x_3 sono punti di flesso. A questo punto possiamo disegnare il grafico della funzione f:



Studiamo ora la funzione $f = f_d$. Il determinante del denominatore $x^2 - x - b$ è dato da $\Delta = 1 + 4b > 0$ e dunque la funzione non è definita nei punti $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4b})$. Pertanto $f_d : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4b})\} \to \mathbb{R}$.
Studiamo il segno di f_d. La funzione è positiva in $]-\infty, \frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4b})[\cup]\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4b}), +\infty[$, negativa in $]\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4b}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4b})[$.
Oserviamo che sia il numeratore che il denominatore sono due infiniti di ordine 2 e quindi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

dunque la funzione ammette asintoti orizzontali a $\pm\infty$.
Studiamo anche la disequazione $f_d(x) \geq 1$ per capire quando il grafico della funzione si trova al di sopra dell'asintoto.

$$\frac{x^2+a}{x^2-x-b} \quad \geq \quad 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2+a-x^2+x+b}{x^2-x-b} = \frac{x+a+b}{x^2-x-b} \geq 0$$

Per quanto riguarda gli asintoti verticali:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4b})^{\pm}} f_d(x) = \mp\infty;$$
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4b})^{\pm}} f_d(x) = \pm\infty.$$

Studiamo ora la crescenza e la decrescenza di f_d:

$$\begin{aligned} f_d'(x) &= -\frac{x^2+2x(b+a)-a}{(x^2-x-b)^2} \\ f_d'(x) &\geq 0 \Longleftrightarrow x^2+2x(b+a)-a \leq 0 \Longleftrightarrow x \text{ appartiene al dominio di } f_d \text{ e} \\ & -(b+a)-\sqrt{(b+a)^2+a} \leq x \leq -(b+a)+\sqrt{(b+a)^2+a} \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$f_d''(x) = 2\frac{x^3+3x^2(b+a)-3ax+b^2+a+ab}{(x^2-x-b)^3}$$

Con queste informazioni e dando ad a, b valori particolari cerchiamo di disegnare alcune di queste funzioni: supponiamo ad esempio che $(a, b) = (7, 8)$.

In tal caso $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{33})\} \to \mathbb{R}$ è definita da:

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - x - 8}.$$

Chiamiamo con $x_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33}) \sim -2.37$, $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33}) \sim 3.37$.

f ammette asintoti verticali in x_1, x_2, ammette asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$. Rispetto all'asintoto orizzontale $y = 1$

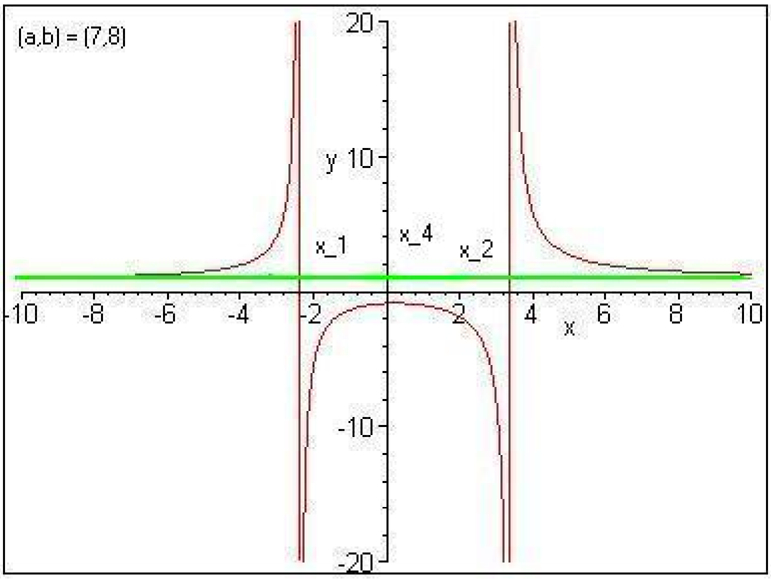
$$\frac{x^2+7}{x^2-x-8} \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2+7-x^2+x+8}{x^2-x-8} = \frac{x+15}{x^2-x-b} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$-15 < x < x_1 \quad \cup \quad x > x_2$$

Inoltre

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2+30x-7}{(x^2-x-8)^2} \geq 0 \Longleftrightarrow x \text{ appartiene al dominio di } f_d \text{ e} \\ & \quad x_3 = -15 - \sqrt{232} \leq x \leq -15 + \sqrt{232} = x_4 \\ f''(x) &= 2\frac{x^3+45x^2-21x+127}{(x^2-x-8)^3} \end{aligned}$$

Osserviamo che $x_3 \sim -30.23, x_4 \sim 0.23$ e dunque $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$. Quindi la funzione f risulta crescente se $x_3 < x < x_1$, oppure se $x_1 < x < x_4$; decrescente se $x < x_3$, oppure se $x_4 < x < x_2$, oppure se $x > x_2$; x_3 è un punto di minimo relativo, x_4 è un punto di massimo relativo.

Non studiamo il segno di f'' per non appesantire i calcoli e perchè la concavità e la convessità della funzione risultano evidenti già con le informazioni fin qui ottenute. Riportiamo ora il grafico della funzione f evidenziando in una seconda immagine il comportamento per $x < -15$, intervallo in cui la funzione si trova al di sotto dell'asintoto.



Ecco ora un ingrandimento della funzione per $x < -15$.