Studiamo il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{1}{n}-1].$$

Proviamo che si tratta di una serie a segni alterni. Poniamo $a_n = e^{\frac{1}{n}}\cos\dfrac{1}{n}-1$. Denotiamo ora con $f(x)$ la funzione$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}-1$ con $x \geq 1$, risulta $a_n = f(1/n)$. Se studiamo la derivata prima di f otteniamo che $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}[\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}]$. Risulta $f' \leq 0$ in $[\dfrac{4}{\pi},\infty[$. Pertanto a_n è non negativa ($\inf_n a_n = 0$) e definitivamente monotona non crescente; inoltre $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Per il criterio di Leibnitz dunque la serie converge. Studio della convergenza assoluta. Per determinare l'ordine di infinitesimo di a_n basta considerare i polinomi di Taylor di $e^{\frac{1}{n}}$ e di $\cos\frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n}} &= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \\ \cos\frac{1}{n} &= 1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

ed eseguire il loro prodotto:

$$e^{\frac{1}{n}}\cos\frac{1}{n}-1 = \frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})$$

Allora per il criterio del confronto asintotico la serie dei valori assoluti diverge. Pertanto la serie data converge semplicemente.