Calcoliamo il seguente limite adoperando i teoremi di L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \cot^2 x.$$

Questo limite conduce, con un passaggio diretto, alla forma indeterminata $\infty - \infty$. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \cot^2 x &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cot^2 x} - x^2}{\frac{x^2}{\cot^2 x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1 - x^2 \cot^2 x}{\cot^2 x}}{\frac{x^2}{\cot^2 x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2 \cot^2 x}{x^2}
\end{aligned}$$

e quindi si è ricondotti allo studio del limite del rapporto di due infinitesimi. Verifichiamo che si può adoperare la regola di L'Hospital.

Le due applicazioni al numeratore ed al denominatore risultano continue e derivabili in un intorno del punto zero, inoltre la derivata del denominatore, essendo uguale a $2x$, risulta diversa da zero in un intorno di zero escluso il punto stesso. Allora adoperando la regola di L'Hospital si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \quad & \frac{1 - x^2 \cot^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x \cot^2 x + x^2 \frac{2\cot x}{\sin^2 x}}{2x} \\
= \; & \lim_{x\to 0} - \cot^2 x + x\frac{\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + x\frac{\cos x}{\sin^3 x} = \\
= \; & \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x \cos^2 x + x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \cos x \frac{-\sin x \cos x + x}{\sin^3 x} = \\
= \; & \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x \cos x + x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos^2 x + \sin^2 x + 1}{3\sin^2 x \cos x} = \\
= \; & \lim_{x\to 0} \frac{-1 + \sin^2 x + \sin^2 x + 1}{3\sin^3 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{3\sin^2 x \cos x} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$