Analisi Matematica II - 7 Gennaio 2013

---

1) Determinare il baricentro di un materiale di densità $\delta(x,y,z) = x^2+y^2$ di forma cilindrica con base (sul piano $z=0$) data dal disco di centro (0,0,0) e raggio r ed altezza h.

2) Dobbiamo costruire un recipente per conservare 100 mc di acqua a forma di parallelepipedo e senza coperchio. Siccome il materiale è costoso dobbiamo costruire questo contenitore in modo che la sua superficie sia la più piccola possibile. Quanto devono misurare gli spigoli del parallelepipedo?

3) Determinare, se esistono, le soluzioni del seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' + y = 0 \\ y(1) = 0, y(e) = e^{-1} \end{cases}$$

Svolgimento

1) La figura ha come asse di simmetria l'asse z, anche la funzione densità è simmetrica rispetto a questo asse, dunque il baricentro si troverà su tale asse. Il cilindro C in coordinate cilindriche è dato da: $[0,r] \times [0,2\pi] \times [0,h]$ e dunque:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_C \delta(x,y,z)dxdydz = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} dt \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{1}{2}\pi h r^4, \\ z_G &= \frac{1}{m}\int_0^h zdz \int_0^{2\pi} dt \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

2) Denotiamo con x, y gli spigoli della base e con z l'altezza del contenitore. La funzione da minimizzare è la funzione superficie $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$, soggetta al vincolo $xyz = 100$, con x, y, z numeri positivi. Ricaviamo xz e yz dal vincolo e sostituiamoli nella funzione superficie. Otterremo

$$G(x,y) = xy + \frac{200}{y} + \frac{200}{x}.$$

Calcoliamone i minimi liberi nel primo quadrante aperto. Siccome la funzione G è definita in un aperto e in tale insieme è di classe almeno C^2 i minimi liberi annulleranno il gradiente di G. Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= y - \frac{200}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2y = 200 \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= x - \frac{200}{y^2} = 0 \Longleftrightarrow xy^2 = 200. \end{aligned}$$

Dunque dovrà risultare $x = y$, se imponiamo tale condizione nella prima equazione otteniamo $x = y = \sqrt[3]{200}$. Studiamo la natura di questo punto utilizzando il metodo della matrice Hessiana:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{400}{x^3}, \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\sqrt[3]{200}, \sqrt[3]{200}) = 2 \\
\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x,y) &= 1 \\
\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{400}{y^3}, \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\sqrt[3]{200}, \sqrt[3]{200}) = 2.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$H(\sqrt[3]{200}, \sqrt[3]{200}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\sqrt[3]{200}, \sqrt[3]{200}) = 2 > 0.$$

Il punto dato è allora l'unico punto di minimo per G, ne segue che $(\sqrt[3]{200}, \sqrt[3]{200}, \sqrt[3]{25})$ sarà il punto di minimo vincolato cercato per S. Il contenitore dunque avrà base quadrata di lato $\sqrt[3]{200}$ m ed altezza $\sqrt[3]{25}$ m.

3) Si tratta di una equazione differenziale del tipo di Eulero. Se imponiamo la sostituzione $x = e^z$ otteniamo l'eqnazione lineare a coefficienti costanti

$$y''(z) + 2y'(z) + y(z) = 0, y(z=0) = 0, y(z=1) = e^{-1}.$$

L'equazione caratteristica associata alla eq. omogenea è $a^2 + 2a + 1 = 0$. L'integrale generale della equazione omogenea è dato da:

$$y(z) = c_1 e^{-z} + c_2 ze{-}z.$$

Se imponiamo il primo dato iniziale otteniamo $c_1 = 0$. Se deriviamo $y(z) = c_2 ze{-}z$ ed imponiamo il secondo dato otteniamo $c_2 = 1$, dunque la soluzione cercata è:

$$y(z) = ze^{-z}, \qquad y(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Analisi Matematica II - 4 Febbraio 2013

1) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_A x(y^2+z^2)dxdydz,$$

quando $A = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1, x^2 \ge y^2+z^2, x \ge 0\}$.

2) Determinare volume e baricentro del solido omogeneo E di densità 1 ottenuto per rotazione intorno all'asse z della regione piana

$$C = \left\{(x,z) : x^2-1 \le z \le (x-1)^2, 0 \le x \le 1\right\}.$$

3) Determinare, se esistono, le soluzioni del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2x^2y'' + 2xy' - 2y = x \\ y(1) = 0, y'(1) = 0 \end{cases}$$

---

1) Sia la funzione integranda che l'insieme A sono funzioni di y^2+z^2. Passiamo allora a coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} y = r\cos t \\ z = r\sin t \\ r^2 \le x^2 \le 1-r^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = r\cos t \\ z = r\sin t \\ r \le x \le \sqrt{1-r^2} \end{cases} \quad t \in [0,2\pi], r \in I,$$

dove I è individuato dalla catena di disequazioni:

$$y^2+z^2 \le x^2 \le 1-(y^2+z^2) \Longleftrightarrow 2(y^2+z^2) = 2r^2 \le 1.$$

Pertanto $I = [0, 1/\sqrt{2}]$. Risulta allora

$$\begin{aligned} \iiint_A x(y^2+z^2)dxdydz &= \int_0^{1/\sqrt{2}} r^3 dr \int_0^{2\pi} dt \int_r^{\sqrt{1-r^2}} xdx = \\ &= \pi \int_0^{1/\sqrt{2}} r^3(1-2r^2)dr = \frac{\pi}{48}. \end{aligned}$$

Per disegnare l'insieme A facendo uso di maple basta eseguire i comandi:

- addcoords(x_cylindrical, [x, r, t], [x, r*cos(t), r*sin(t)]);

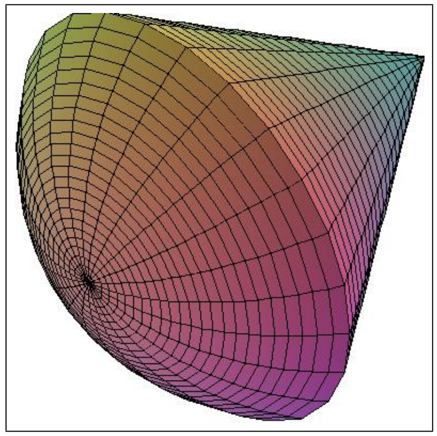


Figura 1: grafico dell'insieme A

- plot3d([r, sqrt(1-r^2)], r = 0 .. 1/sqrt(2), t = 0 .. 2*Pi, coords = x_cylindrical);

Il grafico che si ottiene è il seguente:

2) Il volume dell'insieme E si ottiene usando il teorema di Guldino:

$$V(E) = 2\pi \iint_C x dx dz = 2\pi \int_0^1 x dx \int_{x^2-1}^{(x-1)^2} dz = 4\pi \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{2}{3}\pi.$$

Per ragioni di simmetria $x_E = y_E = 0$, basterà quindi calcolare solo la terza coordinata:

$$z_E = \frac{1}{V(E)} \iiint_E z dx dy dz.$$

Per calcolare questo integrale multiplo come un integrale triplo dobbiamo scrivere l'insieme E in una forma diversa. Osserviamo intanto che $z \in [-1, 1]$. Se $z \in [-1, 0]$ allora $x = r(z) = \sqrt{z+1}$, pertanto

$$E_1 := \begin{cases} x = \sqrt{z+1} \cos t \\ y = \sqrt{z+1} \sin t \quad t \in [0, 2\pi], -1 \le z \le 0. \\ z = z \end{cases}$$

Mentre se $z \in [0, 1]$ allora risulta $x^2 - 2x + 1 - z = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{z}$. Delle due l'unica soluzione accettabile è $x = 1 - \sqrt{z}$ e dunque

$$E_2 := \begin{cases} x = (1 - \sqrt{z}) \cos t \\ y = (1 - \sqrt{z}) \sin t \quad t \in [0, 2\pi], 0 \le z \le 1. \\ z = z \end{cases}$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
z_E &= \frac{1}{V(E)}\left(\iiint_{E_1} z dx dy dz + \iiint_{E_2} z dx dy dz\right) = \\
&= \frac{1}{V(E)}\left(\int_{-1}^{0} z dz \iint_{x^2+y^2\le z+1} dx dy + \int_{0}^{1} z dz \iint_{x^2+y^2\le(1-\sqrt{z})^2} dx dy\right) = \\
&= \frac{1}{V(E)}\left(\int_{-1}^{0} \pi z(1+z) dz + \int_{0}^{1} \pi z(1-\sqrt{z})^2 dz\right) = \\
&= \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{0} (z^2+z) dz + \int_{0}^{1} (z^2-2z\sqrt{z}+z) dz\right) = \\
&= \frac{3}{2}\left(\left[\frac{z^3}{3}+\frac{z^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{z^3}{3}-\frac{4}{5}z^2\sqrt{z}+\frac{z^2}{2}\right]_{0}^{1}\right) = -\frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

Il grafico dell'insieme E con maple si ottiene con i comandi:

- p1 := plot3d(sqrt(z+1), t= 0 .. 2*Pi, z = -1 .. 0, coords = cylindrical, scaling = constrained):
- p2 := plot3d(1-sqrt(z), t= 0 .. 2*Pi, z = 0 .. 1, coords = cylindrical, scaling = constrained):
- display({ p1, p2});

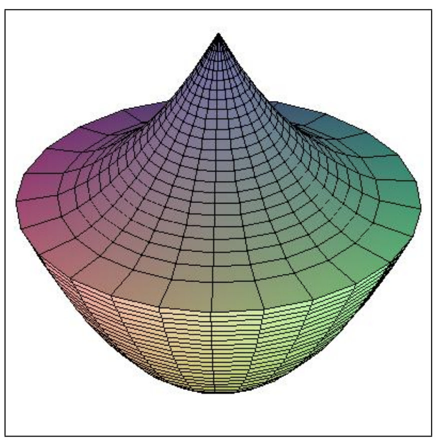


Figura 2: grafico dell'insieme E

3) L'equazione differenziale che compare nel problema di Cauchy è del tipo di Eulero. Con la sostituzione $x = e^z$ si ottiene l'equazione differenziale a coefficienti costanti:

$$2y''(z) - 2y(z) = e^z.$$

L'equazione caratteristica associata a tale equazione ($a^2 - 1 = 0$) ha come soluzioni $a = \pm 1$ e pertanto l'integrale generale della equazione omogenea è dato da:

$$y(z) = c_1 e^{-z} + c_2 e^z.$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa osserviamo che $a = 1$ è soluzione caratteristica della equazione omogenea con molteplicità 1 e dunque cerchiamo una soluzione del tipo:

$$h(z) \quad = \quad a z e^z.$$

Dunque

$$\begin{aligned} h'(z) &= a(1+z)e^z, \qquad h''(z) = a(2+z)e^z \\ & e^z[2a(2+z) - 2az] = e^z \iff a = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

L'integrale generale della equazione completa è:

$$y(z) = c_1 e^{-z} + c_2 e^z + \frac{1}{4} z e^z.$$

Se imponiamo il dato iniziale $y(z=0) = 0, y'(z=0) = 0$ e poniamo $z = \ln x$ otteniamo:

$$y(x) = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}x \ln x + \frac{1}{8x}.$$

Analisi Matematica II-10 Giugno 2013

1) Calcolare il seguente integrale curvilineo facendo uso del Teorema di Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma^+} (z^2+y)dx + zdy + ydz$$

dove $\Sigma = \{(x,y,z) : z = 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2) Sia $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$V(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$$

e γ la curva individuata dal bordo di

$$D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x+y+z = 0\}.$$

Dire se V è conservativo, se si calcolare un potenziale di F e l'integrale di V lungo la curva γ.

3) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = z^2 e^{xy}$ nell'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Svolgimento

1) La forma differenziale $(z^2+y)dx + zdy + ydz$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, ma non è esatta. Infatti, posto $F = ((z^2+y), z, y)$, risulta:

$$\text{rot}F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2+y & z & y \end{vmatrix} = 2z\vec{j} - \vec{k} = (0, 2z, -1).$$

$n = (2x, 2y, 1)$ e dunque

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma^+} (z^2+y)dx + zdy + ydz &= \int_\Sigma \text{rot}F \cdot \frac{n}{\|n\|} dS = \\ &= \iint_{x^2+y^2} 4y(1-x^2-y^2) - 1)dxdy = \\ &= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 [4r(1-r^2)\sin t - 1] r dr = -\pi. \end{aligned}$$

2) Risulta $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e

$$\mathrm{rot}V = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (0,0,0).$$

Ne segue che il campo è irrotazionale e dunque conservativo (visto che è definito in un convesso). Calcoliamo ora un potenziale di V. Se U è un potenziale dovrà risultare:

$$U(x,y,z) = \int_0^x 0dt + \int_0^y xdt + \int_0^z (x+y)dt \quad = \quad xy + xz + yz + c.$$

Siccome la curva γ è chiusa: $(x = \cos t, y = \sin t, z = -\cos t - \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi)$ ne segue che l'integrale cercato è nullo.

3) A è un compatto, $f \in C(A)$ e dunque tali punti esistono per il teorema di Weierstrass. I punti del tipo: $(x,y,0)$ con $x^2+y^2 \leq 1$ sono tutti punti di minimo assoluto per la funzione f che in tali punti assume valore nullo. Risulta poi $f \in C^\infty(A^\circ)$ e dunque possiamo studiare i punti interni di A con il teorema di Fermat.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = yz^2e^{xy} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2e^{xy} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2ze^{xy} \end{cases} = (0,0,0) \Longleftrightarrow z = 0, x^2+y^2 < 1.$$

Questi punti li abbiamo già studiati con la regola del segno. Cerchiamo allora i punti di massimo e di minimo assoluti sulla frontiera di A: $\mathrm{Fr}(A) = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Sia $G(x,y,z,a) = z^2e^{xy} - a(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Risulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = yz^2e^{xy} - 2ax \\ \frac{\partial G}{\partial y} = xz^2e^{xy} - 2ay \\ \frac{\partial G}{\partial z} = 2ze^{xy} - 2az \\ \frac{\partial G}{\partial a} = x^2+y^2+z^2-1 \end{cases} = (0,0,0,0)$$

Dalla terza equazione otteniamo $z = 0$ oppure $e^{xy} = a$. Se $z = 0$ allora dalla quarta equazione $(x = \cos t, y = \sin t)$ e dunque dalle prime due equazioni risulta $a = 0$. I punti stazionari di G sarebbero $(\cos t, \sin t, 0, 0)$. (Le terne $(\cos t, \sin t, 0)$ le abbiamo già studiate, sono di minimo assoluto per f). Se invece $a = e^{xy}$ allora $a \neq 0$ e dunque dalla prima equazione se $y = 0$ allora $x = 0$ e dunque $z = \pm 1$, se invece imponiamo $x = 0$ dalla seconda equazione otteniamo ancora $y = 0, z = \pm 1$. Nei punti $(0,0,\pm 1)$ la funzione assume il valore 1. Per il teorema di Weierstrass questi sono i punti di massimo assoluto per f. Riepilogando i punti di minimo assoluto sono i punti $(x, y, 0)$ con $x^2 + y^2 \leq 1$, quelli di massimo assoluto sono $(0, 0, \pm 1)$. Proviamo a visualizzare con maple i punti di A di massimo e di minimo assoluti per f. Non possiamo disegnare direttamente il grafico di f perchè si troverebbe in $\mathbb{R}^4$, disegniamo allora i punti della sfera che si trovano nel primo ottante associando ad ogni punto P il colore individuato dal valore della funzione f valutata in P. (Non riusciamo a disegnare la palla piena perché le opzioni filled=true e color= $f(x, y, z(x, y))$ non sono compatibili tra di loro in Maple 13)

$$plot3d(sqrt(1-x^2-y^2), x = 0..1, y = 0..sqrt(1-x^2), color = (1-x^2-y^2)*exp(x*y), axes = boxed);$$

Il grafico che si ottiene è il seguente: i punti di minimo risultano colorati in arancione, quelli di massimo in rosso.

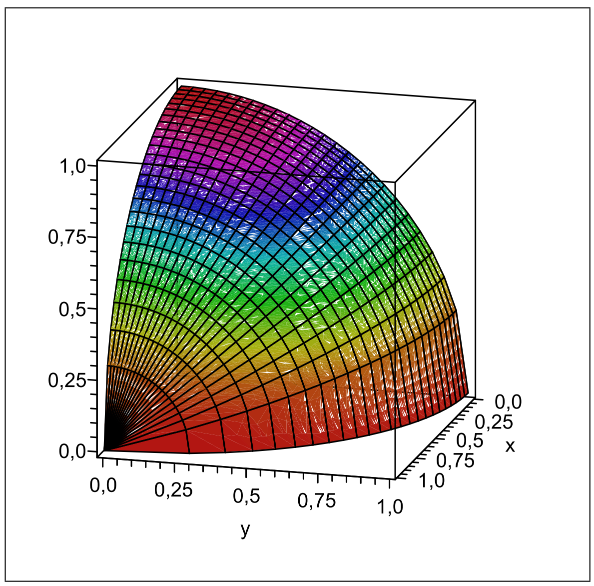


Figura 3: grafico dell'insieme A contenuto nel I ottante, con i punti colorati secondo la legge $f(x, y, z(x, y))$

Analisi Matematica II - 24 Giugno 2013

1) Calcolare il seguente integrale curvilineo facendo uso delle formule di Green

$$\frac{1}{9} \cdot \int_C x^2 y^3 dx + y dy$$

dove $C = +Fr(A)$, con $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

2) Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = (e^x[\sin(x + y) + \cos(x + y)], e^x \cos(x + y))$$

e sia $\gamma_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva parametrica di equazioni $\gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt), n \in \mathbb{N}$. Dire se F è conservativo ed in caso affermativo calclare un potenziale e calcolare l'integrale di F lungo γ_n.

3) Studiare gli estremi vincolati della funzione $f(x, y) = \sqrt{2x^2 - xy + y^2}$ lungo la retta $x + y = 8$.

Svolgimento

1) Il campo vettoriale $F = (x^2y^3, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ma non è conservativo perché non è irrotazionale. L'integrale dunque dipende dal percorso scelto.

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \cdot \int_C x^2 y^3 dx + y dy &= \frac{1}{9} \cdot \iint_A \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x^2 y^3}{\partial y} dxdy = -\frac{1}{9} \cdot \iint_A 3x^2 y^2 dxdy = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt \int_1^2 r^5 dr = -\frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt \left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2 = -\frac{7}{8}\pi. \end{aligned}$$

2) Risulta $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = e^x[\cos(x + y) - \sin(x + y)].$$

Ne segue che il campo è irrotazionale e dunque conservativo (visto che è definito in un convesso). Calcoliamo ora un potenziale di F. Se U è un potenziale dovrà risultare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= e^x \cos(x + y) \\ U(x, y) &= \int e^x \cos(x + y) dy = e^x \sin(x + y) + g(x) \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= e^x[\sin(x + y) + \cos(x + y)] + g'(x) = e^x[\sin(x + y) + \cos(x + y)] \end{aligned}$$

se e solo se $g(x) = c$. La famiglia dei potenziali di F è data da $e^x \sin(x+y) + c$. Calcoliamo ora l'integrale curvilineo di F lungo γ_n. Se n è pari la curva è chiusa e dunque l'integrale è nullo; se n è dispari

$$\int_{\gamma_n} X dx + Y dy = U(-1,0) - U(1,0) = -(e + e^{-1}) \sin 1.$$

3) Innanzitutto $f \in C(\mathbb{R}^2)$ essendo

$$2x^2 - xy + y^2 = 2(x - \frac{y}{4})^2 + \frac{7}{8}y^2 \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Se sostituiamo il vincolo $y = 8 - x$ nella legge f otteniamo $g(x) = f(x, 8-x) = 2\sqrt{x^2 - 6x + 16}$ ($x^2 - 6x + 16 > 0$ sempre perché $\Delta < 0$). Siccome

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty$$

ne segue che f non può avere massimi vincolati. Inoltre $g'(x) \geq 0 \iff x \geq 3$. Il punto $x = 3$ è dunque di minimo per la g, ed è assoluto perché la funzione g è decrescente in $]-\infty, 3[$, mentre è crescente in $]3, \infty[$. Ne segue che il punto $(3,5)$ è il punto di minimo vincolato per la f.

Analisi Matematica II - 8 Luglio 2013

1) Calcolare il seguente integrale facendo uso del teorema della divergenza:

$$\int_{\mathrm{Fr}(D)} F \cdot n_e dS$$

quando $F = (x^3, y^3, z^3)$ e $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \ge 0\}$.

2) Calcolare il baricentro del solido omogeneo posto nel primo ottante e delimitato dalla superficie cilindrica $z = x^2/3$ e dai piani di equazione $z = 0, y = 0, 2x + 3y - 6 = 0$.

3) Tra tutti i cilindri iscritti nella sfera di raggio R trovare quello di volume massimo.

Svolgimento

1) Per il teorema della divergenza risulta:

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Fr}(D)} F \cdot n_e dS &= \iiint_D \mathrm{div} F dxdydz = 3\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \\ &= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin t dt \int_0^1 r^4 dr = \frac{6}{5}\pi.\end{aligned}$$

2) Visto che il solido è omogeneo le coordinate del suo baricentro dipendono solo dalla forma del solido. Risulta

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\, 0 \le x \le 3,\, 0 \le y \le 2 - \frac{2}{3}x,\, 0 \le z \le \frac{x^2}{3}\}$$

e dunque

$$\begin{aligned}V(C) &= \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{\frac{x^2}{3}} dz = \frac{3}{2} \\ x_C &= \frac{1}{V(C)}\int_0^3 xdx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{\frac{x^2}{3}} dz = \frac{9}{5} \\ y_C &= \frac{1}{V(C)}\int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} ydy \int_0^{\frac{x^2}{3}} dz = \frac{2}{5} \\ z_C &= \frac{1}{V(C)}\int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{\frac{x^2}{3}} zdz = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

3) Sia $x^2 + y^2 = r^2$ un cilindro iscritto nella sfera. Dovrà risultare $r < R$ e $z^2 = R^2 - r^2$. Nel risulta che l'area di base del cilindro è pari a πr^2 mentre la sua altezza è data da $2\sqrt{R^2 - r^2}$. Il volume del cilindro iscritto nella sfera è pari a:

$$\begin{aligned} V(r) &= 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}, \\ V'(r) &= 2\pi \left(r\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) = \frac{2\pi r}{\sqrt{R^2 - r^2}} (R^2 - 2r^2) \geq 0 \Longleftrightarrow \\ & \quad 0 < r \leq \frac{R}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Dunque il volume massimo si ottiene quando il raggio r del cilindro è pari a $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

Analisi Matematica II - 9 Settembre 2013

Sia $\alpha(\cdot) = 1$ se il numero delle lettere che compongono la parola $(\cdot)$ è dispari, altrimenti vale 2. Poniamo $a = \alpha(nome)$, $b = \alpha(cognome)$, $c = |\alpha(nome) - \alpha(cognome)| + 1$.

1) Si consideri un filo disposto lungo il perimetro del triangolo i cui vertici sono $A = (0,0), B = (L,0), C = (L,L)$. La densità del filo è data dalla formula:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} ax & 0 \leq x \leq L, y = 0 \\ by & x = L, 0 \leq y \leq L \\ \frac{c}{2}\sqrt{(x-\frac{L}{2})^2 + (y-\frac{L}{2})^2} & y = x \end{cases}$$

Calcolare il baricentro del filo e il momento di inerzia del filo rispetto all' asse passante per AC.

2) Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (x+y, y+z, -2z)$ uscente dalla superficie Σ definita da $x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1$.

3) Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

converge uniformemente su ogni intervallo limitato, ma non converge assolutamente in ogni punto $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento

1) La massa del filo $\mathcal{C} = AB \cup BC \cup CA$ è data da:

$$m = \int_{\mathcal{C}} \delta(x,y) ds.$$

Visto che si tratta di un integrale in ds non è rilevante il verso di percorrenza del filo e quindi:

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^L atdt + \int_O^L btdt + \frac{c}{2}\int_0^L \sqrt{2(t-\frac{L}{2})^2}\sqrt{2}dt = \\
&= \frac{L^2}{2}(a+b) + c\int_0^L \left|t-\frac{L}{2}\right| dt = \frac{L^2}{4}(2a+2b+c); \\
x_G &= \frac{1}{m}\int_{\mathcal{C}} x\delta(x,y)ds = \frac{1}{m}\left(\int_0^L at^2dt + \int_0^L Lbtdt + c\int_0^L t\left|t-\frac{L}{2}\right| dt\right) \\
&= \frac{1}{m}\left\{L^3(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}) + c\int_0^{L/2} t\left(\frac{L}{2}-t\right)dt + c\int_{L/2}^L t\left(t-\frac{L}{2}\right)dt\right\} = \\
&= \frac{4}{L^2(2a+2b+c)}\cdot L^3(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{c}{8}) = \frac{8a+12b+3c}{6(2a+2b+c)}L \\
y_G &= \frac{1}{m}\int_{\mathcal{C}} y\delta(x,y)ds = \frac{1}{m}\left(\int_0^L bt^2dt + c\int_0^L t\left|t-\frac{L}{2}\right| dt\right) = \\
&= \frac{4}{L^2(2a+2b+c)}\cdot L^3\left(\frac{b}{3}+\frac{c}{8}\right).
\end{aligned}
$$

Calcoliamo infine il momento di inerzia del filo rispetto all'asse AC. Sia $d((x,y),I)$ la distanza del punto $(x,y)\in\mathcal{C}$ dall'asse I, risulta:

$$
\begin{aligned}
d((t,0),AC) &= \frac{t}{\sqrt{2}}, \qquad d((L,t),AC) = \frac{L-t}{\sqrt{2}}, \qquad d((t,t),AC) = 0 \quad \forall\, t\in[0,L] \\
I_{AC} &= \int_{\mathcal{C}} d^2((x,y),I)\cdot\delta(x,y)ds = \int_0^L \frac{t^2}{2}\cdot atdt + \int_0^L \frac{(L-t)^2}{2}\cdot btdt = \\
&= \frac{a}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^L + \frac{b}{2}\left[\frac{L^2t^2}{2}+\frac{t^4}{4}-\frac{2Lt^3}{3}\right]_0^L = \frac{L^4}{8}\left(a+\frac{b}{3}\right).
\end{aligned}
$$

2) Possiamo calcolare il flusso del vettore F uscente dalla superficie cilindrica direttamente o facendo uso del teorema della divergenza. Calcolandolo direttamente si ottiene:

$$
\Sigma := \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \quad t\in[0,2\pi], z\in[-1,1], \\ z = z \end{cases} \qquad dS = dtdz, \qquad n_e = (\cos t, \sin t, 0)
$$

e dunque

$$
\begin{aligned}
\int_\Sigma F\cdot n_e dS &= \int_{-1}^1 dz\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t, \sin t+z, -2z)\cdot(\cos t,\sin t,0)dt = \\
&= \int_{-1}^1 dz\int_0^{2\pi}(1+\sin t\cos t + z\sin t)\,dt = 4\pi.
\end{aligned}
$$

Se invece vogliamo calcolarlo facendo uso del teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ dobbiamo considerare la regione chiusa $T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 1\}$. Risulta $\mathrm{Fr}(T) = \Sigma \cup \Sigma_0$ dove $\Sigma_0 = \{(x, y, \pm 1), x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dunque

$$\int_\Sigma F \cdot n_e dS \;\; = \;\; \iiint_T divF dxdydz - \int_{\Sigma_0} F \cdot n_e dS.$$

Risulta $divF = 1 + 1 - 2 = 0$, la normale esterna ai punti $(x, y, 1)$ è $(0, 0, 1)$, quella ai punti $(x, y, -1)$ è $(0, 0, -1)$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int_\Sigma F \cdot n_e dS \;\; &= \;\; -\int_{\Sigma_0} F \cdot n_e dS = -\int_{(x,y,1):x^2+y^2\leq 1} (x + y, y + 1, -2) \cdot (0, 0, 1) dS + \\ &- \int_{(x,y,-1):x^2+y^2\leq 1} (x + y, y - 1, 2) \cdot (0, 0, -1) dS = 4\pi.\end{aligned}$$

3) Sia A un insieme limitato e sia $k = \sup_{x\in A} |x|$. La serie data converge uniformemente se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_A |R_n(x)| = 0.$$

La serie è a segni alterni e dunque, per il criterio di Leibnitz,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_A |R_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \sup_A \frac{x^2 + n + 1}{(n + 1)^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k^2 + n + 1}{(n + 1)^2} = 0.$$

Per quanto riguarda la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + n}{n^2}$$

osserviamo che il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine 1 e dunque diverge per il criterio del confronto asintotico.

Analisi Matematica II - 20 Novembre 2013

1) Calcolare il volume della regione

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}.$$

2) La temperatura di un corpo è data dalla funzione

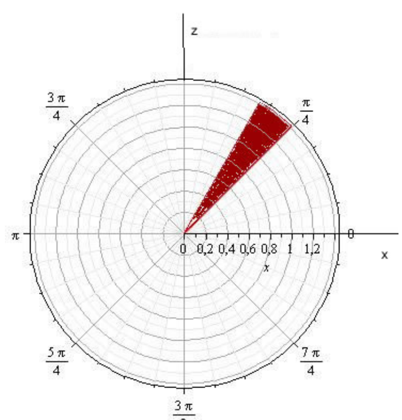
$$f(x, y) = \frac{140 + 30x^2 - 60x + 120y^2}{8 + x^2 - 2x + 4y^2}.$$

Determinare, se esiste, la temperatura minima.

3) Calcolare il baricentro dell'arco di cicloide $r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), 0 \leq t \leq \pi$, di densità uguale ad uno.

Svolgimento

1) L'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$. è la parte dello spazio che risulta interna alla sfera di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$ e compresa fra i semiconi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$. Questa figura è ottenuta ruotando intorno all'asse z l'insieme D (contenuto nel I quadrante del piano $y = 0$) dato da: $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq z \leq \sqrt{3}|x|,\ x^2 + z^2 \leq 2,\ x \geq 0\}$.



L'insieme D in coordinate polari diventa: $D_1 = [0, \sqrt{2}] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$. Per il teorema di Guldino risulta allora:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(E) &= 2\pi \iint_D x dx dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos t dt = \\ &= 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} [\sin t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

2) Osserviamo innanzitutto che f è un rapporto di polinomi ed il denominatore non si annulla mai. Se infatti proviamo a risolvere l'equazione $8 + x^2 - 2x = -4y^2$ possiamo notare che l'equazione di secondo grado in x ha $\Delta < 0$ e dunque assume sempre il segno del coefficiente di x^2: $(+)$, mentre il secondo membro è sempre non positivo. Dunque $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, per determinare, se esiste il minimo di f applichiamo allora il teorema di Fermat.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{200(x-1)}{(8 + x^2 - 2x + 4y^2)^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{800y}{(8 + x^2 - 2x + 4y^2)^2} = 0 \end{cases} \iff (x = 1, y = 0).$$

Pertanto l'unico candidato è il punto $(1, 0)$. Studiamolo con il metodo della matrice Hessiana.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{200(4 + 6x - 3x^3 + 4y^2)}{(8 + x^2 - 2x + 4y^2)^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{-3200(x-1)y}{(8 + x^2 - 2x + 4y^2)^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{800(1 + 2x + x^2 - 12y^2)}{(8 + x^2 - 2x + 4y^2)^3} \end{aligned}$$

La matrice Hessiana in $(1, 0)$ vale

$$\begin{pmatrix} \frac{200}{49} & 0 \\ 0 & \frac{800}{49} \end{pmatrix}.$$

Questo ci dice che f ha un minimo relativo in $(1, 0)$, ora dobbiamo provare che è anche assoluto. Proviamo allora che $f(x, y) \geq f(1, 0)$ in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$. Osserviamo che il denominatore di f assume valori solamente positivi: infatti la funzione a denominatore è continua e, per il teorema di conservazione della connessione, manda $\mathbb{R}^2$ in un connesso.

Se assumesse sia valori positivi che negativi, allora dovrebbe anche annullarsi e questo non è possibile. In $(0,0)$ il denominatore assume valore 8 e dunque il denominatore è sempre positivo.

$$\frac{140+30x^2-60x+120y^2}{8+x^2-2x+4y^2} \geq \frac{110}{7} \Longleftrightarrow$$
$$7(140+30x^2-60x+120y^2) \geq 110(8+x^2-2x+4y^2)$$
$$100(1+x^2-2x+4y^2) \geq 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2+4y^2 \geq 0$$

e questa ultima disuguaglianza è vera sempre.

3) La curva è di calsse C^1 e $x'(t) = 1-\cos t, y'(t) = \sin t$. Siccome la densità è uguale ad 1 risulta:

$$\begin{aligned}
m &= L_C = \int_0^\pi \sqrt{2-2\cos t}\, dt = 2\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\, dt = 2\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 4 \\
x_G &= \frac{1}{m}\int_0^\pi (t-\sin t)\sqrt{2-2\cos t}\, dt = \frac{1}{2}\left\{\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}\, dt - \int_0^\pi \sin t \sin\frac{t}{2}\, dt\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[-2t\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi + 2\int_o^\pi \cos\frac{t}{2}\, dt\right\} - \int_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\, dt = \\
&= \left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^\pi \overset{(\sin\frac{t}{2}=v)}{-} \int_0^1 2v^2 dv = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\
y_G &= \frac{1}{m}\int_0^\pi (1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\, dt = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Analisi Matematica II - 13 Gennaio 2014

---

1) Si calcoli la serie di Fourier della funzione $f(x) = x \sin x$, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. [Sugg.: si rammenti che, per $n \geq 2$, si ha $\int_0^\pi \sin nx \sin x dx = \int_0^\pi \cos nx \cos x dx = 0$.]

2) E' data nello spazio $\mathbb{R}^3$ la forma differenziale $\omega = x^A dx + y^A dy + (z^A + x) dz$, dove A è il numero delle lettere del *cognome*. Dopo aver osservato che $\omega - x dz$ è una forma esatta, si calcoli l'integrale curvilineo $\int_C \omega$ lungo la curva chiusa C (detta *curva di Lissajous*) di equazioni

$$\begin{cases} x = \sin(t)\cos(2t) \\ y = \sin(t)\sin(2t) \qquad \text{per } t \in [0, 2\pi]. \\ z = \cos(t), \end{cases}$$

3) Si consideri, nel piano (x, y), la regione limitata E la cui frontiera è la curva regolare definita dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta, \\ y = \frac{3}{2}\sin\theta - \cos\theta, \end{cases}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$. Dopo aver calcolato l'area di E, si trovi l'area della superficie piana ottenuta intersecando il piano di equazione $z = x + y + 3$ con il cilindro di equazione $\frac{(x-y)^2}{4} + \frac{(x+y)^2}{9} = 1$.

Svolgimento

1) Poiché la funzione assegnata è pari, si avrà uno sviluppo di soli coseni. Si ha ora, facilmente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = 2 \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi, \quad \text{da cui} \;\; a_0 = 2.$$

Inoltre, ancora facilmente si trova

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{da cui} \;\; a_1 = -\frac{1}{2},$$

e, per $n \geq 2$, sfruttando il suggerimento:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos nx dx = (-1)^{n+1} \frac{2\pi}{n^2 - 1}, \quad \text{da cui} \;\; a_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n^2 - 1}.$$

Pertanto, lo sviluppo richiesto è

$$x \sin x = 1 - \frac{\cos x}{2} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos nx.$$

2) La forma differenziale ω è somma di una forma esatta $(x^A dx + y^A dy + z^A dz)$ e della forma xdz. Pertanto, poiché la curva C è chiusa, basterà calcolare

$$\int_C xdz = -\int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cos(2t) dt = -\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(2t) dt.$$

Con la sostituzione $u = 2t$, avremo $dt = \frac{1}{2} du$ e

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \cos^2 u du = \pi$$

e quindi

$$\int_C \omega = \pi \; \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

3) Per calcolare l'area di E ci si può servire delle formule di Green: per esempio, denotata con Γ la frontiera di E, si ha

$$\begin{aligned} Area(E) &= \int_\Gamma xdy = \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \frac{3}{2} \sin\theta)(\frac{3}{2} \cos\theta + \sin\theta) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (\frac{3}{2} + \frac{13}{4} \sin\theta \cos\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} d\theta = 3\pi. \end{aligned}$$

Quanto alla seconda domanda, osserviamo innanzitutto che la curva Γ non è altro che l'intersezione del cilindro con il piano xy: infatti, da $x = \cos\theta + \frac{3}{2} \sin\theta$ e $y = \frac{3}{2} \sin\theta - \cos\theta$ si ricava subito $\frac{(x-y)^2}{4} + \frac{(x+y)^2}{9} = 1$. Allora basterà evidentemente calcolare l'integrale $\int_E dS$, dove dS é l'elemento di superficie del piano di equazione $z = x + y + 3$: una semplice applicazione delle formule fornisce $dS = \sqrt{3} dxdy$. In conclusione, l'area richiesta è uguale a $\sqrt{3}\ Area(E) = 3\sqrt{3}\pi$.

Analisi Matematica II - 3 Febbraio 2014
Civile, Meccanica

---

1) Si calcoli la serie di Fourier della funzione $f(x) = x|x|$, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

2) Si consideri, nel suo dominio di definizione, la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx + \frac{y+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz,$$

e si calcoli l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare ω lungo la curva C avente la seguente parametrizzazione:

$$\begin{cases} x = \cos^2 t, & \\ y = \sin^2 t, & \qquad t \in [0, \frac{\pi}{3}]. \\ z = \sqrt{2}\sin t \cos t, & \end{cases}$$

3) Detta S la semisfera definita da

$$S := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq y - x\},$$

si calcoli, mediante il teorema di Stokes, il flusso del rotore del campo $\vec{F} = (x + y, y, z)$ uscente da S. [Sugg.: si osservi che l'equazione del bordo di S è equivalente a: $X^2 + Y^2 = 2$, ove $X = y - 2x$ e $Y = \sqrt{3}y$...]

---

1) Poiché f è dispari, il suo sviluppo sarà di soli seni, e quindi del tipo

$$x|x| = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx),$$

ove

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x|x|\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)dx,$$

per $n \geq 1$. Ora, procedendo per parti, si ottiene, per $n \geq 1$:

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)dx = -\frac{(-1)^n \pi^2}{n} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx,$$

e, ancora per parti:

$$\int_0^\pi x\cos(nx)dx = -\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nx)dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

In conclusione, si otterrà

$$\int_0^\pi x^2\sin(nx)dx = \frac{-(-1)^n\pi^2}{n} + 2\frac{(-1)^n - 1}{n^3},$$

e quindi la serie di Fourier cercata è

$$x|x| = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2+(-1)^n(2-\pi^2n^2)}{n^3}\sin(nx),$$

per $x \in]-\pi,\pi[$.

2) La forma differenziale, che è definita in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, non è esatta, in quanto non è chiusa. Tuttavia, è esatta la forma

$$\omega_0 := \omega - \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

in quanto un potenziale di ω_0 è $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Pertanto, l'integrale curvilineo richiesto, tenendo conto anche del fatto che lungo C risulta $x^2+y^2+z^2=1$, si può calcolare come segue:

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_C \omega_0 + \int_C \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 1 - 1 + \int_0^{\pi/3} 2\sin t\cos t dt = \\ &= \sin^2(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

3) Usando il teorema di Stokes, basta calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale $(x+y)dx + ydy + zdz$ lungo la circonferenza C ottenuta intersecando la sfera unitaria con il piano $z = y - x$. (Osserviamo che tale circonferenza ha raggio 1, in quanto il piano passa per l'origine).

Tuttavia, prima di calcolare l'integrale curvilineo, osserviamo che la forma differenziale $(x+y)dx + ydy + zdz$ è somma di una forma esatta e della forma $\omega = ydx$, per cui basterà limitarsi a calcolare l'integrale curvilineo di quest'ultima.

Per ricavare l'equazione della circonferenza C suddetta, osserviamo che, sostituendo z con $y-x$ nell'equazione della sfera, si ottiene $2x^2+2y^2-2xy=1$, equazione equivalente a quella della frontiera di E. Dunque, le equazioni parametriche della circonferenza cercata sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = \frac{\sin t}{\sqrt{6}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin t \\ z = y - x = \frac{\sin t}{\sqrt{6}} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \int_S rot(\vec{F}) \times \vec{n} dS &= \int_{\partial E} y dx = -\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin t (\frac{\cos t}{\sqrt{6}} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}}) dt = \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{3}} dt = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

il segno meno essendo dovuto al verso di percorrenza, e avendo trascurato il termine in $\sin t \cos t$ che dà contributo nullo all'integrale.

Il calcolo si sarebbe potuto effettuare più rapidamente, sempre grazie al teorema del rotore, calcolando direttamente il flusso uscente dal disco contenuto nel piano di equazione $z = y - x$ e delimitato dalla circonferenza C: infatti, in tal caso avremmo trovato $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$, $rot(\vec{F}) = (0, 0, -1)$, e quindi $rot(\vec{F}) \times \vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, costante. L'area del disco è ovviamente π, in quanto C è un cerchio massimo nella sfera unitaria. In conclusione, il flusso cercato è dato dal prodotto di tale area per $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, concordemente con quanto già trovato in precedenza.

Analisi Matematica II - 30 Aprile 2014
Civile, Meccanica

---

1) tra tutti i triangoli isosceli di perimetro assegnato 2p, qual'è quello di area massima?

2) Calcolare

$$\int_J x\cos(xy)\,dxdy$$

ove $J = [0, a] \times [0, b]$.

3) Dato il campo vettoriale $\vec{f} = (x\log(x^2+y^2), y\log(x^2+y^2))$, si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_C \vec{f}ds,$$

ove C è l'arco di curva $y = \cos x$, per $x \in [0, \pi/2]$.

---

1) Denotiamo con x, x, y i lati del triangolo, e pertanto l'equazione del vincolo è: $\varphi(x, y) = 2x+y-2p = 0$. L'espressione dell'area è fornita dalla *Formula di Erone*. Noi massimizzeremo il *quadrato* dell'area, perché il calcolo è più semplice: la funzione da massimizzare è dunque $f(x, y) = p(p-x)^2(p-y)$ valutata nei punti del segmento che congiunge $(p, 0)$ e $(0, 2p)$ (dunque un compatto). Se effettuiamo la sostituzione $y = 2p - 2x$ (vincolo), otteniamo

$$g(x) = p(p-x)^2(2x-p), \qquad 0 \le x \le p.$$

Risulta $g'(x) = 2p(3x^2 - 5px + 2p^2) \ge 0$ se e solo se $x = 2p/3$. (L'area massima è ottenuta dal triangolo equilatero di lato $2p/3$.)

2) Usando il teorema di riduzione di Fubini, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_J x\cos xydxdy &= \int_0^a \left\{\int_0^b x\cos xydy\right\}dx = \int_0^a [\sin xy]_0^b dx = \int_0^a \sin bxdx = \\ &= \frac{1}{b}(1-\cos ab).\end{aligned}$$

3) Poniamo $X(x,y) = x\log(x^2+y^2)$, $Y(x,y) = y\log(x^2+y^2)$, in modo da ricondurre l'integrale richiesto a quello della forma differenziale $\omega = X dx + Y dy$. Notiamo ora che ω è un differenziale esatto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: infatti,

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int x\log(x^2+y^2)dx = \frac{1}{2}\int \log(x^2+y^2)d(x^2+y^2) = \\
&= \frac{1}{2}[(x^2+y^2)\log(x^2+y^2) - (x^2+y^2)] + h(y) \\
U'_y(x,y) &= y\log(x^2+y^2) + h'(y) = Y \Longleftrightarrow h(y) = c \\
U(x,y) &= \frac{1}{2}[(x^2+y^2)\log(x^2+y^2) - (x^2+y^2)] + c; \\
\int_C \vec{f} ds &= U(\pi/2, 0) - U(0,1).
\end{aligned}$$

Scritto di Analisi II - 9 Giugno 2014

---

1) Studiare la convergenza puntuale ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n.$$

Studiarne la convergenza totale in [1,2] e calcolare $\int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n dx$.

2) Sia $\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}(x,y,z)$. Calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la poligonale triangolare determinata dai punti $A=(1,0,0), B=(0,1,0), C=(0,0,1)$, orientata nel verso ABC. Calcolare il flusso di $\mathrm{rot}(\vec{F})$ attraverso la superficie determinata dai punti precedenti, orientata in modo che la terza componente del versore normale sia positiva.

3) Sia $A = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 2, x^2+y^2 < z\}$. Calcolare

$$\iiint_A (x^2+y^2+z^2-1)dxdydz.$$

---

1) La serie converge banalmente in $x=0$, se $x \neq 0$, per il criterio del rapporto applicato alla serie dei valori assoluti, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right) < 1$$

e quindi la serie converge assolutamente e puntualmente su tutto $\mathbb{R}$. Nell'intervallo [1,2] risulta:

$$|f_n(x)| \leq 2(n-1)\frac{1}{2^n} = L_n$$

e la serie $\sum L_n$ converge per il criterio del rapporto. Dunque la serie data converge totalmente in [1,2] e pertanto vale il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale di Riemann:

$$\int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\int_1^2 x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n dx \overset{1+x^2=w}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\frac{1}{2}\int_2^5 w^{-n}dw = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2}(1-n)\left[\frac{w^{1-n}}{1-n}\right]_2^5 = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{5^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-1/5} - \frac{1}{1-1/2}\right] = \frac{3}{8}.$$

2) Sia $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, dove $\Omega = \{(x, y, z) : x + y + z > 0\}$. Risulta $\vec{F} \in C^1(\Omega)$ ed Ω convesso. Osserviamo che sulla poligonale e sulla superficie racchiusa dalla poligonale risulta sempre $x + y + z = 1$. Inoltre

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{\sqrt{x+y+z}} & \frac{y}{\sqrt{x+y+z}} & \frac{z}{\sqrt{x+y+z}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{(x+y+z)^3}}(y - z, z - x, x - y)$$

Dunque il campo $\vec{F}$ per le ipotesi fatte non è né irrotazionale, né conservativo in Ω. La circuitazione va dunque calcolata direttamente. Parametrizziamo innanzitutto la poligonale γ:

$$\gamma : \begin{cases} AB : & x = 1 - t, y = t, z = 0 \quad 0 \le t \le 1 \\ BC : & x = 0, y = 1 - t, z = t \quad 0 \le t \le 1 \\ CA : & x = t, y = 0, z = 1 - t \quad 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \tau ds = \oint_\gamma \frac{xdx}{\sqrt{x+y+z}} + \frac{ydy}{\sqrt{x+y+z}} + \frac{zdz}{\sqrt{x+y+z}} = 3\int_0^1 (2t - 1)dt = 0.$$

Calcoliamo ora il flusso del $\operatorname{rot}(\vec{F})$ uscente dalla faccia superiore della superficie S. Intanto $\operatorname{rot}(\vec{F}|)|_S = \frac{1}{2}(y - z, z - x, x - y)$, inoltre il versore normale alla superficie è il vettore $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ e pertanto $\operatorname{rot}(\vec{F}|)|_S \cdot n = \frac{1}{2\sqrt{3}}(y - z + z - x + x - y) = 0$. Pertanto è nullo il flusso del $\operatorname{rot}(\vec{F})$ uscente da S.

3) L'nsieme A è la porzione di spazio compresa tra la sfera di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{2}$ ed il paraboloide $z = x^2 + y^2$. Se lo esprimiamo in coordinate cilindriche otteniamo: $dxdydz = \rho d\rho d\theta dz$ e

$$\Omega' = \{(\rho, \theta, z) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, \rho^2 \le z \le \sqrt{2 - \rho^2}\}.$$

$$\begin{aligned} &\iiint_A (x^2 + y^2 + z^2 - 1)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} (\rho^2 + z^2 - 1)dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \left[(\rho^2 - 1)z + \frac{1}{3}z^3\right]_{z=\rho^2}^{z=\sqrt{2-\rho^2}} d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^3\sqrt{2 - \rho^2} - \rho\sqrt{2 - \rho^2} + \frac{1}{3}\rho\sqrt{(2 - \rho^2)^3} - \rho^5 + \rho^3 - \frac{1}{3}\rho^7)d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 (\rho^3\sqrt{2 - \rho^2} - \rho\sqrt{2 - \rho^2} + \frac{1}{3}\rho\sqrt{(2 - \rho^2)^3} - \rho^5 + \rho^3 - \frac{1}{3}\rho^7)d\rho = \\ &= \pi\left(\frac{4}{15}\sqrt{2} - \frac{19}{60}\right). \end{aligned}$$

Scritto di Analisi II - 23 Giugno 2014

---

1) Determinare i punti estremanti della funzione

$$f(x,y) = (x-y)\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ .$$

Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare il massimo ed il minimo assoluti di f sul triangolo di vertici $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (0,1)$.

2) Posto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x,\ x^2+y^2 \leq 4\}$ e considerata $\gamma = Fr\,E$, calcolare

$$\int_\gamma \frac{x}{x-y+2}\,ds\ .$$

3) Assegnato $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \geq 1,\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$, calcolare

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2}\,dxdy.$$

---

1) Risulta $f \in C(\mathbb{R}^2)$. Studiamone la differenziabilità nel triangolo T di vertici A,B,C. Innanzitutto f ammette derivate parziali nell'origine: infatti:

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0} |x| = 0 \\ f'_y(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)}{y} = -\lim_{y\to 0} |y| = 0 \end{aligned}$$

ed è differenziabile nell'origine:

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = (x-y) \to 0 \text{ quando } (x,y) \to (0,0)$$

(L'origine che non risulta né di massimo, né di minimo relativo in tutto $\mathbb{R}^2$ poiché in un qualunque intorno di (0,0) assume sia valori positivi (quando $x > y$) che valori negativi (quando $x < y$). In T risulta invece $f(x,y) \leq 0$, e dunque tutti i punti in cui f si annulla saranno di massimo assoluto.)

Risulta inoltre $f \in C^1(T^\circ)$ perché prodotto e composizione di funzioni di classe $C^1(T^\circ)$

e dunque i punti di massimo o di minimo assoluti interni a T dovranno soddisfare il teorema di Fermat. Risulta:

$$\begin{cases} f'_x = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ f'_y = -\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2+y^2-xy=0 \\ -x^2-2y^2+xy=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = \pm x \\ 4x^2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0).$$

Pertanto la funzione non ha punti di massimo e di minimo assoluto in T°. Siccome T è un compatto e la funzione è continua per il teorema di Weierstrass i punti di massimo e di minimo assoluti dovranno necessariamente trovarsi su $Fr(T)$. Lungo il segmento AC $((0,y), y \in [0,1])$ risulta $g(y) := f(0,y) = -y^2$. Lungo questa restrizione dunque la funzione f ha in $(0,0)$ un punto di massimo mentre $(0,1)$ è un punto di minimo. Lungo il segmento BC $((x,1), x \in [0,1])$ risulta $h(x) := f(x,1) = (x-1)\sqrt{x^2+1}$. Siccome la funzione h risluta crescente, allora la funzione f ha in $(0,1)$ un punto di minimo mentre $(1,1)$ è un punto di massimo. Lungo il segmento AB $((x,x), x \in [0,1])$ la funzione si annulla. Risulta allora $(0,1)$ punto di minimo assoluto per f in $T(f(0,1) = -1 = \min_T f(x,y))$, mentre tutti i punti del segmento AB sono di massimo assoluto e $\max_T f(x,y) = 0$.

2) Osserviamo innanzitutto che essendo l'integrale in ds non è rilevante il verso di percorrenza. Risulta $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ con $\gamma_1 := (t,0),\ t \in [0,2](ds = dt)$; $\gamma_2 := (2\cos t, 2\sin t),\ t \in [0,\pi/4](ds = 2dt)$; $\gamma_3 := (t,t),\ t \in [0,\sqrt{2}], (ds = \sqrt{2}dt)$.

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{x}{x-y+2}\,ds &= \int_0^2 \frac{t}{2+t}dt + 2\int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\cos t - \sin t - 1}dt + \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} t2dt = \\ &= \int_0^2 (1 - \frac{2}{t+2})dt + 2\int_0^{tg\,\frac{\pi}{8}} \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2} - \frac{2z}{1+z^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+z^2}dz + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= [t - 2\ln(t+2)]_0^2 + 2\int_0^1 \frac{1+t}{1+t^2}dt + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2(1-\ln 2) + 2[\arctan z + \frac{1}{2}\ln(1+z^2)]_0^{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= 2(1-\ln 2) + \frac{\pi}{4} + \log 2(2-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

3) L'insieme D è costituito dai punti del I quadrante che sono esterni alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 ed interni alla circonferenza di centro (1,0) e raggio 1.

Trasformiamo il nostro insieme D in coordinate polari. Siccome le due circonferenze si intersecano nel punto $(1/2, \sqrt{3}/2)$ (oltre all'origine), risulta $t \in [0, \pi/3]$. Per quanto riguarda r dovrà risultare $r \geq 1$ inoltre scrivendo la seconda circonferenza in coordinate polari si ottiene $r \leq 2\cos t$. Per cui $D \mapsto D' := \{(r, t) : t \in [0, \pi/3],\, 1 \leq r \leq 2\cos t\}$. Risulta allora:

$$
\begin{aligned}
& \iint_D \frac{y^2}{x^2}\, dxdy = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt \int_1^{2\cos t} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} [r^2]_1^{2\cos t} dt = \\
= \quad & 2\int_0^{\pi/3} \sin^2 t dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan^2 t dt = [t - \sin t \cos t]_0^{\pi/3} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (1 + \tan^2 t - 1) dt = \\
= \quad & \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}[\tan t - t]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$

Scritto di Analisi II - 14 Luglio 2014

---

1) Calcolare
$$\int_\gamma (x^3 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$$
dove γ è la frontiera del quadrato $Q = [0,2] \times [0,2]$ percorsa in senso antiorario.

2) Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato $2p$ determinare quello di area massima.

3) Scrivere la figura generatrice (nel piano zy) del solido di rotazione A (ruotato intorno all'asse y) definito da:
$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\ x^2 - y^2 + z^2 \leq 0,\ y \geq 0\}.$$
Calcolare poi
$$\iiint_A \frac{x^2}{x^2 + z^2} dxdydz.$$

---

1) La curva γ è la $Fr(Q)$ percorsa nel suo verso positivo, pertanto per le formule di Gauss-Green risulta:
$$\begin{aligned}\int_\gamma (x^3 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \iint_Q \left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - 2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - xy^3)\right] dxdy = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^2 (-2y + 3xy^2)dy = \int_0^2 [-y^2 + xy^3]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \int_0^2 (8x - 4)dx = 8.\end{aligned}$$

2) Denotiamo con x, y la base e l'altezza del rettangolo rispettivamente. Il vincolo risulta $x + y = p$ mentre la funzione da massimizzare è $a(x,y) = xy$. Se ricaviamo y dal vincolo risulta $y = p - x$ e $a(x, y(x)) = x(p - x)$. Siccome x, y rappresentano delle lunghezze $x, y \in [0,p] \times [0,p]$. Esisterà pertanto il massimo assoluto per il teorema di Weierstrass nel punto $x = y = p/2$. Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, quello che massimizza l'area è il quadrato.

c) Se proiettiamo A nel piano zy otteniamo
$$A_{zy} := \{(z,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y^2 + z^2 \leq 2,\ z^2 \leq y^2,\ y \geq 0\}.$$

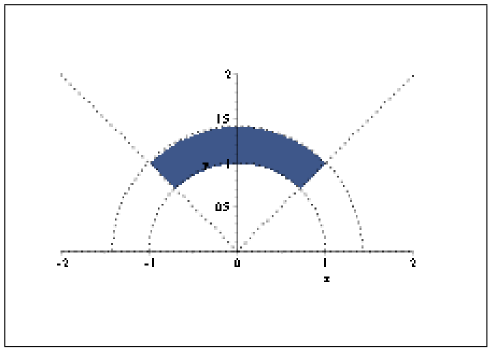


Figura 4: grafico dell'insieme A_{zy}

Quindi A_{zy} è la figura ottenuta intersecando la corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e $\sqrt{2}$ con le bisettrici dei due quadranti ($|z| \leq y$).

La figura E che genera il solido A è pertanto data da:

$$E := \{(z,y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : \sqrt{1-z^2} \leq y \leq \sqrt{2-z^2}, y \geq 0, |z| \leq y\}.$$

Scriviamo E in coordinate polari denotanto con t la colatitudine (mettiamo l'asse y in ordinata):

$$(E) \begin{cases} y = r\cos t \\ z = r\sin t \end{cases} \quad r \in [1, \sqrt{2}], t \in [0, \pi/4]$$

Ruotando E intorno all'asse y si ottiene l'insieme A:

$$(A) \begin{cases} x = r\sin t\sin\theta \\ y = r\cos t \\ z = r\sin t\cos\theta \end{cases} \quad r \in [1, \sqrt{2}], t \in [0, \pi/4], \theta \in [0, 2\pi]$$

$$A := \{(r,t,\theta) : 1 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq t \leq \pi/4,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Calcoliamo ora il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione per calcolare l'integrale triplo per sostituzione:

$$\begin{vmatrix} \sin t\sin\theta & \cos t & \sin t\cos\theta \\ r\cos t\sin\theta & -r\sin t & r\cos t\cos\theta \\ r\sin t\cos\theta & 0 & -r\sin t\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= r\sin t\cos\theta \cdot r\cos\theta(\cos^2 t + \sin^2 t) + r\sin t\sin\theta \cdot r\sin\theta(\sin^2 t + \cos^2 t) =$$

$$= r^2\sin t\cos^2\theta + r^2\sin t\sin^2\theta = r^2\sin t$$

(Allo stesso risultato si perviene se osserviamo che la matrice Jacobiana di questa trasformazione è ottenuta a partire dalla matrice Jacobiana della matrice delle coordinate sferiche invertendone l'ordine delle colonne: z con y e poi x con y).

$$
\begin{aligned}
\iiint_A \frac{x^2}{x^2+z^2} dxdydz &= \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_0^{\pi/4} dt \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin^2 t \sin^2 \theta}{r^2 \sin^2 t} r^2 \sin t \, d\theta = \\
&= \int_1^2 r^2 dr \int_0^{\pi/4} \sin t dt \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \\
&= \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} [-\cos t]_0^{\pi/4} \frac{1}{2} [\theta - \sin\theta\cos\theta]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{2}-6).
\end{aligned}
$$

Scritto di Analisi II - 8 Settembre 2014

---

1) Denotato con γ l'arco della circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1 contenuto nell'intersezione tra il I quadrante e la regione di piano $y \geq \sqrt{3} - \sqrt{3}x$, calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{1}{x(x^2+y^2+1)} ds \ .$$

2) Studiare continuità, derivabilità parziale e differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2} & , \ x^2+y^2 > 0 \\ \\ 0 & , \ x^2+y^2 = 0 \ . \end{cases}$$

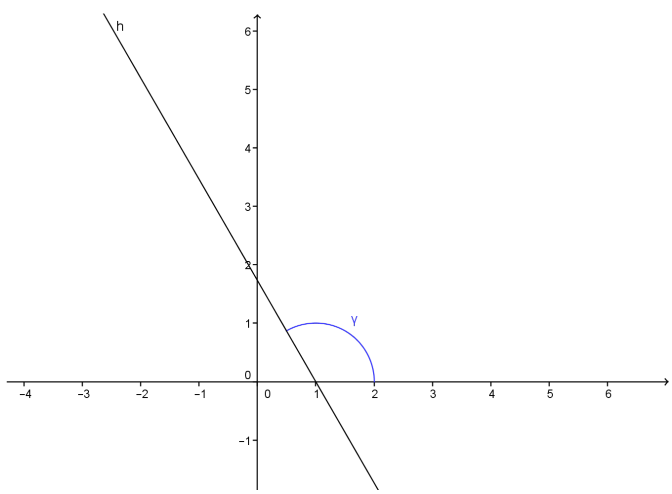
3) Determinare l'insieme di convergenza assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)} \ , \ x \in \mathbb{R}.$$

Stabilire quindi se in tale insieme la serie converge totalmente.

---

1) Consideriamo la parametrizzazione di γ



data da $\vec{r}(\theta) = (1 + cos\,\theta, sen\,\theta)$, $\theta \in \left[0, \frac{2}{3}\pi\right]$ (essendo $\frac{2}{3}\pi = arctg\,(-\sqrt{3})$), da cui $ds = d\theta$. Si ha quindi

$$\int_\gamma \frac{ds}{x(x^2+y^2+1)} = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)(3+2\cos\theta)} = \sqrt{3} - \frac{4\sqrt{5}}{5} \arctan(\frac{\sqrt{15}}{5})$$

2) Innanzitutto f è una funzione pari in entrambe le variabili e $f(x,y) = f(y,x)$. Basta allora studiarla in $(\mathbb{R}_0^+)^2$. Nei punti di $(\mathbb{R}_0^+)^2 \setminus \{(0,0)\}$ la funzione è continua come composizione di funzioni continue. In $(0,0)$ si ha:

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\sqrt{\rho^2 |cos\,\theta\; sen\,\theta|}}{\rho^2} = \begin{cases} 0 \ , \ \theta = k\frac{\pi}{2} \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ +\infty \ , \ \theta \neq k\frac{\pi}{2} \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} ;$$

poiché $f(0,0) = 0$, deduciamo che la funzione è continua separatamente nell'origine, ma non globalmente. Questo ci permette anche di dire che non è differenziabile in (0,0).

Nell'origine la funzione è derivabile in quanto sugli assi essa vale costantemente 0 (e dunque $\nabla f(0,0) = (0,0)$). La funzione è sicuramente derivabile nei punti di $(\mathbb{R}^+)^2$ come composizione di funzioni derivabili.

Restano da studiare i punti del tipo $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$ e $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$; data la simmetria di f ci limitiamo al primo tipo. Come già osservato, sull'asse x la funzione è costante, quindi $f_x(x_0, 0) = 0$; studiamo la derivata rispetto ad y nel punto:

$$R(k) = \frac{f(x_0,k) - f(x_0,0)}{k} = \frac{\sqrt{|x_0 k|}}{(x_0^2 + k^2)k} \to_{k \to 0} \begin{cases} +\infty \ , \ k > 0 \\ -\infty \ , \ k < 0 \end{cases} ;$$

ne segue che non esiste $f_y(x_0, 0)$ e dunque la funzione non è derivabile parzialmente nel punto considerato. Questo ci dice anche che in tali punto f non è differenziabile non ammettendo gradiente.

Resta da studiare la differenziabilità nei punti $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Si può osservare che la funzione in tale insieme è di classe C^1 ed è quindi differenziabile.

3) Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f_n(x) = \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)} = \frac{n}{3n-1} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n \ , \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Determiniamo l'insieme di convergenza assoluta.

Se $x = 1$ il termine generale della serie è sempre nullo e la serie converge sia semplicemente che assolutamente.

Se $x \neq 1$, applichiamo il criterio del rapporto alla serie assoluta:

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{n+1}{3(n+1)-1} \frac{3n-1}{n} \left| \frac{x-1}{2} \right| \to_{n \to +\infty} \left| \frac{x-1}{2} \right| ;$$

dunque per $\left|\frac{x-1}{2}\right| < 1 \Rightarrow -1 < x < 3$ la serie converge assolutamente, mentre per $\left|\frac{x-1}{2}\right| > 1 \Rightarrow x < -1 \vee x > 3$ la serie non converge assolutamente.

Se $\frac{x-1}{2} = 1 \Rightarrow x = 3$, la serie si riduce a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3n-1}$, la quale diverge essendo a termini positivi con termine generale non infinitesimo (infatti $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$).

Se $\frac{x-1}{2} = -1 \Rightarrow x = -1$, la serie si riduce a $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{3n-1}$, la quale è indeterminata essendo a segni alterni con termine generale decrescente ma non a 0. Concludendo, l'insieme di convergenza assoluta è $I =]-1, 3[$. Studiamo ora la convergenza totale in I. Si ha

$$\sup_{x\in I} |f_n(x)| = \sup_{\left|\frac{x-1}{2}\right|<1} \left| \frac{n}{3n-1} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \right| = \frac{n}{3n-1} \ ;$$

poiché la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3n-1}$ non converge, la serie di funzioni assegnata non converge totalmente in I.

Analisi Matematica II - appello straordinario 4 Novembre 2014

---

1) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2)$ nell'insieme $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

2) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\omega = x^2y^3dx + ydy$ e γ è una parametrizzazione della frontiera dell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ orientata positivamente.

Svolgimento

1) Risulta $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, l'insieme M è un compatto, pertanto f ammette massimi e minimi assoluti in M. Cerchiamo i punti di massimo e di minimo di f in $M^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$. Risulta:

$$f'_x = 4x^3 - 16x, \qquad f'_y = 4y^3 - 16y.$$

I punti interni ad M che annullano tale sistema sono $(0,0), (0,\pm 2), (\pm 2, 0), (\pm 2, \pm 2)$. La matrice Hessiana vale:

$$\begin{pmatrix} 12x^2 - 16 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 16 \end{pmatrix}.$$

Risulta allora che:

$$\begin{aligned}
H(0,0) &= \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}, \det H(0,0) > 0, f''_{xx}(0,0) < 0 \Longrightarrow \\
&\quad (0,0) \text{ massimo relativo} \\
H(0,\pm 2) &= \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}, \det H(0,\pm 2) < 0 \Longrightarrow (0,\pm 2) \text{ punti sella} \\
H(\pm 2, 0) &= \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}, \det H(\pm 2, 0) < 0 \Longrightarrow (\pm 2, 0) \text{ punti sella} \\
H(\pm 2, \pm 2) &= \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}, \det H(\pm 2, \pm 2) > 0, f''_{xx}(0,0) > 0 \Longrightarrow \\
&\quad (\pm 2, \pm 2) \text{ punti di minimo relativo.}
\end{aligned}$$

Cerchiamo ora i punti di massimo e di minimo nella frontiera di M: $Fr(M) = \{(3\cos t, 3\sin t), t \in [0, 2\pi]\}$. Risulta:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(3\cos t, 3\sin t) = 9(9(\cos^4 t + \sin^4 t) - 8) = 9(2\sin^4 t - 2\sin^2 t - 7) \\ g'(t) &= 36 \sin t \cos t (2\sin^2 t - 1). \end{aligned}$$

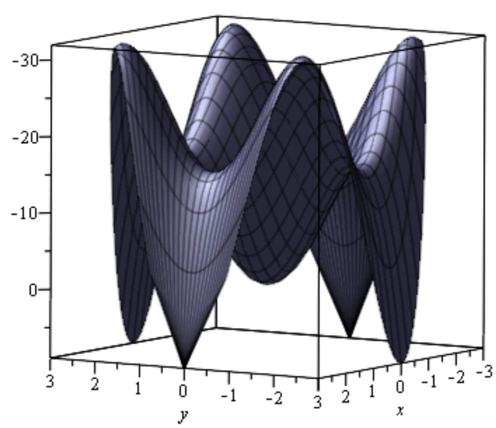
Dallo studio del segno di $g'(t)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} &t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \text{ massimi vincolati } (\pm 3, 0), (0, \pm 3) \\ &t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4 \text{ minimi vincolati } (\pm 3\sqrt{2}/2, \pm 3\sqrt{2}/2). \end{aligned}$$

Per determinare i massimi ed i minimi assoluti in M osserviamo che:

$$\begin{aligned} &f(0, \pm 3) = f(\pm 3, 0) = 9 > f(0, 0) = 0, \\ &f((\pm 3\sqrt{2}/2, \pm 3\sqrt{2}/2) = -63/2 > f(\pm 2, \pm 2). \end{aligned}$$

Si ha allora che $(\pm 3, 0)$ e $(0, \pm 3)$ sono i punti di massimo assoluto, mentre $(\pm 2, \pm 2)$ sono i punti di minimo assoluto di f in M. Il grafico della funzione f ristretto ai punti di M è il seguente:



2) La forma differenziale lineare ω è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ ma non è esatta, infatti $\mathbb{R}^2$ è convesso e risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y^3) = 3x^2 y^2 \neq 0 = \frac{\partial}{\partial x} y.$$

Calcoliamo l'integrale usando le formule di Green:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y^3)\right] dxdy = -\iint_A 3x^2y^2 dxdy = \\
&= -3\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt \int_1^2 r^5 dr = -\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} sin^2 2t dt \left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2 = \\
&= -\frac{68}{3}\left[\frac{1}{4}(2t - \sin 2t \cos 2t)\right]_0^{2\pi} = -\frac{68}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Analisi Matematica II - 12 Gennaio 2015

---

1) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ nell'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - x^2 + y^2 - 6 \leq 0\}$.

2) Calcolare il seguente integrale facendo uso del teorema di Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma} (z^2 - y)dx + zdy - ydz, \qquad \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ed il bordo è orientato positivamente.

3) Calcolare il volume ed il baricentro del solido omogeneo

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ (z-1)^2 \geq x^2 + y^2\}.$$

---

1) Esaminiamo innanzitutto l'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - x^2 + y^2 - 6 \leq 0\}$. La disuguaglianza $x^4 - x^2 + y^2 \leq 6$ si può scrivere nella forma: $(x^2 - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{25}{4}$. Dunque $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{25}{4}\}$. Ne segue che K è limitato: $K \subset [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \times [-5/2, 5/2]$. K è anche chiuso (teorema di continuità globale) in quanto $K = h^{-1}([0, 25/4])$, con $h(x,y) = (x^2 - \frac{1}{2})^2 + y^2$. ($h$ continua)
Dunque $f \in C(K)$ e quindi ammette massimi e minimi assoluti per il teorema di Weierstrass. In K° risulta $\nabla f = (4x, 2y) = (0,0)$ solo nell'origine. Esaminando il segno della funzione f si osserva che $(0,0)$ è un minimo assoluto, visto che la funzione è a valori non negativi. Studiamo ora i punti frontiera. In questo caso conviene ricavare $y^2 = 6 + x^2 - x^4$ e studiare la funzione $g : [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$g(x) = f(x, \pm\sqrt{6 + x^2 - x^4}) = 2x^2 + 6 + x^2 - x^4 = 6 + 3x^2 - x^4.$$

Risulta

$$g'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{3/2} \text{ oppure } 0 \leq x \leq \sqrt{3/2}.$$

Quindi risultano minimi relativi $x = \pm\sqrt{3}, x = 0$ e ci sono massimi relativi in $x = \pm\sqrt{3/2}$. Per Weierstrass $(\pm\sqrt{3/2}, \pm\sqrt{6 + 3/2 - 9/4}) = (\pm\sqrt{3/2}, \pm\sqrt{21}/2)$ saranno 4 punti di massimo assoluto. I punti $(\pm\sqrt{3}, 0)$ e $(0, \pm\sqrt{6})$ non sono di minimo assoluto in quanto $f(\pm\sqrt{3}, 0) = f(0, \pm\sqrt{6}) = 6 > f(0,0)$.

2) La forma differenziale lineare $\omega = (z^2 - y)dx + zdy - ydz$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$. Risulta

$$\nabla \times F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 - y & z & -y \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2z\vec{j} + \vec{k}.$$

Ne segue che il campo non è conservativo e ω non è esatta. La superficie Σ è la porzione di paraboloide (superficie regolare ed orientabile) che si trova nel semispazio $z \geq 0$. La normale alla superficie è $n := (2x, 2y, 1)$. Ne segue che

$$\nabla \times F|_\Sigma \cdot n = (-2, 2(1 - x^2 - y^2), 1) \cdot (2x, 2y, 1) = -4x + 4y(1 - x^2 + y^2) + 1.$$

Il bordo della superficie, percorso nel verso positivo, $+\partial\Sigma$ è costituito dai punti $\{(\cos t, \sin t),\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} (z^2 - y)dx + zdy - ydz &= \int_\Sigma \nabla \times F \cdot \frac{n}{\|n\|} dS = \\ &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} [-4x + 4y(1 - x^2 + y^2) + 1] dxdy = \\ &= \int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} [-4r\cos t + 4r\sin t(1 - r^2) + 1]dt = \\ &= 2\pi \int_0^1 rdr = \pi. \end{aligned}$$

3) Calcoliamo il volume dell'insieme E

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dxdydz = \int_0^1 dz \iint_{A_z} dxdy = \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq (z-1)^2} dxdy = \\ &= \int_0^1 \pi(z-1)^2 dz = \frac{\pi}{3}[(z-1)^3]_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Per ragioni di simmetria, essendo il solido omogeneo, risulterà: $x_E = y_E = 0$, mentre

$$\begin{aligned} z_E &= \frac{1}{V(E)} \iiint_E zdxdydz = \frac{3}{\pi} \int_0^1 dz \iint_{A_z} zdxdy = \\ &= 3 \int_0^1 (z^3 - 2z^2 + z)dz = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Analisi Matematica II - 2 Febbraio 2015

---

1) Studiare i vari tipi di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(|x|-1)^n}{n-\sqrt{n}} \ .$$

2) Sia A il solido generato dalla rotazione intorno all'asse z della regione piana $C = \{(x,z) : x^2 - 1 \le z \le (x-1)^2, 0 \le x \le 1\}$. Determinare il volume ed il baricentro di A.

3) Posto $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x > 0\}$, sia $\vec{F} : E \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da $\vec{F}(x,y,z) = (1 + z + y + log\, x, x, x)$. Provare che $\vec{F}$ è conservativo su E e determinarne la famiglia dei potenziali. Calcolare quindi il lavoro compiuto dal campo vettoriale lungo la curva $\vec{r}(t) = (1, 0, 1-t)$, $0 \le t \le 1$.

---

1) La serie data è una serie di potenze. Effettuiamo la sostituzione $|x|-1 = z$ e calcoliamone il raggio di convergenza utilizzando il criterio del rapporto applicato alla serie dei valori assoluti.

$$r \quad = \quad \sup\left\{ z : \lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{(n+1)-\sqrt{n+1}} |z| < 1 \right\} = 1.$$

Risulta allora $|z| < 1$ se e solo se $||x|-1| < 1 \Rightarrow 0 < |x| < 2$, cioè $-2 < x < 2, x \neq 0$.

Se $x = \pm 2$, la serie si riduce a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$, la quale diverge per il criterio del confronto asintotico (con la serie armonica).

Se $x = 0$, la serie si riduce a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\sqrt{n}}$, la quale converge semplicemente per il criterio di Leibniz, ma non assolutamente (vedi caso precedente).

Concludendo, l'insieme di convergenza assoluta è $I =]-2,0[\cup]0,2[$. Inoltre converge puntualmente in $]-2,2[$. Per i teoremi noti sulle serie di potenze la serie data converge totalmente e quindi uniformemente in ogni insieme A chiuso strettamente contenuto in I. Inoltre converge uniformemente, per il teorema di Abel in ogni insieme $[-a,a]$ con $0 < a < 2$.

Non converge uniformemente in $]-2,2[$ né in I: infatti se se per assurdo convergesse uniformemente in questi insiemi allora, per il Criterio di Cauchy dovrebbe risultare che: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon)$ tale che per ogni $n > n(\varepsilon)$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ allora

$$|f_n(x) + \dots f_{n+p}(x)| \le \varepsilon, \text{ per ogni } \; x \in I.$$

In particolare allora, risulterebbe

$$\lim_{x \to 2^-} |f_n(x) + \dots + f_{n+p}(x)| = |f_n(2) + \dots + f_{n+p}(2)| \le \varepsilon$$

e quindi la serie assegnata convergerebbe in $x = 2$ (assurdo). La serie data quindi non può convergere totalmente in I.

2) Applicando il teorema di Guldino risulta

$$V(A) = 2\pi \int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{(x-1)^2} x dz = 4\pi \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{2}{3}\pi.$$

Per simmetria $x_A = y_A = 0$, mentre

$$z_A = \frac{1}{V(A)} \iiint_A z dx dy dz = \frac{3}{2\pi} \iiint_A z dx dy dz.$$

Spezziamo ora l'insieme A nei due sottoinsiemi A^+, A^-.

$$\begin{aligned} A^+ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1 + z, \; 0 \le z \le 1\} \\ A^- &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le (1 - \sqrt{z})^2, \; -1 \le z \le 0\}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} z_A &= \frac{3}{2\pi} \int_{-1}^0 dz \iint_{A^-} z dx dy + \frac{3}{2\pi} \int_0^1 dz \iint_{A^+} z dx dy = \\ &= \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^0 (z^2 + z) dz + \int_0^1 (z^2 - 2z\sqrt{z} + z) dz \right) = \\ &= \frac{3}{2} \left(\left[\frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{z^3}{3} - \frac{4}{5} z^2 \sqrt{z} + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 \right) = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

3) Il campo $\vec{F}$ è irrotazionale; infatti $\vec{F} \in C^1(E)$ e

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 1 = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y} \; .$$

Essendo poi con E aperto e convesso, possiamo concludere che $\vec{F}$ è anche conservativo su E. Per determinare la famiglia dei potenziali consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} U_x(x,y,z) = 1 + z + y + log\, x \\ U_y(x,y,z) = x \\ U_z(x,y,z) = x \; . \end{cases}$$

Integrando la terza equazione rispetto a z abbiamo

$$U(x, y, z) = xz + c(x, y) \ . \tag{1}$$

Derivando parzialmente questa rispetto ad y possiamo scrivere

$$U_y(x, y, z) = c_y(x, y).$$

Sostituendola nella seconda equazione del sistema, otteniamo

$$c_y(x, y) = x \ \Rightarrow \ c(x, y) = xy + k(x) \ .$$

Allora la (1) si riscrive

$$U(x, y, z) = xz + xy + k(x) \ . \tag{2}$$

Derivando ora parzialmente rispetto ad x abbiamo

$$U_x(x, y, z) = z + y + k'(x).$$

Sostituendo questo nella prima equazione otteniamo

$$\begin{aligned} z + y + k'(x) &= 1 + z + y + log\, x \ \Rightarrow \ k'(x) = 1 + log\, x \ \Rightarrow \\ \Rightarrow & \quad k(x) = x + x\, log\, x - x + c \ \Leftrightarrow \ k(x) = x\, log\, x + c \ , \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da questa e dalla (2) possiamo allora concludere che la famiglia dei potenziali del campo vettoriale assegnato è data da

$$U(x, y, z) = x(z + y + \ log\, x) + c \ , \ c \in \mathbb{R} \ .$$

La curva $\vec{r}$ congiunge $(1, 0, 1)$ con $(1, 0, 0)$, quindi il lavoro è dato da

$$\int_{r(t)} \vec{F} ds = U(1, 0, 0) - U(1, 0, 1) = -1.$$

Analisi Matematica II - 8 Giugno 2015

1) Data la serie di funzioni
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(|x|-1)^n}{\ln n} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ ,$$
determinarne l'insieme di convergenza assoluta e stabilire se converge totalmente in tale insieme.

2) Calcolare il volume dell'insieme
$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \le 0 \, , \ 1 \le z \le 3 \, , \ x^2+y^2+4x \le 12 \right\} \ .$$

3) Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \ \arctan \frac{\sqrt{|x+y-1|}}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

---

1) Determiniamo l'insieme di convergenza assoluta.

Se $|x|-1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ la serie converge assolutamente in quanto si riduce alla serie nulla.

Consideriamo quindi la serie assoluta
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{||x|-1|^n}{\ln n} \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Per il criterio del rapporto applicato a tale serie, abbiamo che:

se $||x|-1| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \wedge x \neq 0$ la serie converge assolutamente;

se $||x|-1| > 1 \Leftrightarrow x < -2 \ \vee \ x > 2$ la serie non converge assolutamente.

Se $|x|-1 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 2$ la serie si riduce alla serie numerica
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$$
la quale diverge per confronto con la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Se $|x|-1=-1 \Leftrightarrow x=0$ la serie si riduce alla serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

la quale converge semplicemente per il criterio di Leibnitz, ma non assolutamente per il caso precedente.

Dunque l'insieme di convergenza assoluta è $I =]-2,0[\cup]0,2[$.

<u>C.T.</u> Studiamo la convergenza totale in I.

Si ha

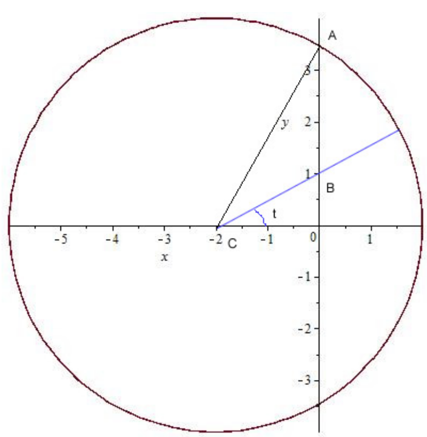
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sup_{x\in I} \left| \frac{(|x|-1)^n}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$$

e quest'ultima non converge (vedi sopra), pertanto la serie data non converge totalmente in I.

2) L'insieme E è la parte del cilindro retto compresa tra i piani $z=1$, $z=3$ ed avente per base l'insieme $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2+4x\le 12\,,\ x\le 0\}$, cioè la parte del cerchio di centro $(-2,0)$ e raggio 4 contenuta nel semipiano delle x non positive. Il suo volume è dunque

$$V(E) \;\equiv\; \iiint_E dx\,dy\,dz \;=\int_1^3 dz \iint_D dx\,dy \;=2\mathrm{area}(D)$$

L'area dell'insieme D si può calcolare per differenza tra l'area del cerchio di centro (-2,0) e raggio 4 e la porzione del disco stesso che si trova nel semipiano delle x positive. Denotiamo con D_1 questa parte e calcoliamo l'area di D_1 che è simmetrico rispetto all'asse x.



$$D_1' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{16-(x+2)^2}\}.$$

Trasformiamolo in coordinate polari. Innanzitutto $A = (0, 2\sqrt{3})$ e dunque l'angolo $\widehat{ACO} = \frac{\pi}{3}$ e dunque $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$. Consideriamo ora il triangolo rettangolo BCO: $\overline{BO} = 2$ e quindi $\overline{OB} = 2\tan t$ e l'ipotenusa $\overline{CB} = \frac{2}{\cos t}$. Pertanto

$$D_1' = \{(t,r) : t \in [0, \frac{\pi}{3}], \frac{2}{\cos t} \le r \le 4\}.$$

$$\begin{aligned} \text{area}(D_1) &= 2\text{area}(D_1') = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt \int_{\frac{2}{\cos t}}^4 r dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\frac{2}{\cos t}}^4 dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (16 - \frac{4}{\cos^2 t})dt = \\ &= \frac{16\pi}{3} - 4[\tan t]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} V(E) &= 2\text{area}(D) = 2(16\pi - \text{area}(D_1)) = 2(16\pi - \frac{16\pi}{3} + 4\sqrt{3}) = \\ &= \frac{64\pi}{3} + 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3) *Continuità.* Nei punti $(x,y) \ne (0,0)$ la funzione è continua come composizione di funzioni continue.

In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \arctan \frac{\sqrt{|x+y-1|}}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

(il prodotto di una funzione infinitesima per una limitata è ancora una funzione infinitesima).

Possiamo allora concludere che f è continua globalmente su tutto $\mathbb{R}^2$.

Derivabilità. Studiamo la derivabilità nell'origine:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \arctan \frac{\sqrt{|h-1|}}{h^2}}{h} = \frac{\pi}{2} = f_x(0,0) \ ;$$

analogamente (per la simmetria $f(x,y) = f(y,x)$) anche $f_y(0,0) = \frac{\pi}{2}$. Allora $Df(0,0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Nei punti per cui $x+y-1 = 0$, cioè del tipo $(x_0, 1-x_0)$, si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x_0+h, 1-x_0) - f(x_0, 1-x_0)}{h} = \\ = &\lim_{h\to 0^\pm} \frac{(h+1) \arctan \frac{\sqrt{|h|}}{(x_0+h)^2+(1-x_0)^2}}{h} = \pm\infty \end{aligned}$$

pertanto non esiste derivata rispetto ad x nei punti $(x_0, 1-x_0)$, che dunque non sono di derivabilità per f.

Nei punti rimanenti f è derivabile come composizione di funzioni derivabili.

Differenziabilità. Nei punti $(x_0, 1-x_0)$ la funzione non è differenziabile venendo a mancare una delle condizioni necessarie.

Nell'origine si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - Df(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\
= \quad &\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h+k)\ \arctan \frac{\sqrt{|h+k-1|}}{h^2+k^2} - \pi/2(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
= \quad &\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h+k}{\sqrt{h^2+k^2}} \left[\arctan \frac{\sqrt{|h+k-1|}}{h^2+k^2} - \frac{\pi}{2} \right] .
\end{aligned}$$

Usando la caratterizzazione del limite con le coordinate polari si ha

$$\lim_{\rho\to 0}(cos\,\theta + sen\,\theta) \left[\arctan \frac{\sqrt{|\rho(cos\,\theta + sen\,\theta) - 1|}}{\rho^2} - \frac{\pi}{2} \right] = 0 \ ;$$

il limite poi è uniforme rispetto a θ in quanto si ha

$$\left| (cos\,\theta + sen\,\theta) \left[\arctan \frac{\sqrt{|\rho(cos\,\theta + sen\,\theta) - 1|}}{\rho^2} - \frac{\pi}{2} \right] \right| \leq 2 \left| \arctan \frac{\sqrt{|2\rho - 1|}}{\rho^2} - \frac{\pi}{2} \right| \to_{\rho\to 0^+} 0.$$

Segue che la funzione è differenziabile nell'origine.

Nei punti rimanenti la funzione è differenziabile in virtù della condizione sufficiente.

Analisi Matematica II - 22 Giugno 2015
(Civile Meccanica)

1. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale $F := (x + 4y + 3z, x + z, x + 2y)$ lungo la frontiera del triangolo di vertici $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ orientata positivamente.

2. Verificare se la forma differenziale lineare
$$\omega := y\left[\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \ln\sqrt{x^2 + y^2}\right]dx + x\left[\frac{y^2}{x^2 + y^2} + \ln\sqrt{x^2 + y^2}\right]dy$$
è esatta nel suo insieme di definizione e, in caso positivo, calcolarne le primitive.

3. Data la funzione $f(x, y) = 4x^4 - 7x^2y + 3y^2$, provare che (0,0) è un punto critico e studiarne la natura.

---

1. Il campo di forze F non è irrotazionale, infatti
$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 4y + 3z & x + z & x + 2y \end{vmatrix} = (1, 2, -3).$$
Siccome $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ allora F non ammette potenziale e quindi l'integrale va calcolato. Possiamo farlo o direttamente oppure utilizzando il teorema di Stokes. Innanzitutto il triangolo si trova nel piano $x + y + z = 1$ e dunque $z = 1 - x - y$, con $(x, y) \in T_1 := \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ e con normale $(1, 1, 1)$. Posto $\omega := (x + 4y + 3z)dx + (x + z)dy(x + 2y)dz$ risulta
$$\oint_T \omega = \iint_{T_1} \nabla \times F \cdot n dxdy = \iint_{T_1} (1, 2, -3) \cdot (1, 1, 1) dxdy = 0$$
Calcoliamolo ora direttamente con il verso positivo che è $A := (1, 0, 0) \to B := (0, 1, 0) \to C := (0, 0, 1) \to (1, 0, 0)$.
$$\oint_T \omega = \int_{AB} \omega + \int_{BC} \omega + \int_{CA} \omega.$$

Risulta:

$$AB = \begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t, & 1 \geq t \geq 0; \\ z = 0 \end{cases} \quad CB = \begin{cases} x = 0, \\ y = t, & 1 \geq t \geq 0; \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$CA = \begin{cases} x = t, \\ y = 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \oint_T \omega &= 4\int_1^0 (1-t)dt + \int_1^0 (1-3t)dt + 3\int_0^1 (1-t)dt = \\ &= -\int_0^1 (1-3t)dt - \int_0^1 (1-t)dt = 0. \end{aligned}$$

2. Risulta $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Inoltre

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 1 + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Dunque la forma differenziale lineare è chiusa, ma la regione $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ha un buco. Per provarne l'esattezza o meno è sufficiente (grazie al teorema di Green) calcolare un integrale curvilineo lungo una curva generalmente regolare, chiusa, con sostegno in che racchiude il buco. Prendiamo ad esempio la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 ($x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$).

$$\begin{aligned} \oint \omega &= \int_0^{2\pi} \sin t \left[\frac{\cos^2 t}{1} + \ln\sqrt{1}\right](-sint)dt + \cos t \left[\frac{\sin^2 t}{1} + \ln\sqrt{1}\right]\cos t dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t\cos^2 t + \sin^2 t\cos^2 t)dt = 0. \end{aligned}$$

Dunque, la forma è esatta. Calcoliamone ora un potenziale. Partiamo dal punto (1,0).

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_1^x 0\,dx + x\int_0^y \left[\frac{t^2}{x^2+t^2} + \ln\sqrt{x^2+t^2}\right]dt + c = \\ &= x\int_0^y \left(1 - \frac{x^2}{x^2+t^2}\right)dt + x\int_0^y \ln\sqrt{x^2+t^2}dt + c = \\ &= xy - x^2\arctan\frac{y}{x} + \frac{x}{2}\int_0^y \ln(x^2+t^2)dt + c = \\ &= xy - x^2\arctan\frac{y}{x} + \frac{xy}{2}\ln(x^2+y^2) - xy + x^2\arctan\frac{y}{x} + c = \\ &= \frac{xy}{2}\ln(x^2+y^2) + c \end{aligned}$$

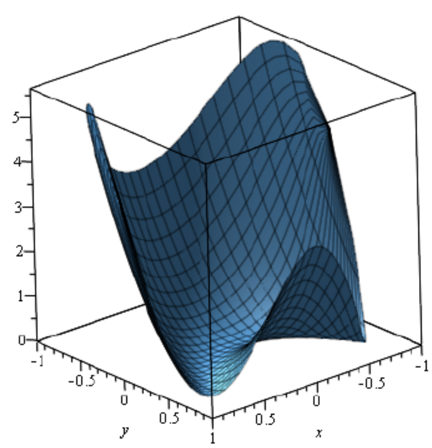
3. La funzione $f(x,y) = 4x^4 - 7x^2y + 3y^2$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Inoltre facilmente si prova che $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e $H(0,0) = 0$. Non possiamo dunque utilizzare la condizione sufficiente per studiare la natura del punto (0,0).
Scriviamo la f in questo modo:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^4 - 6x^2y + 3y^2 + x^4 - x^2y = 3(x^2-y)^2 + x^2(x^2-y) = \\ &= (x^2-y)[3(x^2-y)+x^2] = (x^2-y)(4x^2-3y); \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Risulta allora

$$f(x,y) \geq 0 \Longleftrightarrow (x^2-y)(4x^2-3y) \geq 0$$

Dunque se prendo un intorno U di (0,0) per tutte le coppie $(x,y) \in U$ tali che $y < x^2$ allora la funzione assume valore positivo, mentre se prendo $(x,y) \in U$ tale che $x^2 < y < 4/3x^2$ allora la funzione assume valore negativo. Dunque ho trovato due restrizioni in cui (0,0) ha natura diversa e quindi (0,0) è un punto sella, come si può anche vedere dal grafico:



Analisi Matematica II - 6 Luglio 2015
(Civile Meccanica)

---

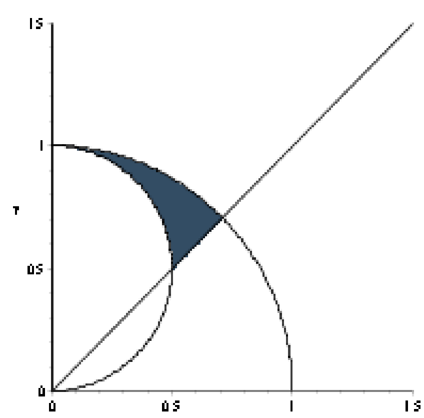
1) Calcolare la massa della lamina piana $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq y \, , \, x^2 + y^2 \leq 1 \, , \, x^2 + y^2 - y \geq 0\}$ di densità $\delta(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

2) Dimostrare che l'equazione $f(x,y) = 2x^2 - y - \arctan y = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di (0,0). Studiare la natura di tale punto.

3) Siano $U = (x, x+y, z)$ un campo vettoriale ed S la porzione di superficie parabolica, di equazione $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$. Si calcoli il flusso del rotore del campo U uscente da S e l'area di S.

---

1) L'insieme D si trova nel secondo ottante (al disopra della retta $y = x$) ed è costituito dai punti interni alla circonferenza di centro (0,0) e raggio 1 ed esterni alla circonferenza di centro (0,1/2) e raggio 1/2. L'immagine della lamina piana è la seguente:



Scriviamo la regione piana D in coordinate polari:

$$D = \{(r,t) : \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \ \sin(t) \leq r \leq 1\}.$$

Osserviamo che la prima diseguaglianza su r è determinata dalle proprietà dei triangoli rettangoli. Risulta allora

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \delta(x,y)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int_{\sin t}^{1} r \frac{r^3 \cos t \sin^2 t}{r^2} dr = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt \cos t \sin^2 t \int_{\sin t}^{1} r^2 dr = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t (1 - \sin^3 t) dt = \\ &= \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}/2}^{1} (w^2 - w^5) dw = \frac{1}{60} (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1) \end{aligned}$$

2) Risulta $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ed inoltre $f(0,0) = 0$. Si ha che $\nabla f = (4x, -1 - \frac{1}{1+y^2})$ e dunque $\nabla f(0,0) = (0,-2) \neq (0,0)$. E' allora possibile applicare il teorema delle funzioni implicite di Dini ed ottenere che la funzione f definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$ di classe almeno C^2 e tale che $y(0) = 0$. Risulta inoltre che $y'(0) = 0$ e dunque l'origine è un punto critico. Inoltre

$$y''(0) = -\frac{f''_{xx}(0,0)}{f'_y(0,0)} = 2 > 0 \qquad \text{(localmente convessa)}$$

Dunque ne segue che il punto $x = 0$ è un punto di minimo per $y = y(x)$.

3) Poiché $U = (x,y,z) + (0,x,0)$, e il campo (x,y,z) è ovviamente conservativo, il rotore di U coincide con quello di $(0,x,0)$. Un semplice calcolo mostra poi che $\text{rot}U = \nabla \times (0,x,0) = (0,0,1)$. La normale uscente da S in ogni punto (x,y,z) di S è data da: $n_e = (2x, 2y, -1)$ (diretta verso il basso) e quindi

$$\text{rot}\, U \cdot \frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

Il flusso del rotore di U è dato da:

$$\begin{aligned} \text{flusso(rot } U) &= -\int_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS = -\iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \frac{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dxdy = \\ &= -\text{area}(\{x^2+y^2 \leq 1\}) = -\pi. \end{aligned}$$

Sfruttando invece il teorema del rotore, il flusso in questione può essere calcolato mediante l'integrale curvilineo

$$\oint_{+\partial S} xdx + (x+y)dy + zdz = \oint_{+\partial S} xdy,$$

ove $+\partial S := \{(\cos t, \sin t, 1), 2\pi \geq t \geq 0\}$. Osserviamo che un osservatore che percorre ∂S con la testa posta nel verso di n_e percorre il bordo in verso orario lasciando la superficie alla propria sinistra.

$$\text{flusso}(\text{rot } U) = -\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -\pi.$$

Infine

$$\begin{aligned}
\text{area}(S) &= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2} dr = \frac{\pi}{4}\int_0^1 8r\sqrt{1+4r^2} dr = \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(1+4r^2)^{3/3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5^{3/2}-1) = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).
\end{aligned}$$

Analisi Matematica II - 7 Settembre 2015

1) Dopo averne giustificato l'esistenza, determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = y^2 - 4y + \arctan\left(x^2+4x\right), \quad (x,y) \in T$$

ove T è il triangolo di vertici $O=(0,0)$, $A=(0,4)$, $B=(-4,0)$.

2) Posto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\,, x-y \le 0\,, x \ge 0,\ y \ge 0\}$, calcolare $\displaystyle\int_{+\partial E} (x^2+y^2)\, ds$.

3) Determinarne l'insieme di convergenza assoluta, e quindi stabilire se in tale insieme converge anche totalmente, la serie di funzioni definita da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(4-x^2)^n}{3^n x^n (2+n^4)}\,,\ x \neq 0\ .$$

---

1) Risulta innanzitutto $f \in C^\infty(T)$ e siccome T è un compatto, per il teorema di Weierstrass f assume in T massimo e minimo assoluti. Innanzitutto il gradiente di f

$$\nabla f = \left(\frac{2x+4}{1+(x^2+4x)^2}, 2y-4\right)$$

si annulla solo nel punto (-2,2) che non appartiene a T°, dunque non ci sono punti estremanti nell'interno di T. I punti di massimo e di minimo si troveranno dunque lungo $Fr(T)$. La frontiera di T è compasta da tre segmenti:

$$\{(t,0), -4 \le t \le 0\} \cup \{(0,t), 0 \le t \le 4\} \cup \{(t, 4+t), -4 \le t \le 0\}.$$

Lungo il segmento $\{(t,0), -4 \le t \le 0\}$ la funzione assume il valore $f(t,0) = g(t) = \arctan(t^2+4t)$. Possiamo osservare che la funzione arctan è monotona crescente e dunque i punti di massimo o di minimo della g saranno quelli di massimo o di minimo per t^2+4t per $0 \le t \le 4$. Dunque la funzione g avrà due punti di massimo per $t = 0, -4$ ed un minimo per $t = -2$.

Lungo il segmento $\{(0,t), 0 \le t \le 4\}$ la funzione assume il valore $f(0,t) = h(t) = t^2 - 4t$, quando $0 \le t \le 4$ che assumerà due massimi per $t = 0, 4$ ed un minimo per $t = 2$.

Infine lungo il segmento $\{(t, 4+t), -4 \leq t \leq 0\}$ la funzione assume il valore $f(t, 4+t) = l(t) = t^2 + 4t + \arctan(t^2 + 4t)$ quando $-4 \leq t \leq 0$. Risulta

$$l'(t) = (2t+4)\left[1 + \frac{1}{1+(t^2+4t)^2}\right] \geq 0 \Longleftrightarrow t \geq -2.$$

Quindi $t = -4, 0$ sono punti di massimo, $t = -2$ è un punto di minimo.

Ricapitolando abbiamo individuato come candidati ad essere punti di massimo i punti (-4,0), (0,4), (0,0). In tutti e tre i punti la funzione f si annulla e pertanto saranno tutti di massimo assoluto per f.

I candidati ad essere punti di minimo sono (-2,0), (0,2), (-2,2). Risulta

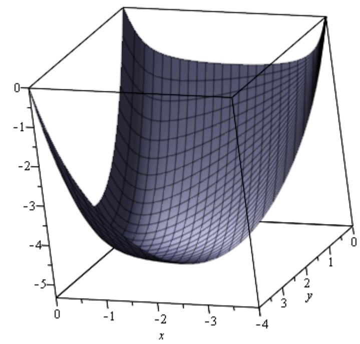
$$f(-2, 0) = -\arctan(4), f(0, 2) = -4, f(-2, 2) = -\arctan(4) - 4.$$

Il minimo assoluto è raggiunto quindi nel punto (-2,2).

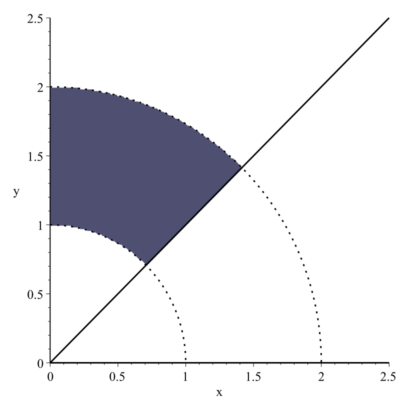
Analizziamo allora i punti (-2,0) e (0,2). Abbiamo già visto che per entrambi esistono due restrizioni ($g(t)$ e $h(t)$ rispettivamente) per le quali sono punti di minimo.
Consideriamo ora la restrizione $\{(-2, t), 0 \leq t \leq 2\}$. Risulta $f(-2, t) = m(t) = t^2 - 4t - \arctan(4)$ che ha un massimo per $t = 0$, quindi il punto (-2,0) è un punto sella (minimo per la g e massimo per la m).

Se invece consideriamo la restrizione $\{(t, 2), -2 \leq t \leq 0\}$ risulta $f(t, 2) = n(t) = \arctan(t^2 + 4t) - 4$. Per $t = 0$ la n ha un massimo e dunque il punto (0,2) ha lo stesso comportamento del punto (-2,0).

In T la funzione f assume tre punti di massimo assoluto (-4,0), (0,4), (0,0); uno di minimo assoluto (-2,2) e due punti sella (-2,0) e (0,2), come si evince anche dal grafico della funzione:



2) Disegniamo innanzitutto l'insieme E:



Il verso di percorrenza positivo della frontiera di E è quello antiorario e dunque

$$\begin{aligned} +\partial E &= \{(t,t), \frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le \sqrt{2}\} \cup \{(2\cos t, 2\sin t), \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}\} \cup \\ & \quad \{(0,t), 2 \ge t \ge 1\} \cup \{(\cos t, \sin t), \frac{\pi}{2} \ge t \ge \frac{\pi}{4}\}. \end{aligned}$$

Nel tratto (t,t) con $\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le \sqrt{2}$ risulta $ds = \sqrt{2}dt,\ x^2 + y^2 = 2t^2$;

nel tratto $(2\cos t, 2\sin t)$ con $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$ risulta $ds = 2dt,\ x^2 + y^2 = 4$;

nel tratto $(0,t)$ con $2 \ge t \ge 1$ risulta $ds = dt,\ x^2 + y^2 = t^2$;

nel tratto $(\cos t, \sin t)$ con $\frac{\pi}{2} \ge t \ge \frac{\pi}{4}$ risulta $ds = dt,\ x^2 + y^2 = 1$.

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{+\partial E} (x^2+y^2)\, ds &= 2\sqrt{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} t^2 dt + 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_2^1 t^2 dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dt = \\
&= \frac{7}{4}\pi - \frac{7}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}\frac{7}{8}\right) = \\
&= \frac{7}{4}\pi - \frac{7}{3} + \frac{7}{3} = \frac{7}{4}\pi.
\end{aligned}$$

3) Poniamo innanzitutto

$$w = \frac{4-x^2}{3x}.$$

La serie data (di potenze) diventa:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2+n^4} w^n.$$

Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ottiene che la serie converge assolutamente se $|w| < 1$, cioè $x \in]-4,-1[\cup]1,4[$.
Se $x = 1, x = -4$ allora $w = 1$ e dunque la serie converge per il criterio del confronto asintotico ($\sim \frac{1}{n^2}$); se $x = -1, x = 4$ allora $w = -1$ e la serie a segni alterni converge in valore assoluto (diventa la precedente). Quindi la serie converge assolutamente in $[-4,-1] \cup [1,4]$ e dunque anche uniformemente per il teorema di Abel. Infine in tale insieme la convergenza è anche totale:

$$\frac{n^2}{2+n^4}\left|\frac{4-x^2}{3x}\right|^n \le \frac{1}{n^2}, \quad \forall\, x \in [-4,-1] \cup [1,4].$$

In $\mathbb{R} \setminus ([-4,-1] \cup [1,4])$ la serie non può convergere.

Analisi Matematica II - 11 Gennaio 2016
(Civile Meccanica)

---

1) Si determini l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{3x}{x^2+2})^n,$$

e si trovi la somma della stessa in A.

2) Calcolare il lavoro svolto dal campo di forze $F = (xe^{-x^2} + y, x + \frac{1}{\sqrt{y}(3+2\sqrt[3]{y})})$ quando sposta un punto materiale lungo il segmento $(0,1) \to (3,1)$.

3) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \frac{y}{x^2} e^{xy} dxdy$$

quando $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq 3x^2, \frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x}\}$.

---

1) Posto $y = \frac{3x}{x^2+2}$, la serie acquista la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ny^n,$$

che è una ben nota serie di potenze con raggio di convergenza 1. E' anche facile vedere che, se $y = 1$ oppure $y = -1$, la serie assegnata non è convergente, in quanto il termine generale non è infinitesimo. L'insieme A si potrà descrivere quindi tramite la relazione $|y| < 1$. Semplici calcoli mostrano che tale condizione è verificata se e solo se $x < -2$, oppure $-1 < x < 1$ oppure $x > 2$. Pertanto si ha $A =]-\infty, -2[\bigcup]-1,1[\bigcup]2,+\infty[$. Quanto alla somma della serie, essendo (per $|y| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ny^{n-1} = \frac{d}{dy}(\frac{1}{1-y}) = \frac{1}{(1-y)^2},$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ny^n = \frac{y}{(1-y)^2},$$

avremo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{3x}{x^2+2})^n = \frac{3x}{x^2+2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{3x}{x^2+2}\right)^2} = \frac{3x(x^2+2)}{(x^2-3x+2)^2}$$

2) Il lavoro compiuto dalla forza F per spostare un punto materiale lungo il segmento $\vec{PQ} := (0,1) \to (3,1)$ è dato da:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\vec{PQ}} (xe^{-x^2}+y)dx + (x + \frac{1}{\sqrt{y}(3+2\sqrt[3]{y})})dy = \int_0^3 (xe^{-x^2}+1)dx = \\ &= 3 - \frac{1}{2}(e^{-9}-1). \end{aligned}$$

L'esercizio è dunque terminato qui!! L'esercizio poteva essere svolta anche cercando di capire se il campo di forze era o meno conservativo.
Sia $\omega = (xe^{-x^2}+y)dx+(x+\frac{1}{\sqrt{y}(3+2\sqrt[3]{y})})dy$ la forma differenziale associata al campo F. Le sue componenti sono sicuramente di classe $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$; siccome $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ è un **convesso** per provare l'esattezza di ω basta provarne la chiusura. (**Attenzione**: la chiusura non implica in generale l'esattezza della forma differenziale). Risulta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xe^{-x^2}+y) = \frac{\partial}{\partial x}(x + \frac{1}{\sqrt{y}(3+2\sqrt[3]{y})}) = 1.$$

Per calcolare la classe delle primitive partiamo dal punto iniziale $(0,1)$.

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x (te^{-t^2}+1)dt + \int_1^y (x + \frac{1}{\sqrt{t}(3+2\sqrt[3]{t})})dt + c = \\ &= \frac{-e^{-x^2}}{2} + x + (y-1)x + \int_1^y \frac{1}{\sqrt{t}(3+2\sqrt[3]{t})}dt + c \overset{(t=z^6)}{=} \\ &= \frac{-e^{-x^2}}{2} + xy + \int_1^{\sqrt[6]{y}} \frac{6z^5}{z^3(3+2z^2)}dz = \\ &= \frac{-e^{-x^2}}{2} + xy + 3\int_1^{\sqrt[6]{y}} (1 - \frac{3}{3+2z^2})dz = \\ &= \frac{-e^{-x^2}}{2} + xy + 3(\sqrt[6]{y}-1) - 3\int_1^{\sqrt[6]{y}} \frac{1}{\frac{2z^2}{3}+1}dz = \\ &= \frac{-e^{-x^2}}{2} + xy + 3\sqrt[6]{y} - 3\frac{\sqrt{6}}{2}\arctan(\frac{\sqrt{6}\sqrt[6]{y}}{3}) + c \end{aligned}$$

Il lavoro svolto dalla forza F è pari a

$$L = U(3,1) - U(0,1) = 3 - \frac{1}{2}(e^{-9}-1).$$

3) Osserviamo che i punti di D possono essere visti in questo modo:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{x^2} \in [2,3],\ xy \in [\frac{1}{2},1] \right\}.$$

Operiamo allora il seguente cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^2} \\ v = xy \end{cases} \qquad (u,v) \in [2,3] \times [\frac{1}{2},1]$$

da cui

$$r := \begin{cases} x = \sqrt[3]{v/u} \\ y = \sqrt[3]{uv^2} \end{cases} \qquad (u,v) \in [2,3] \times [\frac{1}{2},1] = D'$$

Questa trasformazione $r : D' \to D$ è una biiezione ed è di classe almeno $C^1(D')$ e lo Jacobiano della trasformazione vale $J = -\dfrac{1}{3u}$. Se applichiamo l'integrazione per sostituzione otteniamo:

$$\iint_D \frac{y}{x^2} e^{xy} dxdy \quad = \quad \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{1}{u} u du \int_{1/2}^1 e^v dv = \frac{1}{3}(e - \sqrt{e}).$$

Analisi Matematica II - 8 Febbraio 2016 (Civile-Meccanica)

---

1) Si calcoli l'area della regione di piano, avente equazione $z = 3x + y - 1$, ottenuta intersecando tale piano con il cilindro $4x^2 + y^2 = 1$.

2) Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)|\log(x^2+y^2)| & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) studiarne continuità e derivabilità in $(0,0)$;

b) determinarne, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto nel disco D di centro l'origine e raggio unitario.

3) **(civile)** Un punto materiale di massa unitaria si muove lungo una retta soggetto ad una forza esterna $F = 3y'(t) - 2y(t) + e^{2t}$. Sapendo che nell'istante $t = 0$ il punto si trova nella posizione $y = 1$ e che la sua velocità iniziale è nulla, determinare l'equazione oraria del punto materiale.

(meccanica) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_C \frac{y\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx,$$

dove C è l'arco di seno che congiunge i punti $(\pi/2, 1) \to (0,0)$.

---

1) sia $A := \{(x, y, 3x + y - 1) : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$. Si ha dunque

$$\text{area}(A) = \iint_E \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy = \sqrt{11}\cdot\text{area}(E) = \sqrt{11}\pi ab = \frac{\pi}{2}\sqrt{11},$$

dato che l'ellisse ha semiassi $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 1$.

2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2|\log\rho^2| = 0 \text{ uniformemente rispetto a } \theta,$$

quindi f è continua globalmente nell'origine. Per quanto riguarda la derivabilità si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2|\log h^2|}{h} = 0 := f'_x(0,0)$$

ed analogamente, per simmetria, $f'_y(0,0) = 0$; pertanto $Df(0,0) = (0,0)$. Poiché f è continua e D compatto, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo

assoluti su D. Siccome la funzione è non negativa i suoi zeri sono punti di minimo assoluto; i punti $(x, y) = (0, 0)$ e $x^2+y^2 = 1$, cioè il centro di D e la sua frontiera, sono di minimo assoluto per f su D.
Cerchiamo ora i punti di massimo assoluto, applicando il teorema di Fermat nell'insieme $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x^2+y^2 < 1\}$ (punti interni in cui f ammette derivate parziali, l'origine è stata già studiata).

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = -2x\,[\log(x^2 + y^2) + 1] = 0 \\ f'_y(x, y) = -2y\,[\log(x^2 + y^2) + 1] = 0 \\ 0 < x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \log(y^2) = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} \log(x^2) = -1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \log(x^2 + y^2) = -1 \\ \log(x^2 + y^2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{e}$$

dovendo il massimo essere assunto su D_1, sono tutti punti di massimo assoluto.

3) **(civile)** Risulta $F = ma = 3y'(t)-2y(t)+e^{2t}$ quindi l'equazione differenziale che governa il moto del punto materiale è: $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{2t}$. Si tratta quindi di risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione carattestica associata è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ le cui radici sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Segue che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(t) = c_1e^t + c_2e^{4t}\ ,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $y_p(t) = kte^{2t}$ (essendo 2 radice dell'equazione caratteristica). Derivando due volte e sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene $4k(1 + t) - 3k(1 + 2t) + 2kt = 1$ da cui $k = 1$. Quindi l'integrale generale dell'equazione di partenza è

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + te^{2t}.$$

Imponiamo ora i dati iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

$$y(0) = c_1 + c_2+ = 1$$
$$y'(0) = c_1 + 2c_2 + 1 = 0$$

da cui $c_1 = 2, c_2 = -1$. L'equazione oraria cercata è $y(t) = 2e^t + e^{2t}(t-1)$.
(meccanica) La curva C può essere parametrizzata in questo modo:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} \geq t \geq 0.$$

Risulta $dx = dt$ e pertanto

$$\begin{aligned} \int_C \frac{y\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx &= -\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cos^3 t}{1+\sin^2 t}dt \overset{(\cos t = z)}{=} \int_1^0 \frac{z^3}{2-z^2}dz = \\ &= \int_0^1 (z - \frac{2z}{z^2-2})dz = \frac{1}{2} - \log 2. \end{aligned}$$

Analisi Matematica II - 6 Giugno 2016
(Civile Meccanica)

---

1) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2$. Determinarne quindi massimo e minimo assoluti, se esistono, nel triangolo di vertici $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$.

2) Posto $D = \left\{(x,y)\mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq 3x^2, \frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$, calcolare $\iint_D \frac{y}{x^2} e^{xy}\, dxdy$ utilizzando il seguente cambio di variabili $u = \frac{y}{x^2}, v = xy$.

3) Si studi la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(x-2)^{n-1}}{(x+3)^{n+1}},$$

e si determini la somma della serie, laddove converge.

---

1) I punti che annullano il gradiente sono $(0,0)$ e $(3/4, -9/16)$. La matrice hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+4y & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix}$$

la quale in $(3/4, -9/16)$ ha determinante negativo, cosicché tale punto è di sella per la funzione. Poiché in $(0,0)$ ha determinante nullo, per stabilire la natura di tale punto critico dobbiamo ricorrere alla definizione: si ha che $f(0,0) = 0$ e che $f(x,0) = x^3$, che è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$; allora il punto non è né di massimo né di minimo relativo per f.

Sul triangolo f ammette sia massimo assoluto che minimo assoluto per Weierstrass. Si ha:

$$\begin{aligned} f_{|\overline{AB}}(x,y) &= x^3,\ x \in [0,1] \\ f_{|\overline{BC}}(x,y) &= 1 + 2y + y^2 = (1+y)^2,\ y \in [0,1] \\ f_{|\overline{AC}}(x,y) &= 3x^3 + x^2,\ x \in [0,1] \end{aligned}$$

che sono tutte funzioni crescenti nei rispettivi domini, quindi $(0,0)$ è punto di minimo assoluto per f sul triangolo e $(1,1)$ è punto di massimo assoluto; allora 0 è il minimo di f sul triangolo e 4 è il massimo.

2) Osserviamo che i punti di D possono essere visti in questo modo: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{x^2} \in [2, 3], xy \in [\frac{1}{2}, 1]\}$. Operiamo il cambiamento di variabili consigliato:

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^2} \\ v = xy \end{cases} \qquad (u, v) \in [2, 3] \times [\frac{1}{2}, 1]$$

da cui

$$r := \begin{cases} x = \sqrt[3]{v/u} \\ y = \sqrt[3]{uv^2} \end{cases} \qquad (u, v) \in [2, 3] \times [\frac{1}{2}, 1] = D'$$

Questa trasformazione $r : D' \to D$ è una biiezione ed è di classe almeno $C^1(D')$ e lo Jacobiano della trasformazione vale $J = -\frac{1}{3u}$. Se applichiamo l'integrazione per sostituzione otteniamo:

$$\iint_D \frac{y}{x^2} e^{xy} dxdy \ = \ \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{1}{u} udu \int_{1/2}^1 e^v dv = \frac{1}{3}(e - \sqrt{e}).$$

3) La serie può essere scritta come segue:

$$\frac{1}{(x+3)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} nq(x)^{n-1},$$

ove $q(x) = \frac{x-2}{x+3}$, ovviamente con $x \neq -3$. Come noto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$ non è altro che la serie derivata della serie geometrica di ragione q, e quindi converge per $|q| < 1$, con somma $\frac{1}{(1-q)^2}$ (applicando il teorema di derivazione per serie alla serie geometrica e ricordando che le serie di potenze e le serie delle loro derivate hanno lo stesso raggio di convergenza).

La disequazione $|q(x)| < 1$ può essere risolta come segue:

$$|q(x)| < 1 \iff |x - 2| < |x + 3| \iff (x - 2)^2 < (x + 3)^2 \iff x > -\frac{1}{2}.$$

In tale semiretta si ha quindi convergenza, e la somma totale è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(x-2)^{n-1}}{(x+3)^{n+1}} = \frac{1}{(x+3)^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{x-2}{x+3})^2} = \frac{1}{25}.$$

Analisi Matematica II - 27 Giugno 2016

1. Calcolare la massa ed il baricentro della fune di equazione $x(t) = t, y(t) = t^2, z(t) = \frac{2}{3}t^3, 0 \leq t \leq 1$ sapendo che la funzione densità $\delta(x(t), y(t), z(t)) = t$. Il baricentro è un punto della fune?

2. Sia $\omega = -\frac{y}{x^2}\,dx + \frac{y^2 - x}{xy^2}\,dy$ una data forma differenziale lineare. Provare che ω è esatta in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. In caso di risposta positiva calcolare la famiglia delle primitive di ω.
   Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega + \int_\gamma y\,dy$ ove $\gamma : \begin{cases} x = t^2 - 4t + 5 \\ y = t - 1 \end{cases} \quad 2 \leq t \leq 3.$

3. Si consideri nel piano l'equazione $(x+y)(x^2+y^2) = x^2+xy+y^2$, e si verifichi se esiste, nell'interno del I quadrante, un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ in un intorno del quale sia possibile esplicitare la y in funzione di x, in modo tale che $y'(x_0) = -1$.

Svolgimento

1) La fune è una curva regolare, infatti è semplice, le componenti sono dei polinomi e quindi ammettono derivata di ogni ordine, inoltre $x'(t) = 1$ e $ds = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}dt = (1 + 2t^2)dt$. Risulta allora

$$m = \int_0^1 t\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}dt = \int_0^1 t(1 + 2t^2)dt = 1$$

Per il baricentro osserviamo che

$$x_G = \int_0^1 t^2(1 + 2t^2)dt = \frac{8}{15}; \quad y_G = \int_0^1 t^3(1 + 2t^2)dt = \frac{7}{12}; \quad z_G = \int_0^1 \frac{2}{3}t^4(1 + 2t^2)dt = \frac{34}{105}.$$

Il baricentro non appartiene alla fune, infatti $y(\frac{8}{15}) \neq \frac{7}{12}$.

2) La forma differenziale lineare ω è chiusa su A. Infatti posto $a(x, y) = -\frac{y}{x^2}$, $b(x, y) = \frac{y^2 - x}{xy^2}$, risulta $a, b \in C^1(A)$ e $a'_y(x, y) = -\frac{1}{x^2} = b'_x(x, y)$.
Poiché l'insieme A è convesso e ω è chiusa, possiamo concludere che ω è esatta. Per determinare la classe delle primitive di ω impostiamo il sistema

$$\nabla(F) = (F'_x(x, y), F'_y(x, y)) = \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{y^2 - x}{xy^2}\right).$$

Integrando la prima equazione rispetto ad x abbiamo

$$F(x,y) = \int -\frac{y}{x^2}\,dx = \frac{y}{x} + c(y)\ ;$$

derivando questa rispetto ad y otteniamo $F'_y(x,y) = \frac{1}{x} + c'(y)$ la quale, sostituita nella seconda equazione, fornisce

$$\frac{1}{x} + c'(y) = \frac{y^2 - x}{xy^2} \equiv \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow c'(y) = -\frac{1}{y^2}$$

da cui $c(y) = \dfrac{1}{y} + c, \quad c \in \mathbb{R}$. Allora $F(x,y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{y} + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$ è la classe delle primitive di ω. Passiamo ora a calcolare l'integrale curvilineo lungo la curva γ che congiunge il punto (1,1) con il punto (2,2):

$$\int_\gamma \omega + \int_\gamma y\,dy \quad = \quad F(2,2) - F(1,1) + \int_\gamma y\,dy = -\frac{1}{2} + \int_2^3 t - 1\,dt = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

3) Posto

$$f(x,y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - x^2 - xy - y^2,$$

l'equazione assegnata è equivalente a $f(x,y) = 0$. Per il teorema di Dini la y si potrà esplicitare se $f'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Inoltre, se ciò è possibile, la derivata y' sarà data da

$$y'(x) = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)},$$

almeno in un intorno di P_0. Perché tale derivata sia uguale a -1 in un punto $P \equiv (x,y)$ si deve avere $f'_x(x,y) = f'_y(x,y)$, ossia

$$3x^2 + 2xy + y^2 - 2x - y = x^2 + 2xy + 3y^2 - x - 2y,$$

da cui facilmente si ricava $2(x^2 - y^2) - (x - y) = 0$. Tale condizione è soddisfatta chiaramente se $x = y$ oppure se $x + y = \frac{1}{2}$. Nei punti del tipo $x = y$, si ha $f(x,y) = f(x,x) = x^2(4x-3)$. Poiché il punto $x = y = 0$ non è interno al I quadrante, va escluso, e quindi resta il punto $x = y = \dfrac{3}{4}$.

Se invece si scegliesse un punto della retta $x + y = \dfrac{1}{2}$, l'equazione di partenza non sarebbe verificata, almeno nel I quadrante, in quanto tale equazione presuppone che

$$\begin{aligned} x^2(x+y) + y^2(x+y) &= x^2 + xy + y^2 \\ \frac{1}{2} &= x + y = \frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2 + y^2} = 1 + \frac{xy}{x^2 + y^2} > 1. \end{aligned}$$

Resta dunque l'unica possibilità $P_0 \equiv (\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4})$

Analisi Matematica II - 11 Luglio 2016

1) E' assegnata la serie di funzioni: $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{n(|\sin x| - |\cos x|)}$, $\quad x \in [-\pi, \pi]$. Si determini l'insieme di convergenza e la somma in tale insieme. La serie data converge uniformemente in tale insieme?

2) Si consideri la funzione $f(x, y, z) = (z - x^2 - y^2) - \sin^2(z - x^2 - y^2)$ nel suo campo di esistenza, e si trovino gli eventuali punti di massimo e minimo liberi. Si trovino poi, se esistono, il massimo e minimo assoluto di f nel dominio compatto D definito da: $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq \pi\}$.

3) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si consideri la curva continua C di equazioni $x(t) = \sin(3t)\cos t$, $\quad y(t) = \sin(3t)\sin t$, $\quad z(t) = \cos(3t)$, $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$, e si calcoli l'integrale curvilineo $\int_C \omega$, ove

$$\omega = \left(\frac{\sin x}{x^2+1} + z\right) dx + \left(z + \sin(y^6)\right) dy + \left(y - \frac{e^{z^2}}{z^2+1}\right) dz$$

---

1) La serie assegnata è una serie geometrica, essendo

$$e^{n(|\sin x| - |\cos x|)} = (e^{|\sin x| - |\cos x|})^n.$$

Tale serie è ovviamente convergente in $[-\pi, \pi]$ se e solo se la ragione $q = e^{|\sin x| - |\cos x|}$ soddisfa $|q| < 1$. Basta imporre $|\sin x| - |\cos x| < 0$. Tale condizione equivale a $\sin^2 x < \cos^2 x$, ossia $\cos(2x) > 0$. Quindi la serie data converge se e solo se $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
In tale insieme la somma della serie è ovviamente

$$S(x) = \frac{1}{1 - e^{|\sin x| - |\cos x|}}.$$

In $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la convergenza non è uniforme. Infatti, se lo fosse, per il criterio di Cauchy dovrebbe risultare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ $(p = 0)$,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (e^{|\sin x| - |\cos x|})^n = e^n \leq \varepsilon$$

che è ovviamente assurdo.

2) Consideriamo la funzione $h(u) = u - \sin^2 u$, definita, continua e derivabile infinite volte su tutto $\mathbb{R}$. Essendo $f(x, y, z) = h(z - x^2 - y^2)$, è evidente che f è definita, continua e derivabile infinite volte in tutto $\mathbb{R}^3$. Ora, essendo

$$h'(u) = 1 - 2 \sin u \cos u = 1 - \sin(2u) \geq 0. \quad \forall\, u,$$

h risulta crescente in $\mathbb{R}$, e anche nei punti ove $h'(u) = 0$ non si hanno che flessi. Dunque h è strettamente monotona, e quindi f non può avere punti di massimo o minimo relativi.

Ora, nel dominio D la f ammette senz'altro minimo e massimo assoluti e, per quanto visto finora, essi possono essere solo nella frontiera di D; inoltre, data la monotonia di h, basterà trovare in ∂D i punti di massimo e minimo per la funzione $z - x^2 - y^2$: poiché in D si ha $z - x^2 - y^2 \geq 0$, ivi risulta $f(x, y, z) \geq h(0) = 0$. Allora tutti i punti del tipo $z = x^2 + y^2$ sono punti di minimo. Resta da esaminare la parte di frontiera di D contenuta nel piano $z = \pi$. Evidentemente nel punto $(0, 0, \pi)$ la quantità $z - x^2 - y^2$ assume il massimo valore possibile, e quindi massimo valore di f in D è π.

3) La curva C è regolare e chiusa, e la forma differenziale

$$\omega' := \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx + (z + \sin(y^6) dy + (y - \frac{e^{z^2}}{z^2 + 1}) dz$$

è definita e chiusa in $\mathbb{R}^3$, dunque essa è esatta e pertanto ha integrale nullo lungo C. L'integrale richiesto sarà allora uguale a

$$\int_C \omega = \int_C (\omega - \omega') = \int_C z dx = \int_0^{2\pi} (3 \cos^2(3t) \cos t - \sin(3t) \cos(3t) \sin t) dt$$

Ora, applicando le formule di addizione, si ottiene

$$\int_C \omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 \cos t \cdot (1 + \cos(6t)) - \sin(6t) \sin t) dt.$$

Grazie alle formule di prostaferesi si vede ora facilmente che l'integrale risulta nullo.

Analisi Matematica II - 5 Settembre 2016
(Civile – Meccanica)

Nome: __________________ Cognome _____________________________ Matr. __________
email ____ CdL __________________________

---

1) Determinare l'insieme di convergenza assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{x+n}}{x^n}\, tg\, \frac{1}{n} \ , \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e stabilire se la serie converge totalmente in tale insieme.

2) Sia $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq \pi\}$; si calcoli la massa del solido D supponendo che la densità δ sia data da $\delta(x, y, z) = \dfrac{1}{z+1}$.

3) Un punto materiale è spostato lungo il segmento che congiunge il punto $P_0 = (0, 0, 1)$ con il punto $P_1 = (1, 1, 2)$ dal campo di forze $\vec{F}(x, y, z) = (z, 3z, 1 + x + ky + log\, z)$. Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\vec{F}$ e determinare per quali valori di k tale campo è conservativo.

---

1) Riscriviamo la serie nel seguente modo:

$$e^x \sum_{n=1}^{+\infty} tg\, \frac{1}{n} \left(\frac{e}{x}\right)^n \quad , \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Chiaramente il suo termine generale non si annulla mai, quindi possiamo subito applicare il criterio del rapporto alla serie assoluta associata alla serie data ed ottenere che:

se $\left|\frac{e}{x}\right| < 1 \ (x \neq 0) \ \Leftrightarrow |x| > e \Leftrightarrow x < -e \ \vee \ x > e$, allora la serie assoluta converge;

se $\left|\frac{e}{x}\right| > 1 \ (x \neq 0) \ \Leftrightarrow |x| < e \ (x \neq 0) \ \Leftrightarrow -e < x < 0 \ \vee \ 0 < x < e$, allora la serie assoluta non converge;

se $\left|\frac{e}{x}\right| = 1 \Leftrightarrow |x| = e \Leftrightarrow x = \pm e$, allora la serie assoluta si riduce alla serie numerica $e^{\pm e} \sum_{n=1}^{+\infty} tg\, \frac{1}{n}$, la quale diverge per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ essendo $\lim_{n \to +\infty} n \cdot tg\, \frac{1}{n} = 1$. Concludiamo quindi che l'insieme di convergenza assoluta della serie di funzioni data è $I =]-\infty, -e[\cup]e, +\infty[$.

Per quanto riguarda la convergenza totale della serie di funzioni nell'insieme di convergenza assoluta, osserviamo che

$$\sup_{x \in I} \left| tg\, \frac{1}{n} \left(\frac{e}{x}\right)^n \right| = tg\, \frac{1}{n}$$

per ogni $n > 0$. Dalla caratterizzazione della convergenza totale per le serie di funzioni deduciamo che la serie data non converge totalmente in I.

2) Conviene utilizzare le coordinate cilindriche:

$$x = \rho \cos\theta, \ y = \rho \sin\theta, \ z = z; \quad J = \rho \ .$$

L'insieme D é allora il trasformato del dominio

$$D' := \{(\theta, \rho, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{\pi}, \rho^2 \leq z \leq \pi\}.$$

Applicando dunque le formule di cambiamento di variabili e quelle di integrazione secondo Fubini si ha

$$\begin{aligned} M(D) &= \iiint_D \frac{1}{z+1} dx dy dz = \iiint_{D'} \frac{1}{z+1} \rho \, d\theta d\rho dz = \iint_{[0,2\pi]\times[0,\sqrt{\pi}]} \rho \left(\int_{\rho^2}^{\pi} \frac{1}{z+1} dz \right) d\theta d\rho = \\ &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,\sqrt{\pi}]} \left[\rho log\,(\pi+1) - \rho log\,(\rho^2+1) \right] d\theta d\rho; \end{aligned}$$

Usando ora le formule di riduzione per gli integrali doppi ed osservando che si sta integrando una funzione a variabili separabili definita su un rettangolo, si ottiene

$$\begin{aligned}
M(D) &= 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} \left[\rho log\,(\pi+1) - \rho log\,(\rho^2+1)\right] d\rho = \\
&= \pi^2 log\,(\pi+1) - 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} \rho log\,(\rho^2+1) d\rho \underbrace{=}_{per\,parti} \\
&= \pi^2 log\,(\pi+1) - 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} log\,(\rho^2+1)|_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{\rho^2}{2}\frac{2\rho}{\rho^2+1} d\rho\right] = \\
&= \pi^2 log\,(\pi+1) - 2\pi \left[\frac{\pi}{2} log\,(\pi+1) - \int_0^{\sqrt{\pi}} \rho - \frac{\rho}{\rho^2+1} d\rho\right] = \\
&= \pi\left[\rho^2 - log(\rho^2+1)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = \pi^2 - \pi\, log\,(\pi+1).
\end{aligned}$$

3) Essendo A un insieme convesso, condizione necessaria e sufficiente perché il campo sia conservativo è che esso sia irrotazionale, per cui

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x}(x,y,z) &\Leftrightarrow 0 = 0 \\
\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial \vec{F}_3}{\partial x}(x,y,z) &\Leftrightarrow 1 = 1 \\
\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial \vec{F}_3}{\partial y}(x,y,z) &\Leftrightarrow 3 = k.
\end{aligned}$$

Per $k = 3$ la famiglia dei potenziali è quella per cui

$$\begin{cases}
\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = z \\
\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = 3z \\
\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = 1 + x + 3y + log\,z.
\end{cases}$$

Per determinare l'espressione di U integriamo la prima rispetto ad x:

$$U(x,y,z) = \int z\,dx = xz + c(y,z).$$

Per ricavare l'espressione di c deriviamo rispetto ad y e sostituiamo nella seconda equazione:

$$3z = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial c}{\partial y}(y,z)$$

da cui

$$c(y,z) = \int 3z\,dy = 3yz + h(z).$$

Allora

$$U(x, y, z) = xz + 3yz + h(z).$$

Per ricavare h deriviamo rispetto a z e sostituiamo nella terza equazione:

$$1 + x + 3y + log\, z = \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = x + 3y + h'(z)$$

da cui

$$h(z) = \int (1 + log\, z)\, dz = z\, log\, z + p,\ \ p \in \mathbb{R}.$$

Allora la famiglia dei potenziali è

$$U(x, y, z) = xz + 3yz + z\, log\, z + p,\ \ p \in \mathbb{R}.$$

Il lavoro compiuto dal campo di forze $\vec{F}$ sarà dato da:

$$L = \begin{cases} U(1, 1, 2) - U(0, 0, 1) & k = 3 \\ \int_0^1 \vec{F}(t, t, 1 + t) \cdot (1, 1, 1) & k \neq 3 \end{cases}$$

Analisi Matematica II - 9 Gennaio 2017
(Civile – Meccanica)

---

1) Calcolare l'area della regione di piano

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 1 \leq y \leq \sqrt{3}x\}.$$

2) Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo della funzione

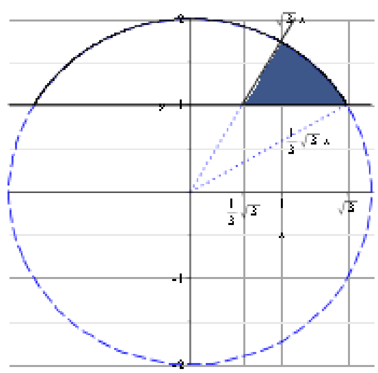
$$f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Studiare quindi i massimi e minimi assoluti di f sul segmento $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x,\ 0 \leq x \leq 1\}$.

3) Sia E l'insieme ottenuto ruotando attorno all'asse z il triangolo di vertici $(0,0,0),\ (0,1,1),\ (0,1,-1)$. Dopo aver disegnato tale insieme esprimerlo in coordinate cilindriche.

---

1) La regione di piano di cui dobbiamo calcolare l'area si trova nel primo quadrante



ed è individuata dal settore circolare di angolo $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ a cui va tolto il triangolo di vertici $(0,0), (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1), (\sqrt{3}, 1)$. Il triangolo ha altezza 1 e base $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ per cui la sua area vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$. l'area del settore di ampiezza $\frac{\pi}{6}$ e raggio $r = 2$ è $\frac{\pi}{3}$.

L'area cercata vale $\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{3}$.
Un secondo modo per calcolare l'area è quello di vedere la figura individuata dal triangolo di vertici $(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1),(1,1),(1,\sqrt{3})$ e dalla porzione di piano $A=\{(x,y):1\leq x\leq \sqrt{3}, 1\leq y\leq\sqrt{4-x^2}\}$. Infatti, nel primo quadrante, la retta $y=1$ interseca la retta $y=\sqrt{3}x$ nel punto $(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1)$ e la circonferenza nei punto $(\sqrt{3},1)$, mentre la retta $y=\sqrt{3}x$ interseca la circonferenza nel punto $(1,\sqrt{3})$. L'area cercata è pertanto la somma dell'area del trinagolo e di quella della figura A.

$$\begin{aligned}
\text{area}(E) &= \frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{3}}{3})\cdot(\sqrt{3}-1)+\int_1^{\sqrt{3}}dx\int_1^{\sqrt{4-x^2}}dy= \\
&= (2\frac{\sqrt{3}}{3}-1)+\int_1^{\sqrt{3}}(\sqrt{4-x^2}-1)dx= \\
&= 2\frac{\sqrt{3}}{3}-1-\sqrt{3}+1+\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx-\frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Utilizziamo la sostituzione $x=2\cos t$, $dx=-2\sin t$, $x=1,t=\pi/3,x=\sqrt{3},t=\pi/6$, pertanto

$$\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}4\sin^2 t dt=4\left[\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin t\cos t\right]_{\pi/6}^{\pi/3}=\frac{\pi}{3}.$$

L'area cercata risulta pari a $\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{3}$.
Un terzo metodo di calcolare l'area richiesta è quello che utilizza il passaggio a coordinate polari: $x=\rho\cos\theta$; $y=\rho\sin\theta$. In tal caso si osserva che per descrivere la regione E l'angolo θ varia all'interno dell'angolo formato dalle rette $y=\sqrt{3}x$ e $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ (la seconda retta è quella per l'origine passante per il punto di intersezione tra la circonferenza e la retta $y=1$) ovvero $\dfrac{\pi}{6}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{3}$. Per quanto riguarda ρ, esso è limitato dalla circonferenza e dalla retta $y=1$, le quali vengono trasformate dal cambiamento di coordinate rispettivamente in $\rho=2$ e $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta}$, per cui l'insieme E viene trasformato in

$$E'=\left\{(\theta,\rho):\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{\sin\theta}\leq\rho\leq 2\right\}.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
area(E) &= \iint_E dxdy=\iint_{E'}\rho\,d\theta d\rho=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2}\rho\,d\rho\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(4-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)d\theta= \\
&= \frac{\pi-\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

avendo effettuato la sostituzione $\sin^2\theta = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $t = \tan\theta$, per cui $\theta = \arctan\theta \Rightarrow d\theta = \dfrac{dt}{1+t^2}$ e

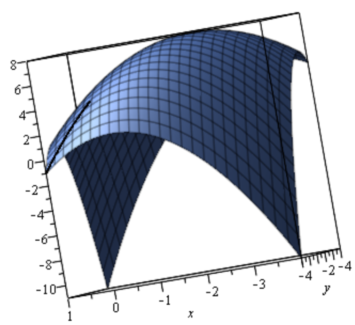
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2\theta} d\theta = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

2) La funzione f ammette derivate continue di ogni ordine in $\mathbb{R}^2$ e quindi i punti di massimo e di minimo relativo, per il teorema di Fermat, si trovano tra i punti che ne annullano il gradiente. Risulta $\nabla f = (-2x+y-2, x-2y-2) = (0,0)$ se e solo se $(x,y) = (-2,-2)$. Tale punto risulta di massimo, infatti

$$H(-2,-2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad f''_{xx} = -2.$$

Non ci sono altri massimi o minimi liberi in $\mathbb{R}^2$.

Il grafico della funzione f in un intorno del punto (-2,-2) è il seguente (la parte più scura si riferisce alla funzione f ristretta ad S)



Il segmento S è un compatto e pertanto $f|_S$ ammetterà massimi e minimi assoluti per il teorema di Weierstrass. Sia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) := f(x,x) = -x^2 - 4x + 4$. Risulta $g'(x) = -2x - 4 < 0$ sempre in $[0,1]$. Pertanto g è decrescente, quindi ammetterà massimo assoluto in $x = 0$ e minimo assoluto in $x = 1$. Il massimo assoluto di f in S è realizzato nel punto $(0,0)$ ed ivi f vale 4, il minimo assoluto è realizzato in $(1,1)$ ed ivi f vale -1.

3) L'insieme E è ciò che resta della sezione del cilindro retto di base il disco unitario compresa tra i piani $z = -1$ e $z = 1$ dopo avergli sottratto il cono retto a due falde $x^2+y^2-z^2 = 0$.

Data la struttura dell'insieme E e considerata la forma della funzione integranda, risolviamo l'integrale triplo tramite il cambiamento di coordinate delle coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho \, cos \, \theta \\ y = \rho \, sen \, \theta \\ z = z \end{cases} \quad , \quad jacob. = \rho \ .$$

Con tale cambiamento, l'insieme E viene trasformato in

$$F = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 \leq \rho \leq 1 \, , \, 0 \leq \theta \leq 2\pi \, , \, -\rho \leq z \leq \rho\}$$

(si noti che z deve essere compresa tra le due falde del cono, cioè $z^2 \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$).

Analisi Matematica II - 6 Febbraio 2017
(Civile – Meccanica)

---

1) Si consideri la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + x\right)dy$$

nel suo campo di esistenza, e si calcoli l'integrale curvilineo $\int_C \omega$, ove C è la curva di equazioni $C \equiv (2\cos t, \sin t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Determinare le coordinate del baricentro della figura E del I ottante delimitata da: $x = 1, x = y^2, z^2 = 2x$, sapendo che la funzione densità è costante: $c = 1$.

3) Studiare segno, continuità, derivabilità parziale della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{xy}(x^2+y^2-1) & , \quad xy \geq 0 \\ 0 & , \quad xy < 0\ . \end{cases}$$

---

1) Il dominio di ω è $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ivi la forma differenziale data non è esatta, tuttavia l'integrale curvilineo richiesto si può calcolare come

$$\int_C \omega_0 + \int_C xdy,$$

ove

$$\omega_0 = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

la quale è chiusa in A. Ora osserviamo che $\int_C xdy = \int_{\partial E} xdy$, ove E è la parte di ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ compresa nel primo quadrante (infatti, nei due tratti rettilinei di ∂E l'integrale di xdy è ovviamente nullo). Dunque, per una nota conseguenza delle formule di Green si ha $\displaystyle\int_C xdy = \frac{2\pi}{4}$, area della suddetta porzione di ellisse.

Per quanto riguarda l'integrale curvilineo di ω_0 su C, esso coincide con l'integrale curvilineo di ω_0 lungo l'arco di circonferenza C_0 di equazione $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, in quanto la forma chiusa ω_0 è esatta nella zona di primo quadrante compresa fra C e C_0, e ha integrale nullo lungo i tratti rettilinei della frontiera di tale zona. Un facile calcolo fornisce ora

$$\int_{C_0} \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

da cui in conclusione

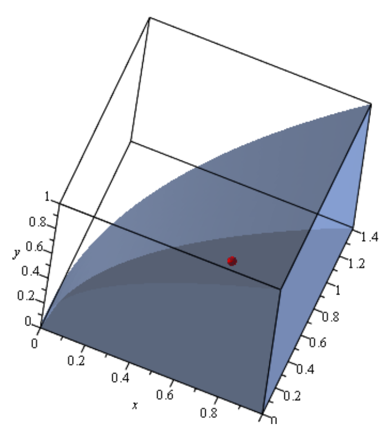
$$\int_C \omega = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{4} = \pi.$$

2) L'insieme E si può scrivere nella seguente forma:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{2x}\}.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned}
m(E) &= vol(E) = \iiint_E dxdydz = \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 dx \int_0^{\sqrt{2x}} dz = \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 \sqrt{2x}dx = \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{2} \int_0^1 \left[x^{\frac{3}{2}}\right]_{y^2}^1 dy = \frac{2}{3}\sqrt{2} \int_0^1 (1 - y^3)dy = \frac{2}{3}\sqrt{2}\left[y - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
x_G &= \frac{1}{m(E)} \iiint_E xdxdydz = \sqrt{2} \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 xdx \int_0^{\sqrt{2x}} dz = 2 \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 x^{3/2}dx = \\
&= \frac{4}{5} \int_0^1 \left[x^{\frac{5}{2}}\right]_{y^2}^1 dy = \frac{4}{5} \int_0^1 (1 - y^5)dy = \frac{2}{3} \\
y_G &= \frac{1}{m(E)} \iiint_E ydxdydz = \sqrt{2} \int_0^1 ydy \int_{y^2}^1 dx \int_0^{\sqrt{2x}} dz = \frac{4}{3} \int_0^1 y(1 - y^3)dy = \frac{2}{5} \\
z_G &= \frac{1}{m(E)} \iiint_E zdxdydz = \sqrt{2} \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 dx \int_0^{\sqrt{2x}} zdz = \sqrt{2} \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 xdx = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 (1 - y^4)dy = \frac{2\sqrt{2}}{5}.
\end{aligned}$$



3) *Segno.* Si ha

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow xy < 0 \ \vee \ x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy \geq 0 \end{cases};$$

$f(x,y) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2>1 \\ xy>0\ , \end{cases}$, cioè f è positiva per i punti del I e III quadrante esterni alla circonferenza unitaria.

Continuità. I punti da studiare per la continuità sono quelli dove cambia la legge, ma è facile osservare che, fissato un arbitrario punto (x_0, y_0) sugli assi, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0 y_0)\ ,\ xy\geq 0} \sqrt{xy}(x^2+y^2-1) = 0 = \lim_{(x,y)\to(x_0 y_0)\ ,\ xy<0} 0 = f(x_0,y_0)$$

e quindi la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

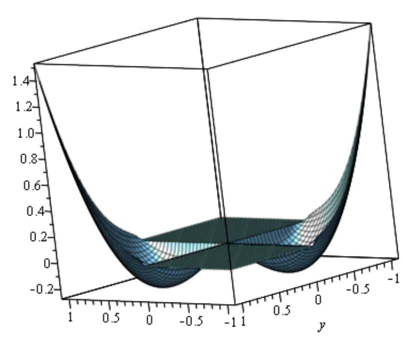
Derivabilità parziale. Anche qui sono da studiare a parte i punti degli assi in quanto altrove la funzione è derivabile come composizione di funzioni derivabili e si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{y}{2\sqrt{xy}}(x^2+y^2-1) + 2x\sqrt{xy} \\ f_y(x,y) &= \frac{x}{2\sqrt{xy}}(x^2+y^2-1) + 2y\sqrt{xy}\ . \end{aligned}$$

Nell'origine la funzione è derivabile in quanto sugli assi f è costante e vale 0.
Fissiamo $(x,0)$ con $x \neq 0$. Si ha

$$\lim_{k\to 0^+} \frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0^+} \frac{\sqrt{xk}(x^2+k^2-1)}{k} = +\infty$$

e quindi la funzione in tali punti non è derivabile. Analogamente per $(0,y)$ con $y \neq 0$.
Il grafico della funzione f è il seguente:



Analisi Matematica II - 5 Giugno 2017
(Civile – Meccanica)

---

1) Calcolare $\displaystyle\int_\Sigma \sqrt{1-x^2-y^2}\,dS$, quando la superficie Σ è generata dalla rotazione di γ : $(x(t)=\cos t, z(t)=t), t\in[0,\pi/2]$, intorno all'asse z.

2) Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione $f(x,y)=2+2x+4y-x^2-y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Quindi, dopo averne motivato l'esistenza, determinare il massimo ed il minimo assoluto di f sul triangolo T contenuto nel I quadrante e delimitato dalle rette $x=0$, $y=0$ e $y=9-x$.

3) Si consideri la forma differenziale $\omega=-\dfrac{y}{x^2+y^2}dx+\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}+x\right)dy$ nel suo campo di esistenza, e si calcoli $\displaystyle\oint_{+\mathcal{C}}\omega$, ove $\mathcal{C}$ è la curva individuata dalle equazioni $x^2+y^2=1, x\geq 0, y\geq 0$, $y=1-x$, $x\in[0,1]$.

---

1) La parametrizzazione di Σ è

$$r:[0,\pi/2]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3, r(t,\theta):=\begin{cases} x=\cos t\cos\theta\\ y=\cos t\sin\theta\\ z=t\end{cases},\qquad dS=|\cos t|\sqrt{\sin^2 t+1}$$

Il grafico della Σ è il seguente.

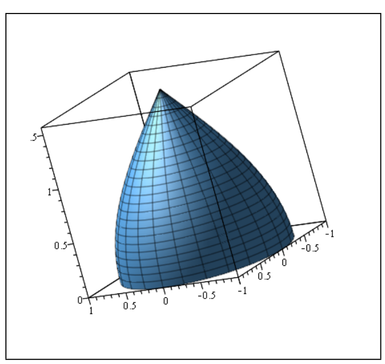


Figura 5: grafico della superficie di rotazione Σ

Inoltre

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \sqrt{1-x^2-y^2}\,dS &= \iint_{[0,\pi/2]\times[0,2\pi]} |\cos t|\cdot\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\sqrt{\sin^2 t+1}\,dtd\theta = \\ &= 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\sqrt{\sin^2 t+1}\,dt = \frac{2\pi}{3}\left[(\sin^2 t+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

2) La funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi gli eventuali punti estremanti sono da ricercare solo tra i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2-2x = 0 \\ f'_y(x,y) = 4-2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (1,2)$$

quindi $(1,2)$ è l'unico eventuale punto estremante per f. Ora, il determinante della matrice hessiana è

$$\det H_f(1,2) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Quindi si ha $\det H_f(1,2) > 0$ e $f''_{xx}(1,2) < 0$; dunque il punto $(1,2)$ è di massimo relativo per f.

Studiamo la restrizione a T. Essendo f continua su T, per il teorema di Weierstrass il massimo ed il minimo assoluti esistono su T. Poiché il punto $(1,2)$ è interno a T, esso potrebbe essere di massimo assoluto; va studiata la frontiera di T. Posti $A=(0,0)$, $B=(9,0)$, $C=(0,9)$, si ha

$$\overline{AB} = \{(x,0) : 0 \le x \le 9\};\ \overline{CA} = \{(0,y) : 0 \le y \le 9\};\ \overline{BC} = \{(x,9-x) : 0 \le x \le 9\}$$

da cui

$$\begin{aligned} f_{|\overline{AB}} &= f(x,0) = 2+2x-x^2 := g(x), \quad 0 \le x \le 9; \\ f_{|\overline{CA}} &= f(0,y) = 2+4y-y^2 := h(y), \quad 0 \le y \le 9; \\ f_{|\overline{BC}} &= f(x,9-x) = -43+16x-2x^2 := m(x), \quad 0 \le x \le 9.\end{aligned}$$

Allora f,g,h sono derivabili nei rispettivi insiemi di definizione e

1. $g'(x) = 2-2x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ in $[0,9]$ implica che $(1,0)$ è eventuale punto di massimo assoluto per f su T, mentre $(0,0)$ e $(9,0)$ sono eventuali punti di minimo assoluto;

2. $h'(y) = 4-2y > 0 \Leftrightarrow y < 2$ in $[0,9]$ implica che $(0,2)$ è eventuale punto di massimo assoluto per f su T, mentre $(0,0)$ e $(0,9)$ sono eventuali punti di minimo assoluto;
3. $m'(x) = 16-4x > 0 \Leftrightarrow x < 4$ in $[0,9]$ implica che $(4,5)$ è eventuale punto di massimo assoluto per f su T, mentre $(0,9)$ e $(9,0)$ sono eventuali punti di minimo assoluto.

Poiché si ha $f(1,2) = 7,\ f(1,0) = 3,\ f(0,0) = 2,\ f(9,0) = -61,\ f(0,2) = 6,\ f(0,9) = -43,\ f(4,5) = -11$, abbiamo che il minimo assoluto di f su T è -61 realizzato in $(9,0)$ ed il massimo assoluto è 7 realizzato in $(1,2)$. Il grafico di f in T è il seguente:

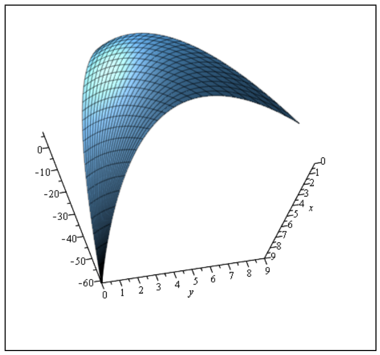


Figura 6: grafico della f ristretto ai punti di T

3) Il dominio di ω è $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, ma visto che $+\mathcal{C}$ è chiusa e generalmente regolare, $(\{x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\} \cup \{x(t) = t, y(t) = 1-t, 0 \le t \le 1\})$, possiamo limitarci a considerare la forma differenziale lineare ω in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \varepsilon - x\}$ con $0 < \varepsilon < 1$. Tale insieme è aperto e convesso e quindi $\omega \in C^1(A)$ sarà esatta se e solo se risulterà chiusa. In A la ω non è esatta, tuttavia $\omega = \omega_0 + xdy$ ove

$$\omega_0 = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

la quale è una forma differenziale lineare chiusa in A e dunque esatta per quanto detto prima. L'integrale curvilineo richiesto si può calcolare nel seguente modo:

$$\oint_{+\mathcal{C}} \omega = \oint_{+\mathcal{C}} \omega_0 + \oint_{+\mathcal{C}} xdy = \oint_{+\mathcal{C}} xdy = \oint_{+\partial E} xdy = \iint_E dxdy = area(E) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

essendo $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$.

Analisi Matematica II - 19 Giugno 2017
(Civile – Meccanica)

---

1) (Civile) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y' = 3(1+y) \\ y(3) = e - 1 \end{cases}$$

(Meccanica) Studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-x}}{1+x^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$$

2) Determinare le coordinate del baricentro della figura E del I ottante delimitata da: $x = 1, x = y^2, z^2 = 2x$, sapendo che la funzione densità è costante: $c = 1$.

3) Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - z + 5,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

e scrivere la formula di Taylor per f (di ordine 2), centrata nei punti estremanti. Studiare quindi il massimo e minimo assoluti di f sul disco D contenuto nel piano $z = \frac{1}{2}$, centrato in $(0, 0, \frac{1}{2})$ e avente raggio 1.

---

1 - Civile) Visto il dato iniziale scegliamo $A = (\mathbb{R}^+)^2$. Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili, pertanto

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{3}{x^2}dx = -\frac{3}{x} + c$$
$$\ln(1+y) = -\frac{3}{x} + c \iff y(x) = -1 - e^{-\frac{3}{x}+c} = -1 - ke^{-\frac{3}{x}}$$

con $k = e^c$. Imponendo il dato iniziale si ha: $e - 1 = -1 - ke^{-1}$ se e solo se $k = -e^2$. La soluzione cercata è $y(x) = -1 + e^{2-\frac{3}{x}}$.

1 - Meccanica) Poniamo $w = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$ e studiamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{w^{n+1}}{n+1}$. Tale serie ha raggio di convergenza $r = 1$ e non converge totalmente nel disco aperto, tuttavia converge totalmente in ogni disco chiuso strettamente contenuto nel disco di convergenza. Se imponiamo $\dfrac{e^{-x}}{1+x^2} < 1$ otteniamo $x > 0$ come insieme di convergenza assoluta, per quanto riguarda la convergenza totale avremo $x \geq a > 0$. Calcoliamo ora la somma della serie. Sia $w \in]-1,1[$ e $\rho < 1$ tale che $|w| \leq \rho$, siccome le serie di potenze si possono sempre integrare per serie, risulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{n+1}}{n+1} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^w t^n dt = \int_0^w \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^w \frac{1}{1-t} dt = [-\ln(1-t)]_0^w = -\ln(1-w).$$

Dunque la somma della serie è data da: $s(x) = -\ln(1 - \dfrac{e^{-x}}{1+x^2})$.

2) L'insieme E si può scrivere nella seguente forma:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{2x}\}.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned}
m(E) &= vol(E) = \iiint_E dxdydz = \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 dx \int_0^{\sqrt{2x}} dz = \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 \sqrt{2x} dx = \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{2} \int_0^1 \left[x^{\frac{3}{2}}\right]_{y^2}^1 dy = \frac{2}{3}\sqrt{2} \int_0^1 (1-y^3) dy = \frac{2}{3}\sqrt{2} \left[y - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
x_G &= \frac{1}{m(E)} \iiint_E x dxdydz = \sqrt{2} \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 x dx \int_0^{\sqrt{2x}} dz = 2 \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 x^{3/2} dx = \\
&= \frac{4}{5} \int_0^1 \left[x^{\frac{5}{2}}\right]_{y^2}^1 dy = \frac{4}{5} \int_0^1 (1-y^5) dy = \frac{2}{3} \\
y_G &= \frac{1}{m(E)} \iiint_E y dxdydz = \sqrt{2} \int_0^1 y dy \int_{y^2}^1 dx \int_0^{\sqrt{2x}} dz = \frac{4}{3} \int_0^1 y(1-y^3) dy = \frac{2}{5} \\
z_G &= \frac{1}{m(E)} \iiint_E z dxdydz = \sqrt{2} \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 dx \int_0^{\sqrt{2x}} z dz = \sqrt{2} \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 x dx = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 (1-y^4) dy = \frac{2\sqrt{2}}{5}.
\end{aligned}$$

3) Il gradiente di f è $(2x-2, 2y-4, 2z-1)$, ed è nullo soltanto nel punto $P_0 \equiv (1, 2, \frac{1}{2})$. L'Hessiano ha tre autovalori coincidenti, tutti positivi, dunque il punto è di minimo. Si ha poi $f(P_0) = -\frac{1}{4}$. La formula di Taylor centrata in P_0 è dunque:

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Nei punti del disco D si ha poi

$$f(x,y,z) + \frac{1}{4} = (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 - 2x - 4y + 5.$$

Poiché tale funzione ha gradiente mai nullo, è evidente che i punti di massimo e minimo sono raggiunti sulla frontiera di D. Ponendo allora $g(x, y) = -2x - 4y$, basta applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con il vincolo $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Essendo

$$L(x, y, \lambda) = -2x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

si deve imporre

$$-2 + 2\lambda x = 0, \quad -4 + 2\lambda y = 0,$$

da cui $\lambda y = 2\lambda x$, ossia (escludendo $\lambda = 0$), $y = 2x$. Dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$ si ricava $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Ovviamente, data l'espressione di g, il massimo richiesto è raggiunto nel punto $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2})$ e il minimo nel punto $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2})$.

Analisi Matematica II - 10 Luglio 2017
(Civile – Meccanica)

---

1) Calcolare l'area della porzione di paraboloide $z = \dfrac{15}{4} - (x^2 + y^2)$, intersecata con la regione di spazio superiore al cono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2) Si consideri la funzione $f(x, y) = \sqrt{(12 - x)(12 - y)(y + x - 12)}$, nel suo insieme di definizione D. Si trovino, se esistono, il massimo e minimo assoluti di f nell'insieme $E := D \cap\ [0, +\infty[^2$.
Si discuta infine il significato geometrico del problema trattato (facoltativo).

3) Provare che il campo vettoriale $\vec{F}(x, y) = e^{x-y}\,(1 + x + y, 1 - x - y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è conservativo; determinarne quindi la famiglia dei potenziali. Infine, calcolarne il lavoro lungo il segmento congiungente $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ con $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ verificando poi il risultato ottenuto.

---

1) Il paraboloide è una superficie regolare. Ponendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, la superficie di interesse ha equazione $z = \dfrac{15}{4} - \rho^2$, delimitata dalla condizione $z \geq \rho$. Dovrà quindi risultare $0 \leq \rho \leq z = \dfrac{15}{4} - \rho^2$. La condizione $\rho \leq \dfrac{15}{4} - \rho^2$ si esplicita facilmente: $0 \leq \rho \leq \dfrac{3}{2}$.
Dunque

$$z = \frac{15}{4} - (x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}.$$

L'elemento di superficie del paraboloide è $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$, pertanto l'area va calcolata integrando dS nel disco D del piano xy, centrato nell'origine e avente raggio $R := \dfrac{3}{2}$.
Con semplice passaggio a coordinate polari, si ottiene:

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} (\int_0^R \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho d\rho) d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^{4R^2} \frac{1}{8}\sqrt{1 + u}du = \frac{\pi}{6}((1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1) \end{aligned}$$

La figura ottenuta è la seguente: (si consideri solo la porzione del paraboloide)

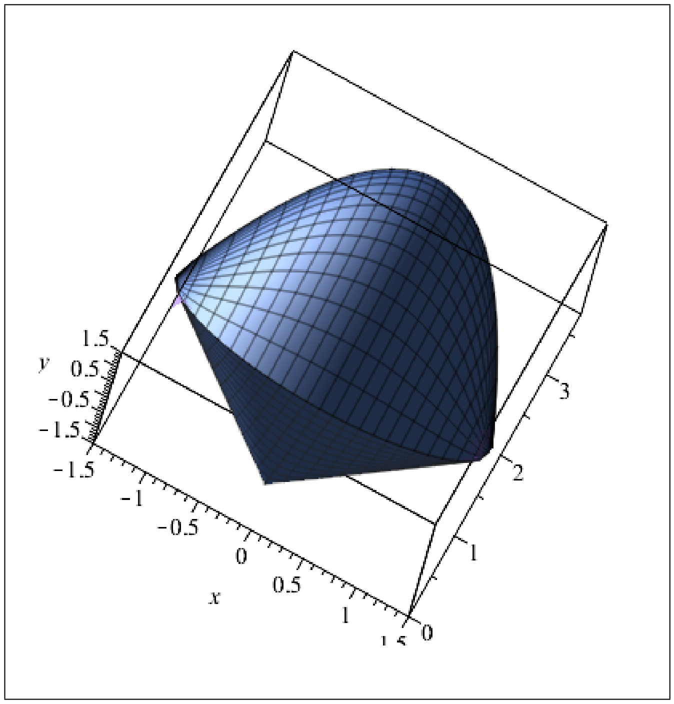


Figura 7: grafico della porzione di spazio tra paraboloide e cono

2) L'insieme E è il triangolo rettangolo delimitato dai segmenti $(x, 12)$ con $x \in [0, 12]$, $y = 12 - x$ con $x \in [0, 12]$ e $(12, y)$ con $y \in [0, 12]$. Poiché E è compatto e $f \in C(E)$, essa ammette massimo e minimo valore in E. Siccome la radice quadrata è una funzione monotona crescente, per determinare i punti di massimo e di minimo liberi, all'interno di E, basta studiare la funzione integranda $g(x, y) = (12 - x)(12 - y)(y + x - 12)$ e quindi

$$\nabla(f) = \vec{0} \Longleftrightarrow \nabla(g) = (24 - 2x - y, 24 - x - 2y) = \vec{0},$$

da cui con semplici calcoli, si trova $x = y = 8$. In tale punto, la funzione f assume il valore positivo 8. Nei punti della frontiera di E risulta sempre $f(x, y) = 0$. Dunque il minimo assoluto di f in E è 0 e il massimo assoluto è 8, per semplice confronto.
(Parte facoltativa) Il significato geometrico dell'esercizio consiste nel fatto che la f rappresenta (a meno di una costante moltiplicativa) l'area di un generico triangolo, di perimetro assegnato 24. Infatti, il teorema di Erone assicura che l'area A è data da

$$A = \sqrt{12(12 - x)(12 - y)(12 - z)},$$

ove x, y, z rappresentano le lunghezze dei lati, e ovviamente $z = 24 - x - y$. Il risultato trovato mostra che il triangolo di area massima è quello equilatero.

3) $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = -e^{x-y}(x+y) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$; pertanto F è irrotazionale e definito in un convesso, quindi è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Determiniamo ora la famiglia dei potenziali. Preso $P_0 = (0,0)$ si ha:

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= \int_0^x e^t(1+t)dt + e^x \int_0^y e^{-t}(1-x-t)di + k = \\
&= [e^t(1+t)]_0^x - e^x + 1 + e^x \left\{[-e^{-t}(1-x-t)]_0^y + [e^{-t}]_0^y\right\} + k = \\
&= e^{x-y}(x+y) + k, \quad \forall\, k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Per il teorema di Torricelli-Barrow il lavoro del campo è

$$L = U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - U\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Per verificare tale risultato, si può calcolare il lavoro mediante l'integrale curvilineo di F lungo il segmento $\overline{AB} : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $(dx = dt = dy)$. Risulta

$$L = \int_{\overline{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} 2dt = 2\sqrt{2}.$$

Analisi Matematica II - 11 Settembre 2017
(Civile – Meccanica)

---

1) Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione
$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2(x + y)^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

2) Si consideri la forma differenziale in $\mathbb{R}^3$: $\omega = (x^2 + y)dx + (y^2 + z)dy + (z^2 + x)dz$ e se ne calcoli l'integrale curvilineo lungo la curva regolare C di equazioni

$$C \equiv \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \\ z = \cos t \end{cases}$$

3) Utilizzando il teorema di Guldino, si calcoli l'area della porzione di superficie conica, avente equazione $x^2 = y^2 + z^2$, situata nel semispazio $z \geq 0$ e interna alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

---

1) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è ivi derivabile, quindi gli eventuali punti estremanti sono da ricercare solo tra i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 + 4x + 4y = 0 \\ f_y(x, y) = 4y^3 + 4x + 4y = 0 \end{cases} \quad ;$$

facilmente si vede che le due condizioni sono verificate solo se $x = y$; allora, imponendo $4x^3 + 8x = 0$ si trova la soluzione $P_1 \equiv (0, 0)$. Valutando l'Hessiano nel punto P_1 si trova 0; il semplice studio del segno della funzione ci dice tuttavia che P_1 è il minimo assoluto di f.

2) Si può scrivere $\omega = \omega_1 + \omega_2$, ove $\omega_1 = x^2dx + y^2dy + z^2dz$ è esatta, e $\omega_2 = ydx + zdy + xdz$. Essendo $F(x, y, z) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{z^3}{3}$ un potenziale di ω_1, ed essendo $Q_1 := (1, 0, 1)$ e $Q_2 := (0, 1, 0)$ i punti iniziale e finale di C, si ha subito

$$\int_C \omega_1 = F(Q_2) - F(Q_1) = -\frac{1}{3}.$$

Quanto a ω_2, essendo nelle equazioni di C $x(t) = z(t)$, si può notare che

$$\begin{aligned}
\int_C ydx + zdy + xdz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y(t)x'(t) + x(t)y'(t) + x(t)x'(t))dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(x(t)y(t)) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx^2(t) = \\
&= x(\frac{\pi}{2})y(\frac{\pi}{2}) - x(0)y(0) + \frac{1}{2}(x^2(\frac{\pi}{2}) - x^2(0)) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

In conclusione, $\displaystyle\int_C \omega = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$.

3) Calcoliamo intanto l'area dell'intera superficie conica interna alla sfera. Si tratta di una superficie di rotazione generata dalla rotazione intorno all'asse x del segmento $x = z, 0 \leq z \leq \sqrt{2}$. La lunghezza di tale segmento è $l = 2$ e la coordinata z_0 del suo baricentro vale $z_0 = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2}tdt = \frac{\sqrt{2}}{2}$. L'intera superficie laterale vale $2\pi z_0 l = 2\pi\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{2}2 = 2\pi\sqrt{2}$; l'area della porzione conica cercata è pertanto la metà di tale valore.

Analisi Matematica II - appello del 21 Novembre 2017

1) Studiare i massimi e i minimi vincolati della funzione $f(x,y) = xy$ sotto in vincolo $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$.

2) Assegnato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{2y-1}{(x+y)^2}, -\frac{1+2x}{(x+y)^2} \right), (x,y) \in \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x\}$$

provare che

- $\vec{F}$ è conservativo su Ω;
- determinare il potenziale di $\vec{F}$ che nel punto $(-1,0)$ vale 4;
- calcolare il lavoro di $\vec{F}$ lungo il segmento congiungente $(-2,0)$ con $(0,-2)$ e verificare il risultato con un metodo alternativo.

3) Dopo aver disegnato l'insieme D dato dalla parte di piano comune ai due cerchi di centri $(1,0)$ e $(0,1)$, entrambi di raggio 1, calcolare

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy.$$

Svolgimento

1) La curva $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$ è una ellisse reale e pertanto è un insieme compatto, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi la funzione, per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti; per il loro calcolo utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e poniamo

$$F(x,y,a) = xy + a(x^2 + y^2 + xy - 1).$$

Il vincolo risulta di classe almeno C^1 ed il suo gradiente si annulla solo nell'origine che non appartiene al vincolo. Ne risulta che i punti di massimo e di minimo vincolato, che esistono per il teorema di Weierstrass, devono annullare il gradiente di F.

$$\begin{cases} y + a(2x+y) = 0 \\ x + a(2y+x) = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si può dedurre che $a \neq 0$ altrimenti dovrebbe risultare $(x, y) = (0, 0)$ che non è soluzione della terza equazione. Risulta

$$\nabla F = (0,0,0) \iff \begin{cases} y(1+a) + 2ax = 0 \\ x(1+a) + 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y(1+a) + 2ax = 0 \\ y = \pm x \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = x \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -x \\ x^2 = 1 \end{cases} \iff$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}), (1, -1), (-1, 1).$$

Risulta $f(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{3}$, mentre $f(1, -1) = f(-1, 1) = -1$. Per il teorema di Weierstrass i primi due punti sono pertanto di massimo assoluto vincolato per f, mentre i rimanenti due sono di minimo assoluto vincolato.

2)

- Il campo $\vec{F}$ è irrotazionale, infatti

  1. $\vec{F} \in C^1(\Omega)$ (rapporto di polinomi e i denominatori non si annullano) e
  2. $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)$, visto che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) &= \frac{2(x+y) - 2(2y-1)}{(x+y)^3} = \frac{2x - 2y + 2}{(x+y)^3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) &= -\frac{2(x+y) - 2(1+2x)}{(x+y)^3} = -\frac{-2x + 2y - 2}{(x+y)^3}. \end{aligned}$$

  Siccome Ω è una regione piana prova di buchi (semplicemente connesso) e $\vec{F}$ è irrotazionale, allora $\vec{F}$ è anche conservativo.

- Determiniamo ora la famiglia dei suoi potenziali U. Deve risultare:

$$\nabla U_x(x, y) = \left(\frac{2y - 1}{(x+y)^2}, -\frac{1 + 2x}{(x+y)^2} \right)$$

  integrando la prima equazione rispetto ad x si ha

$$U(x, y) = \int \frac{2y-1}{(x+y)^2}\, dx = -\frac{2y-1}{x+y} + c(y), \qquad c \in C^1$$

  allora

$$U_y(x, y) = -\frac{2(x+y) - (2y-1)}{(x+y)^2} + c'(y) = -\frac{2x+1}{(x+y)^2} + c'(y);$$

sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$-\frac{2x+1}{(x+y)^2} + c'(y) = -\frac{1+2x}{(x+y)^2} \Leftrightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = k \in \mathbb{R}.$$

Quindi la famiglia dei potenziali è

$$U(x,y) = \frac{1-2y}{x+y} + k, \;\; k \in \mathbb{R}.$$

Il potenziale cercato è tale che $4 = U(-1,0) = -1 + k \Rightarrow k = 5$, dunque

$$U(x,y) = \frac{1+5x+3y}{x+y}.$$

- Essendo il campo conservativo, si ha

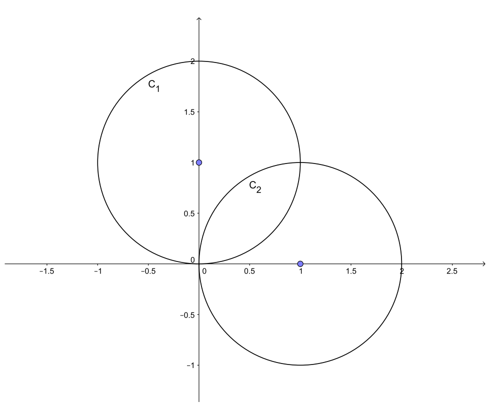
$$L = U(0,-2) - U(-2,0) = -2.$$

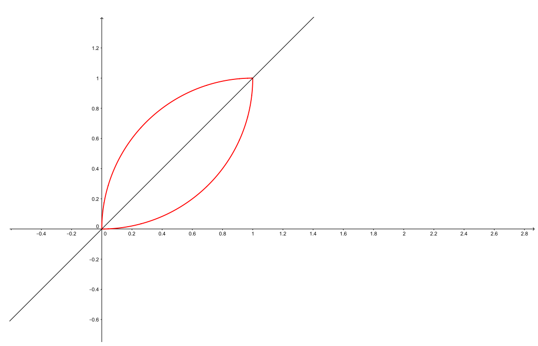
Per verificare il risultato, calcoliamo direttamente l'integrale curvilineo di II specie lungo il segmento parametrizzato da $\vec{r}(t) = (t, -t-2), \;\; -2 \leq t \leq 0$:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-2}^{0} \vec{F}(t,-t-2) \cdot \vec{r}'(t)dt = \int_{-2}^{0} \left(\frac{-2t-5}{4}, -\frac{1+2t}{4} \right) \cdot (1,-1)dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-2}^{0} (-2t-5+1+2t)dt = -2. \end{aligned}$$

3) Le due circonferenze che delimitano l'insieme D hanno equazioni cartesiane

$$\begin{aligned} C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2y = 0; \\ C_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x = 0. \end{aligned}$$





Osserviamo che l'insieme è simmetrico rispetto alla retta $y = x$; poiché anche la funzione è simmetrica rispetto allla stessa retta (essendo $f(x,y) = f(y,x)$), si ha

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 2\iint_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

ove (senza restrizione di generalità) D_1 è la parte di D al di sopra della retta. Risolviamo l'integrale passando a coordinate polari con polo nell'origine degli assi cartesiani $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$; $j(\theta,\rho) = \rho$. In tal caso la circonferenza C_2 che delimita D_1 dall'alto si riscrive

$$(\rho\cos\theta - 1)^2 + \rho^2\sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \boxed{\rho = 2\cos\theta};$$

(osserviamo che si perviene allo stesso risultato se si considera il triangolo rettangolo iscritto nella semicirconferenza). L'insieme D_1 viene trasformato nell'insieme $\tilde{D}_1 = \{(\theta,\rho) : \pi/4 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 2\cos\theta\}$ e

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy &= 2\iint_{\tilde{D}_1} \rho^2 d\theta d\rho = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho\right)d\theta = \\
&= \frac{2}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\rho^3\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{16}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta = \\
&= \frac{16}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos\theta - \cos\theta\sin^2\theta)d\theta = \frac{16}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \\
&= \frac{16}{9}\left(2 - \frac{5}{4}\sqrt{2}\right) = \frac{32-20\sqrt{2}}{9}.
\end{aligned}$$

Analisi Matematica II - appello del 18 Dicembre 2017

1) Studiare convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\log^2 n}.$$

2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo di forze $\vec{F}=(3x-4y+2z, 4x+2y-3z^2, 2xz-4y^2+z^3)$ per spostare un punto materiale lungo l'ellisse che si trova nel piano $z=0$ di centro (0,0) e semiassi 4 e 3 rispettivamente.

3) Calcolare il volume della regione delimitata da $z=x+y$, $z=1$, $x=0, y=0, z=0$.

Svolgimento

1) Si tratta di una serie di potenze. Se $x=0$ allora la serie converge e $f(0)=0$, se $x\neq 0$, allora per il criterio del rapporto si ottiene che $r=1$, infatti
$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\log^2(n+1)}\cdot\frac{n\log^2 n}{|x|^n}=|x|.$$
Pertanto la serie converge assolutamente per $x\in]-1,1[$.
Se $x=1$ allora la serie diventa $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\log^2 n}$ che converge per il criterio di Leibnitz.
Se $x=-1$ allora la serie diventa $-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n}$. La successione $\left(\frac{1}{n\log^2 n}\right)_n$ è positiva e monotona decrescente a zero, pertanto la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n}$ ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{k=2}^{\infty}2^k\frac{1}{2^k\log^2 2^k}$ (criterio di Cauchy). Ma
$$2^k\frac{1}{2^k\log^2 2^k}=\frac{1}{(k\log 2)^2}\sim\frac{1}{k^2},$$
pertanto la serie data converge anche nel punto $x=-1$. Per il teorema di Abel allora la serie data converge uniformemente in $[-1,1]$. Infine
$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\log^2 n}\right|=\frac{1}{n\log^2 n}$$
e dunque la convergenza è anche totale in $[-1,1]$. Riepilogando la serie converge totalmente in $[-1,1]$.

2) $\vec{F}$ non può essere conservativo poiché il campo vettoriale $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ non è irrotazionale ($\mathrm{rot}(\vec{F}) = (-8y - 6z, 2 - 2z, 0)$). Pertanto per calcolare il lavoro L bisogna calcolare direttamente l'integrale.

La curva C è parametrizzata da: $x = 4\cos t, y = 3\sin t, z = 0, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} [(12\cos t - 12\sin t)(-4\sin t) + (16\cos t + 6\sin t)3\cos t]\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (48 - 15\sin 2t) dt = 96\pi. \end{aligned}$$

3) La regione D di cui dobbiamo calcolare il volume si trova nel primo ottante ed è individuata da $D = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, x + y \le z \le 1\}$. Pertanto

$$\begin{aligned} vol(D) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{x+y}^1 dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \\ &= \int_0^1 \left[(1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{2} - x\right) dx = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(si poteva anche calcolare utilizzando la formula: area di base per altezza diviso 3).

Analisi Matematica II - appello del 15 Gennaio 2018

1) Calcolare l'area della superficie Σ di equazione cartesiana

$$z = 1 - \frac{x^2+y^2}{2}, \; (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\,, \; y \geq 0\}.$$

2) Sia $\quad \vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{y^2-x}{xy^2}\right)$ una dato campo vettoriale piano.

a) Provare che $\vec{F}$ è conservativo su $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

b) Calcolare la famiglia dei potenziali di $\vec{F}$.

c) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\gamma y\,dy$ ove $\gamma \,:\, \vec{r}(t) = (t^2-4t+5, t-1)$, $t \in [2,3]$.

3) Determinare i punti estremanti della funzione

$$f(x,y) = e^{(y-1)^2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right), \; (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

determinarne poi i punti di massimo e minimo assoluti nel quadrato Q di vertici $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,2)$, $D = (0,2)$.

Svolgimento

1) Per una superficie cartesiana $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ la formula per l'area è

$$A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\,dxdy.$$

Nel nostro caso è $f(x,y) = 1 - \frac{x^2+y^2}{2}$, da cui $f_x(x,y) = -x, \quad f_y(x,y) = -y$; così abbiamo

$$A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy\;.$$

Data l'espressione dell'integranda, scegliamo di passare a coordinate polari. Allora D viene trasformato in $D' = [0,1] \times [0,\pi]$ Applicando la formula del cambiamento di variabili e successivamente le formule di riduzione, concludiamo che

$$A(\Sigma) \;=\; \iint_{D'} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho d\theta \;=\; \int_0^\pi \left(\int_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\right) d\theta \;=\; \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\pi\;.$$

2)

a) Il campo è irrotazionale su Ω essendo $\vec{F} \in C^1(\Omega)$, e $\vec{F}_y(x,y) = -\dfrac{1}{x^2} = \vec{F}_x(x,y)$.

Poiché l'insieme Ω è convesso possiamo concludere che $\vec{F}$ è dunque conservativo su Ω (F irrotazionale + regione semplicemente connessa implica F conservativo)

b) Per determinare la famiglia dei potenziali di $\vec{F}$ impostiamo il sistema

$$\begin{cases} U_x(x,y) = -\dfrac{y}{x^2} \\[2ex] U_y(x,y) = \dfrac{y^2-x}{xy^2} \end{cases} .$$

Integrando la prima equazione rispetto ad x abbiamo $U(x,y) = \int -\dfrac{y}{x^2}\,dx = \dfrac{y}{x} + c(y)$; con $c \in C^1]0,\infty[$; derivando questa rispetto ad y otteniamo $U_y(x,y) = \dfrac{1}{x} + c'(y)$ la quale, sostituita nella seconda equazione, fornisce

$$\frac{1}{x} + c'(y) = \frac{y^2-x}{xy^2} \equiv \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow c'(y) = -\frac{1}{y^2}$$

da cui $c(y) = \dfrac{1}{y} + c\,,\ c \in \mathbb{R}$. Allora $U(x,y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{y} + c\ ,\ \ c \in \mathbb{R}$ è la famiglia dei potenziali cercata.

c)

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_\gamma y\,dy &= U(x(3),y(3)) - U(x(2),y(2)) + \int_2^3 (t-1)\,dt = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \end{aligned}$$

3) Essendo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, i punti estremanti possono trovarsi solo tra i punti critici:

$$\begin{cases} f_x(x,y) \equiv e^{(y-1)^2}\,(x-1) = 0 \\[3ex] f_y(x,y) \equiv 2(y-1)e^{(y-1)^2}\left(\dfrac{x^2}{2} - x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} .$$

Quindi l'uinco punto critico è $P = (1,1)$. Per studiarne la natura calcoliamo l'hessiano:

$$\det H_f(x,y) = \begin{vmatrix} e^{(y-1)^2} & 2(y-1)e^{(y-1)^2}\,(x-1) \\ 2(y-1)e^{(y-1)^2}\,(x-1) & [2+4(y-1)^2]\,e^{(y-1)^2}\left(\dfrac{x^2}{2} - x\right) \end{vmatrix}$$

da cui

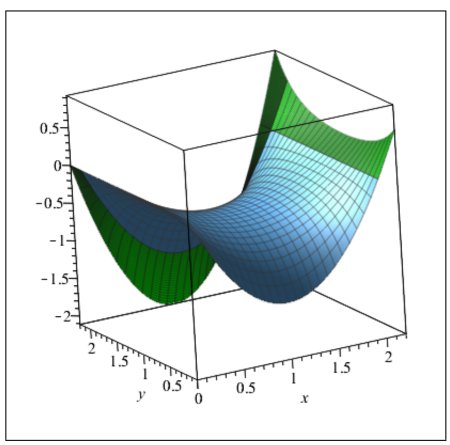
$$\det H_f(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

pertanto P è un punto di sella. Se ne conclude che f non ha punti estremanti.

Nel quadrato Q invece la funzione ammette sicuramente massimo e minimo assoluti per il Teorema di Weierstrass (f è continua e Q è compatto). Tali punti si troveranno necessariamente sulla frontiera di Q. Si ha:

- $\overline{AB} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ y = 0\}$ e $f_{|\overline{AB}}(x,y) = e\left(\dfrac{x^2}{2} - x\right) := g(x)$, $x \in [0,2]$, da cui $g'(x) = e(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ che fornisce $x = 1$ punto di minimo e $x = 0, 2$ punti di massimo per g su $[0,2]$, da cui $(1,0)$ eventuale punto di minimo e $(0,0), (2,0)$ eventuali punti di massimo assoluto per f su Q;
- $\overline{BC} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$ e $f_{|\overline{BC}}(x,y) = 0$, $y \in [0,2]$;
- $\overline{CD} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ y = 2\}$ e $f_{|\overline{CD}}(x,y) = e\left(\dfrac{x^2}{2} - x\right) := g(x)$, $x \in [0,2]$, quindi come nel primo caso $x = 1$ punto di minimo e $x = 0, 2$ punti di massimo per g su $[0,2]$, da cui, stavolta, $(1,2)$ eventuale punto di minimo e $(0,2), (2,2)$ eventuali punti di massimo assoluto per f su Q;
- $\overline{CD} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ 0 \leq y \leq 2\}$ e $f_{|\overline{DC}}(x,y) = 0$, $y \in [0,2]$.

Ora, $f(1,0) = -e/2 = f(1,2)$, $f(0,0) = f(2,0) = f(0,2) = f(2,2) = 0$, pertanto possiamo concludere che i punti $(1,0)$ e $(1,2)$ sono punti di minimo assoluto per f su Q, mentre tutti i punti dei segmenti $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ sono di massimo assoluto per f su Q.



Il grafico della f è in azzurro per quanto riguarda la parte corrispondente al quadrato Q.

Analisi Matematica II - appello del 5 Febbraio 2018

1) Calcolare il volume della regione E di spazio delimitata dal paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ e dal cono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2) Studiare i vari tipi di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n|x-1|^{n-1}}{|x+3|^{n+1}}, \quad x \neq -3.$$

La funzione somma è derivabile nel punto 1?

3) Si calcoli l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = \sin(x^2 + e^x)dx + (e^{-y^2} + x)dy,$$

lungo la frontiera C del triangolo avente vertici nei punti $A \equiv (0, -1),\ B \equiv (2, 1),\ C \equiv (3, 0)$, percorsa nel verso positivo.

Svolgimento

1) Ponendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, le equazioni delle due superfici che limitano E sono $z = 2 - \rho^2$, e $z = \rho$. Dovrà quindi risultare $0 \leq \rho \leq 2 - \rho^2$. La condizione $\rho \leq 2 - \rho^2$ si esplicita facilmente: $0 \leq \rho \leq 1$. In coordinate cilindriche l'insieme E si esprime nella seguente forma:

$$\tilde{E} = \{(\rho, t, z) : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1,\ \rho \leq z \leq 2 - \rho^2\}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(E) &= \iiint_E dxdydz = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} dt \int_\rho^{2-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^1 \rho(2 - \rho^2 - \rho)d\rho = \\ &= 2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

2) La serie di potenze può essere scritta come segue:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{|x+3|^2} q(x)^{n-1},$$

ove $q(x) = \dfrac{|x-1|}{|x+3|}$, ovviamente con $x \neq -3$. Come noto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$ non è altro che la serie derivata della serie geometrica di ragione q, e quindi converge per $|q| < 1$, con somma $\dfrac{1}{(1-q)^2}$. La disequazione $|q(x)| < 1$ può essere risolta come segue:

$$|q(x)| < 1 \iff |x-1| < |x+3| \iff (x-1)^2 < (x+3)^2 \iff x > -1.$$

In tale semiretta si ha quindi convergenza assoluta, e la somma è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{|x-1|^{n-1}}{|x+3|^{n+1}} = \frac{1}{(x+3)^2}\frac{1}{(1-q(x))^2} = \frac{1}{(|x+3|-|x-1|)^2}.$$

La serie data converge inoltre totalmente per $x \geq a$ con $a > -1$; mentre non converge uniformemente in $x > -1$ perché se convergesse uniformemente allora, per il criterio di Cauchy, dovrebbe risultare: $\forall \varepsilon > 0$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq m$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{(x+3)^2}\sum_{i=n}^{n+p} i\left(\frac{|x-1|}{|x+3|}\right)^{i-1} \leq \varepsilon \quad \forall x > -1$$

e dunque

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{(x+3)^2}\sum_{i=n}^{n+p} i\left(\frac{|x-1|}{|x+3|}\right)^{i-1} = \frac{1}{4}\sum_{i=n}^{n+p} i \leq \varepsilon$$

che è assurdo in quanto la serie $\sum_n n$ è divergente.

Infine, facilmente si vede che la somma $S(x)$ verifica:

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2x+2)^2}, & -1 < x < 1 \\ \\ \dfrac{1}{16}, & x \geq 1. \end{cases}$$

e chiaramente la derivata sinistra in 1 è $-\dfrac{1}{16}$ mentre quella destra è nulla. Pertanto la somma non è derivabile nel punto $x = 1$.

3) Poiché la forma differenziale $\omega' = \sin(x^2 + e^x)dx + e^{-y^2}dy$ è esatta, (chiusa e definita su tutto $\mathbb{R}^2$ che non ha buchi) e la curva d'integrazione C è chiusa, l'integrale cercato si riduce a $\int_C xdy$, che, per note conseguenze delle formule di Green, coincide con l'area del triangolo avente C come frontiera. Al fine di calcolare l'area, basta osservare che il triangolo è rettangolo in B, e i cateti misurano $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ rispettivamente.

Analisi Matematica II - I appello 4 Giugno 2018

1) Calcolare la massa della regione $D := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, quando la funzione densità è pari a $d(x, y) = (x^2 + y^2)^2$.

2) Calcolare

$$\int_\gamma \left[\frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2} + 2\right] dx + \left[\frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}\right] dy$$

quando $\gamma := (\cos t, \sin t)$, $\pi \geq t \geq \dfrac{\pi}{2}$.

3) Calcolare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = x - y + z^2$ soggetti al vincolo $B := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Svolgimento

1) Se scriviamo $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq \sqrt{z}^2\}$ e effettuiamo il cambiamento di variabili da cartesiane a cilindriche risulta $D' = \{(r, t, z) : 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq \sqrt{z}\}$ e

$$m = \iiint_D (x^2 + y^2)^2 dxdydz = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} dt \int_0^{\sqrt{z}} r^3 dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 z^2 dz = \frac{\pi}{6}.$$

2) Posto $\omega := \left[\dfrac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2} + 2\right] dx + \left[\dfrac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}\right] dy$, risulta ω esatta in $\mathbb{R}^2$ e la classe delle sue primitive è data da $F(x, y) = \arctan(x^2 + y^2) + 2x + c, c \in \mathbb{R}$. L'integrale cercato è allora pari a $F(0, 1) - F(-1, 0) = 2$.

3) Il vincolo è un compatto: è la sfera piena di centro l'origine e raggio 2. Il teorema di Weierstrass ci assicura allora l'esistenza dei punti di massimo e minimo assoluti ($f \in C^2(B)$). I punti di massimo e di minimo assoluti non possono essere interni a B in quanto, ad esempio, $f'_x(x, y, z) = 1 \neq 0$ e quindi tali punti dovranno trovarsi sulla frontiera di B.

Sulla frontiera risulta $z^2 = 4 - (x^2 + y^2)$ e pertanto possiamo studiare i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $g : \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = x - y + 4 - (x^2 + y^2)$.

In $\{(x, y) : x^2+y^2 < 4\}$ risulta $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ se e solo se $x = 1/2, y = -1/2$. Inoltre se applichiamo il metodo della matrice Hessiana risulta che tale punto è di massimo. Esaminiamo ora i punti del tipo $(2\cos t, 2\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$. $g(t) := g(2\cos t, 2\sin t) = 2(\cos t - \sin t)$. Risulta $g'(t) \geq 0$ se e solo se $\frac{3}{4}\pi \leq t \leq \frac{7}{4}\pi$. I punti individuati sono pertanto: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm\sqrt{4-\frac{1}{2}}\right)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$. Calcoliamo ora i valori di f in questi 4 punti, il valore massimo sarà il massimo assoluto vincolato $(\frac{9}{2})$, quello minimo il minimo assoluto vincolato $(2\sqrt{2})$.

Analisi Matematica II - II appello 18 Giugno 2018

1) Si studi l'insieme di convergenza della serie $S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!}$ e si provi che $S'(x) = \sin x^2$.

2) Dato l'arco di cardiodide C, di equazione polare $\rho = 2(1+\cos t)$, con $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, si calcoli l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_C \omega$, ove ω è la forma differenziale definita da $\omega = x\cos(x^2+y^2)dx + (y\cos(x^2+y^2) + \sqrt{x^2+y^2})dy$.

3) Si cerchino i massimi e minimi liberi, se esistono, della funzione $h(x,y,z) = 9x^2+8y^2+2z^2-8xy-4xz-20x$.

Svolgimento

1) Chiaramente si tratta di una serie di potenze, e il raggio di convergenza è infinito, dunque si ha convergenza assoluta su tutto $\mathbb{R}(r=\infty)$. Ricordiamo che le serie di potenze, soddisfano il teorema di derivazione per serie nell'aperto del disco di convergenza e pertanto si ha

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

che si riconosce facilmente essere la serie di Taylor della funzione $g(x) = \sin(x^2)$.

2) Posto $\omega_1 = x\cos(x^2+y^2)dx + y\cos(x^2+y^2)dy$, si vede facilmente che ω_1 è un differenziale esatto, con potenziale $U(x,y) = \dfrac{1}{2}\sin(x^2+y^2)$. Dunque $\int_C \omega_1 = U(0,2) - U(4,0) = \dfrac{1}{2}(\sin 4 - \sin 16)$. Per quanto riguarda il calcolo diretto di $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}dy$ possiamo osservare che le equazioni parametriche della curva sono

$$\begin{cases} x = 2(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = 2(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

quindi

$$dy = 2(\cos\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta = 2(\cos\theta - 1 + 2\cos^2\theta)d\theta.$$

Pertanto, integrando per parti,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |2(1+\cos\theta)|2(\cos\theta-1+2\cos^2\theta)d\theta = \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta-1+2\cos^2\theta+\cos^2\theta-\cos\theta+2\cos^3\theta)d\theta = \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1+3\cos^2\theta+2\cos^3\theta)d\theta = \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1+3\cos^2\theta)d\theta + 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(1-\sin^2\theta)d\theta = \\
&= 4\left[-\theta+3\cdot\frac{\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 8\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= 4\left[-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right]+8\left[1-\frac{1}{3}\right] = \pi+\frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

e infine

$$\int_C \omega = \int_C \omega_1 + \int_C \omega_2 = \frac{1}{2}(\sin 4 - \sin 16) + \frac{16}{3} + \pi.$$

3) Risulta $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Annullando il gradiente di h, si trova facilmente che esiste un solo punto critico: $P_0 \equiv (2,1,2)$. Quanto all'Hessiano, esso è costante, e si ha

$$H = \begin{pmatrix} 18 & -8 & -4 \\ -8 & 16 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Siccome $n > 2$ per determinare la natura di questo punto dobbiamo studiare il segno degli autovalori della matrice Hessiana. Il calcolo di tali autovalori fornisce l'equazione

$$\lambda^3 - 38\lambda^2 + 344\lambda - 640 = 0.$$

Ricordando che la matrice è simmetrica e applicando la regola di Cartesio, si può esservare che tutte le soluzioni (3) sono positive, quindi la forma quadratica è definita positiva. Pertanto si può concludere che il punto P_0 è di minimo e non vi sono punti di massimo liberi.

Analisi Matematica II - III appello 9 Luglio 2018

1) Data la funzione $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, si determini, se esiste, l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $P_0 \equiv (1,1,1)$. Inoltre, si trovino il minimo e il massimo valore di f sull'insieme compatto $K=\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$.

2) Assegnata la curva γ di equazioni parametriche $r(t) := \begin{cases} x = 3\,\cos\, t \\ y = 3\,\sin\, t \\ z = 4t \end{cases}, \quad 0\leq t\leq 2\pi,$

calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma x(x^2+y^2+z^2)\,ds$.

3) Calcolare il volume del solido

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ x^2+y^2\leq 1\,,\ 0\leq z\leq \frac{xy}{1+x^2+y^2}\right\}.$$

Svolgimento

1) La funzione è definita e di classe $C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$. In tale insieme si ha

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{x(x^3+3xy^2-2y^3)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y(y^3+3x^2y-2x^3)}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Allora, essendo $f'_x(1,1)=f'_y(1,1)=\dfrac{1}{2}$, l'equazione del piano tangente è

$$z-1=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1) \quad \text{ossia} \quad z=\frac{x+y}{2}.$$

Infine $f\in C(K)$ e dunque ammette massimi e minimi assoluti, essendo K un compatto. Utilizzando le coordinate polari, $x=r\cos t,\ y=r\sin t$, il problema si può trasformare nella ricerca degli estremi della funzione $g(r,t)=r(\cos^3 t+\sin^3 t)$, con $(r,t)\in\widetilde{K} := [1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]$. Ora, in $\widetilde{K}^\circ$, si ha

$$g'_r(r,t)=\cos^3 t+\sin^3 t, \qquad g'_t(r,t)=3r\sin t\cos t(\sin t-\cos t).$$

Siccome la prima equazione non si annulla mai non ci sono punti di massimo o di minimo interni a $\widetilde{K}$. Cerchiamoli allora sulla frontiera. Nei punti in cui $t=0$ o $t=\dfrac{\pi}{2}$

si ha $g(r,t) = r$: dunque lungo tali restrizioni il minimo e il massimo valore di g sono 1 e 2 rispettivamente.

Nei punti in cui $r = 1$ oppure $r = 2$ risulta $g(1,t) = \cos^3 t + \sin^3 t$, $g(2,t) = 2(\cos^3 t + \sin^3 t)$. Basta allora studiare $\cos^3 t + \sin^3 t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Tale funzione ammette due punti di massimo in $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ e un punto di minimo in $t = \frac{\pi}{4}$. Pertanto si può quindi concludere, confrontando tutti gli estremi trovati, che il massimo valore di f su K è 2, e il minimo è $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Dalle equazioni parametriche di γ deduciamo che

$$ds \;=\; \sqrt{9\,\sin^2 t + 9\,\cos^2 t + 16}\,dt \;=\; 5\,dt\;.$$

Allora

$$\int_\gamma x(x^2+y^2+z^2)\,ds \;=\; \int_0^{2\pi} 3\,\cos t\,(9+16t^2)\,5\,dt \;=\; 15\int_0^{2\pi} \cos t\,(9+16t^2)\,dt\;.$$

Applicando ora la proprietà di linearità dell'integrale e integrando due volte per parti, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_\gamma x(x^2+y^2+z^2)\,ds \;&=\; 15\int_0^{2\pi} 9\,\cos t\,dt \;+\; 15\int_0^{2\pi} 16t^2\,\cos t\,dt \;= \\
&=\; 135\,\underbrace{[\sin t]_0^{2\pi}}_{=0} + 240\left\{\underbrace{[t^2\,\sin t]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} 2t\,\sin t\,dt\right\} \;= \\
&=\; 240\left\{[2t\,\cos t]_0^{2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi} 2\,\cos t\,dt}_{=0}\right\} \;=\; 960\pi\;.
\end{aligned}$$

3) Il solido E è la parte del I ottante interna al cilindro $x^2+y^2 \le 1$ ed al di sotto della superficie $z = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ ed il suo volume è dato da

$$V(E) = \iiint_E dxdydz\;.$$

Passando a coordinate cilindriche $x = \rho\,\cos\theta\,;\; y = \rho\,\sin\theta\,;\; z = z$ (il cui jacobiano è ρ), E viene trasformato in

$$E' = \left\{(\theta,\rho,z)\;:\;0 \le \theta \le \pi/2\,,\;0 \le \rho \le 1\,,\;0 \le z \le \frac{\rho^2\,\sin\theta\,\cos\theta}{1+\rho^2}\right\}$$

e dunque il volume si riscrive

$$V(E) = \iiint_{E'} \rho \, d\theta d\rho dz \ .$$

Applicando quindi le formule di riduzione si ottiene

$$\begin{aligned}
V(E) &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\rho^2 \ \sin\ \theta \ \cos\ \theta}{1+\rho^2}} \rho \, dz \right) d\rho \right] d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \frac{\rho^3 \ \sin\ \theta \ \cos\ \theta}{1+\rho^2} d\rho \right) d\theta = \\
&= \left(\int_0^{\pi/2} \sin\ \theta \ \cos\ \theta \, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2} \, d\rho \right) = \\
&= \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot \int_0^1 \left(\rho - \frac{\rho}{1+\rho^2} \right) d\rho = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{1}{2} \ \log(1+\rho^2) \right]_0^1 = \frac{1}{4}(1 - \log\ 2) \ .
\end{aligned}$$

Matematica II - Modulo Analisi - appello 4 Settembre 2018

---

1) Data la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\ ,\end{cases}$$

studiarne: continuità, gradiente e differenziabilità in $(0,0)$. Inoltre, esistono derivate direzionali in $(0,0)$? Se sì, calcolarle. Infine, calcolare le derivate parziali di f in un punto generico $(x,y)\neq(0,0)$.

2) Si trovi la massa M distribuita, con densità superficiale $\delta(x,y,z)=x$, sulla superficie S di equazioni

$$S\equiv\begin{cases}x=u\sin t\cos t\\ y=u\sin^2 t & (u,t)\in[0,A]\times[0,\frac{\pi}{2}].\\ z=u\cos t,\end{cases}$$

3) Sia $\vec{F}(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-y^2\right),-\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\left(2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-x^2\right)$ un dato campo vettoriale piano.

- Provare che $\vec{F}$ è conservativo sul suo dominio di definizione.
- Calcolare la famiglia dei potenziali di $\vec{F}$.

Svolgimento

1) *Continuità in* $(0,0)$. Dobbiamo verificare se $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$. Poiché il limite presenta una forma indeterminata, usiamo i teoremi sulla caratterizzazione del limite in coordinate polari. Intanto

$$|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|=\left|\frac{3\rho^2\,\cos^2\theta-\rho^2\,\sin^2\theta}{\rho}\right|=\rho\left|(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)\right|\le 4\rho$$

quindi, uniformemente rispetto a *theta*,

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = 0.$$

Quindi esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$. Essendo $l = 0 = f(0,0)$ possiamo concludere che f è continua anche nell'origine.

Gradiente in $(0,0)$. Non potendosi usare in $(0,0)$ il teorema di derivazione della funzione composta, usiamo la definizione:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3h^2}{|h|} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{|h|} = \begin{cases} 3\,,\ h > 0 \\ -3\,,\ h < 0 \end{cases},$$

quindi non esiste f'_x in $(0,0)$ e dunque f non ammette gradiente in $(0,0)$.

Differenziabilità in $(0,0)$. L'esistenza del gradiente è una condizione necessaria per la differenziabilità, dunque f non è differenziabile nell'origine.

Derivate direzionali in $(0,0)$. Osserviamo che non può essere utilizzata la formula del gradiente in quanto la funzione non è differenziabile in $(0,0)$. Consideriamo allora i versori $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ e le corrispondenti funzioni

$$\begin{aligned} g_\theta(t) &= f(0 + t\cos\theta, 0 + t\sin\theta) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{|t|}(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) & , t \neq 0 \\ 0 & , t = 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} sgn(t)\, t(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) & , t \neq 0 \\ 0 & , t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

al variare di $\theta \in [0, 2\pi[$.

Essendo

$$\lim_{t\to 0} \frac{g_\theta(t) - g_\theta(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{sgn(t)\, t(3\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{t} = sgn(t)\,(3\cos^2\theta - \sin^2\theta),$$

è chiaro il limite esiste solo se

$$3\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \pi/3 \vee \theta = 2\pi/3.$$

Quindi le uniche derivate direzionali di f che esistono in $(0,0)$ sono quelle nelle direzioni di

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ \text{ e } \ \vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

e sono uguali a 0.

Derivate parziali in $(x,y) \neq (0,0)$. La funzione in $(x,y) \neq (0,0)$ è derivabile come composizione di funzioni derivabili e si ha

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= \frac{6x\sqrt{x^2+y^2} - (3x^2-y^2)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{6x(x^2+y^2)-(3x^2-y^2)x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \\
&= \frac{x(3x^2+7y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'_y(x,y) &= \frac{-2y\sqrt{x^2+y^2} - (3x^2-y^2)\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-2y(x^2+y^2)-(3x^2-y^2)y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \\
&= \frac{-y(5x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}
$$

2) Calcolando i parametri L, M, N, si ottiene

$$L(u,t) = -u\sin t(1+\cos^2 t), \quad M(u,t) = u\cos^3 t, \quad N(u,t) = u\sin^2 t.$$

Pertanto,

$$L^2+M^2+N^2 = u^2(\cos^6 t + \sin^4 t + \sin^2 t + \sin^2 t\cos^4 t + 2\sin^2 t\cos^2 t) =$$

$$= u^2(\cos^4 t + \sin^4 t + 2\sin^2 t\cos^2 t + \sin^2 t) = u^2((\sin^2 t + \cos^2 t)^2 + \sin^2 t).$$

Pertanto

$$dS = u\sqrt{1+\sin^2 t}\; dudt.$$

Il calcolo della massa M fornisce

$$M = \left(\int_0^A u^2 du\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 t}\sin t\cos t dt\right) = \frac{A^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin^2 t}\; d(\sin^2 t) =$$

$$= \frac{A^3}{9}(2\sqrt{2}-1).$$

3)
- Il dominio di definizione è tutto $\mathbb{R}^2$, e ivi il campo è di classe C^1. Il campo è irrotazionale essendo

$$\vec{F}_y(x,y) = \frac{2xy}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{2xy}{\sqrt{1+x^2}} = \vec{F}_x(x,y).$$

  Poiché il dominio è convesso e possiamo concludere che $\vec{F}$ è dunque conservativo.

- Per determinare la famiglia dei potenziali di $\vec{F}$ impostiamo il sistema

$$\begin{cases} U_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - y^2\right) \\ \\ U_y(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\left(2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - x^2\right). \end{cases}$$

Integrando la prima equazione rispetto ad x abbiamo

$$U(x,y) = x^2\sqrt{1+y^2} - y^2\sqrt{1+x^2} + c(y)\ ;$$

derivando questa rispetto ad y otteniamo facilmente

$$U_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\left(2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - x^2\right) + c'(y)$$

e quindi $c'(y) = 0$. Di conseguenza

$$U(x,y) = x^2\sqrt{1+y^2} - y^2\sqrt{1+x^2} + c$$

è la famiglia dei potenziali cercata.

Matematica II (Modulo Analisi) - Analisi Matematica II - appello 14 Settembre 2018

---

1) Sia calcoli l'area della superficie:

$$S := \begin{cases} x = u \\ y = \cos u \\ z = v, \end{cases} \qquad (u,v) : u \in [0, \frac{\pi}{2}],\ v \in [0, \cos u].$$

2) Determinare l'insieme di convergenza assoluta della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{x+n}}{x^n} \sin\frac{1}{n}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stabilire se la serie converge totalmente in tale insieme.

3) Si consideri il campo di forze $F := \left(\left[y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right], \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ nel suo dominio, e se ne calcoli il flusso uscente da

$$\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \in\le 2\pi.$$

Svolgimento

1) I parametri direttori di S sono: $L = -\sin u,\quad M = -1,\quad N = 0$ da cui

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_D \sqrt{L^2+M^2+N^2}dudv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos u} \sqrt{1+\sin^2 u}dv\right) du = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1+\sin^2 u}du \overset{t=\sin u}{=} \int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt. \end{aligned}$$

Operiamo ora la sostituzione $\sqrt{1+t^2}dt = z+t$, da cui $t = \dfrac{1-z^2}{2z}, dt = -\dfrac{z^2+1}{2z^2}dz$ per cui

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt &= -\int_1^{\sqrt{2}-1} \frac{z^2+1}{2z} \cdot \frac{z^2+1}{2z^2}dz = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}-1}^1 \left(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}\right) dz = \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{z^2}{2} + 2\log z - \frac{1}{2z^2} + c\right]_{\sqrt{2}-1}^1 \end{aligned}$$

da cui in definitiva

$$A(S) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1).$$

2) Riscriviamo la serie nel seguente modo:

$$3^x \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}\left(\frac{3}{x}\right)^n \quad , \; x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Chiaramente il suo termine generale non non si annulla mai, quindi possiamo subito applicare il criterio del rapporto alla serie assoluta associata alla serie data ed ottenere che:

- se $\left|\frac{3}{x}\right| < 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 3$, allora la serie assoluta converge;
- se $\left|\frac{3}{x}\right| > 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow |x| < 3 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow -3 < x < 0 \,\vee\, 0 < x < 3$, allora la serie assoluta non converge;
- se $\left|\frac{3}{x}\right| = 1 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$, allora la serie assoluta si riduce alla serie numerica $3^{\pm 3}\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n}$, la quale diverge per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$.

Concludiamo quindi che l'insieme di convergenza assoluta della serie di funzioni data è $I =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

Per quanto riguarda la convergenza totale della serie di funzioni nell'insieme di convergenza assoluta, osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x\in I}\left|\sin\frac{1}{n}\left(\frac{3}{x}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n}\,.$$

Dalla caratterizzazione della convergenza totale per le serie di funzioni deduciamo che la serie data non converge totalmente in I.

3) Associamo al campo F la forma differenziale lineare $\omega := \left[y - \frac{y}{x^2+y^2}\right]dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$. Il dominio di ω è $A := \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Ivi la forma differenziale data non è esatta, tuttavia l'integrale curvilineo si può calcolare come $\int_{\mathcal{C}}\omega_0 + \int_{\mathcal{C}} y dx$, ove

$$\omega_0 = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

la quale è chiusa in A ma non esatta e $\int_{\mathcal{C}}\omega_0 = \pi$. Ora osserviamo che $\int_{\mathcal{C}} y dx = -\text{area}(x^2+y^2 \leq 4) = -4\pi$. In conclusione

$$\int_{\mathcal{C}}\omega = \text{flusso di } F \text{ uscente da } \mathcal{C} = -3\pi \qquad \text{(pozzo)}$$

Matematica II (Modulo Analisi) - Analisi Matematica II - appello 18 Novembre 2018

Nome: ________________ Cognome ________________________ Matr. _________

email ____ CdL: Civile ☐ Meccanica ☐

Motivare tutti i passaggi

1) Calcolare

$$\int_C (x^3 + 2xy^2 + y^3)dx + (2x^2y - 3xy^2)dy, \quad x(t) = e^t, y(t) = \sin\frac{\pi t}{2}, \quad 0 \le t \le 1.$$

2) Data $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definita da: $f(x,y) := y(1 + 2y^2)$, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

3) Studiare i massimi e i minimi assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 - 4y^2$ nell'insieme $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 + x^2 - 2y^2 - 8 \le 0\}$.

Svolgimento

1) Sia $\omega := (x^3+2xy^2+y^3)dx+(2x^2y-3xy^2)dy$. La forma differenziale lineare Ω è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ inoltre

$$4xy + 3y^2 = \frac{\partial(x^3+2xy^2+y^3)}{\partial y} = \frac{\partial(2x^2y-3xy^2)}{\partial x}.$$

Dunque la ω è chiusa in un semplicemente connesso e quindi è esatta. Determiniamo allora la classe delle sue primitive a partire dal punto $(0,0)$.

$$F(x,y) \;=\; \int_0^x t^3 dt + \int_0^y (2x^2t - 3xt^2)dt = \frac{x^4}{4} + x^2y^2 - xy^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La curva C è regolare (semplice, di classe C^1 e $x'(t)$ non si annulla mai) e congiunge i punti $(1,0)$ e $(e,1)$. Pertanto

$$\int_C (x^3+2xy^2+y^3)dx + (2x^2y-3xy^2)dy = F(e,1) - F(1,0) = \frac{e^4-1}{4} + e^2 - e.$$

2) L'equazione differenziale $y'(x) = y(1+2y^2)$ è a variabili separabili, dunque

$$\int dx = x + c = \int \frac{dy}{y(1+2y^2)} = \int \frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\int \frac{4y}{1+2y^2}dy = \log\left(\frac{y}{\sqrt{1+2y^2}}\right) \quad c \in \mathbb{R}$$

L'integrale generale della equazione differenziale è $x+c-\log\left(\frac{y}{\sqrt{1+2y^2}}\right) = 0$; imponendo il dato iniziale si ottiene $c = -\log(\sqrt{3})$. La soluzione cercata è dunque definita implicitamente da: $x - \log\left(\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{1+2y^2}}\right) = 0$. Tale funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Dini in un intorno di $(0,1)$ e dunque definisce, in tale intorno, implicitamente una funzione del tipo $y = y(x)$.

3) Osserviamo che

$$B \;:=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 + x^2 - 2y^2 - 8 \leq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y^2-1)^2 + x^2 \leq 9\}$$

e dunque B è limitato, essendo $B \subset [-3,3]\times[-2,2]$. Inoltre, posto $h(x,y) := (y^2-1)^2 + x^2$ risulta $B = h^{-1}([0,9])$ e dunque B è chiuso per il teorema di continuità globale. B è allora compatto e dunque, essendo f continua, i massimi e minimi assoluti esistono per il teorema di Weierstrass. Tali punti non possono stare in $B^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 + x^2 - 2y^2 - 8 < 0\}$ perché in questo insieme (aperto) il gradiente di f si annulla solo nell'origine (che risulta un punto sella: basta esaminare le restrizioni $f(x,0)$ e $f(0,y)$);

dunque tali punti devono stare sulla frontiera di B. Cerchiamoli con il metodo dello Jacobiano ed imponiamo il sistema

$$\begin{cases} y^4 + x^2 - 2y^2 = 8 \\ \\ \begin{vmatrix} 2x & -8y \\ 2x & 4y^3 - 4y \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^4 + x^2 - 2y^2 = 8 \\ 2x(4y^3 - 4y + 8y) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y^4 + x^2 - 2y^2 = 8 \\ 8xy(y^2 + 1) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y^4 - 2y^2 = 8 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 8 \\ y = 0 \end{cases} \iff (0, \pm 2), (\pm 2\sqrt{2}, 0)$$

Risulta $f(0, \pm 2) = -16$, $f((\pm 2\sqrt{2}, 0) = 8$, pertanto i punti $(0, \pm 2)$ sono di minimo assoluto per f mentre i punti $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ sono di massimo assoluto.

Matematica II (Modulo Analisi) - Analisi Matematica II - 8 Gennaio 2019

---

1. Sia ω la forma differenziale lineare $\omega = \dfrac{\pi y}{2x}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}y\ln x\right)dx + \dfrac{\pi}{2}\ln x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}y\ln x\right)dy$. Provare che è esatta nel suo dominio e determinare la classe delle primitive. Calcolare poi $\int_\gamma \omega$ quando γ è la curva $x = e^y, y \in [0,1]$.

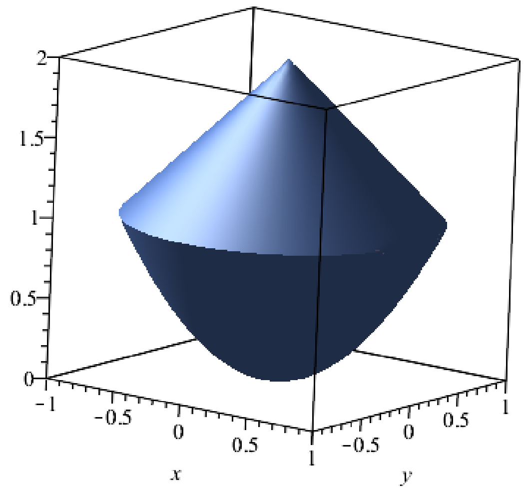
2. Calcolare il volume del solido $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\}$.

3. Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione
$$f(x,y) = \cos(xy), \quad (x,y) \in [0,1]^2.$$

---

1. Risulta $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, quindi siccome la regione di definizione è priva di buchi, ω è esatta se e solo se è chiusa. Risulta
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\pi y}{2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\ln x\right)\right] &= \frac{\pi}{2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\ln x\right) - \frac{\pi^2 y\ln x}{4x}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\ln x\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\pi}{2}\ln x\cos\left(\frac{\pi}{2}y\ln x\right)\right].\end{aligned}$$
Per quanto detto sopra, siccome ω è chiusa, risulta che è anche esatta (chiusa in un semplicemente connesso) e la classe delle primitive si può calcolare a partire dal punto $(1,0)$:
$$F(x,y) = \int_0^y \frac{\pi}{2}\ln x\cos\left(\frac{\pi}{2}t\ln x\right)dt + c = \int_0^{\frac{\pi}{2}y\ln x}\cos w\,dw + c = \sin\left(\frac{\pi}{2}y\ln x\right) + c.$$
La curva $x = e^y, y \in [0,1]$ è regolare, con sostegno in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e congiunge il punto $(1,0)$ con il punto $(e,1)$, siccome ω è esatta risulta allora
$$\int_\gamma \omega = F(e,1) - F(1,0) = 1.$$

2. I punti dell'insieme E si trovano al di sopra del paraboloide $z = x^2 + y^2$ e al di sotto del cono $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$.

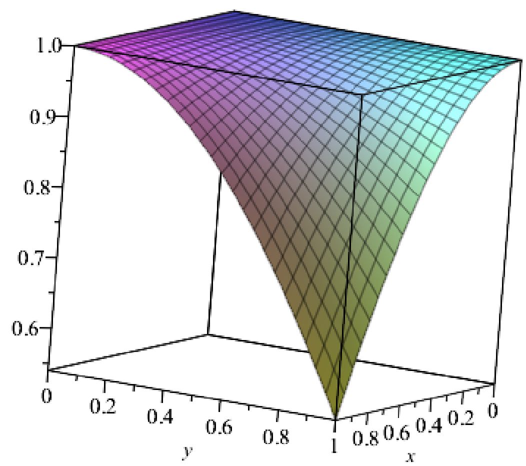


L'insieme E è ottenuto ruotando intorno all'asse z il dominio regolare $D := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq z \leq 2 - x\}$. Per il Teorema di Gudino risulta

$$\begin{aligned} vol(E) &= 2\pi \iint_D x dx dz = 2\pi \int_0^1 x dx \int_{x^2}^{2-x} dz = 2\pi \int_0^1 x(2 - x - x^2) dx = \\ &= 2\pi \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

3. Risulta $f \in C^\infty([0,1]^2)$, quindi per il teorema di Weierstrass f ammette massimi e minimi assoluti nell'insieme $[0,1]^2$ che è un compatto.Osserviamo inoltre che deve sempre risultare $0 \leq f(x,y) \leq 1$ quando $(x,y) \in [0,1]^2$, infatti $0 \leq xy \leq \pi/2$. Cerchiamo i massimi e minimi liberi di f in $]0,1[^2$. Per il teorema di Fermat deve risultare
$$\begin{cases} f'_x = -y \sin(xy) = 0, \\ f'_y = -x \sin(xy) = 0. \end{cases}$$
Si vede immediatamente che le soluzioni $(0,0), (0,y), (x,0) \notin]0,1[^2$ e quindi vanno scartate; rimangono in punti che soddisfano l'equazione $xy = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ (sono delle iperboli equilatere), anche tali punti non appartengono a $]0,1[^2$, infatti se $0 < x < 1$ allora $y > k\pi > 1$; pertanto $\nabla f \neq (0,0)$ in $]0,1[^2$. Visto che per il Teorema di Weierstrass i punti di massimo e di minimo assoluti esistono, essi devono trovarsi sulla frontiera di $[0,1]^2$.
Se $\{x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ la funzione assume sempre il valore 1 e pertanto questi punti sono tutti di massimo assoluto.
Se invece $\{x = 1, 0 < y \leq 1\}$ risulta $f(1,y) = \cos y$ che è monotona decrescente; se

$\{y = 1, 0 < x \leq 1\}$ la funzione $f(x, 1) = \cos x$ che è anche lei decrescente. Il minimo assoluto sarà ottenuto nel punto (1,1).



Matematica II (Modulo Analisi) - Analisi Matematica II - 21 Gennaio 2019

---

1. Assegnato $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1;\ x+y \leq 2;\ x \geq 0;\ y \geq 0\}$, calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$.

2. Calcolare, ove possibile, il gradiente della funzione $f(x,y) = x|x-y-1|, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Determinare l'insieme di convergenza assoluta di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ e calcolare, se possibile, $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right), \quad x \in [0,1]$.

---

1. D è un dominio regolare; passando a coordinate polari l'integrale dato si riscrive
$$I := \iint_T \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\rho\,d\theta d\rho$$
ove $T = \{(\theta,\rho) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ 1 \leq \rho \leq \frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}\}$ in quanto la retta $x+y=2$ nel piano polare ha equazione $\rho = \frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}$.
Per le formule di riduzione si ha
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_1^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} d\rho\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}-1\right)d\theta = \\ &= -\frac{\pi}{2}+2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta\ . \end{aligned}$$
Effettuiamo la sostituzione $t = \tan\frac{\theta}{2}$; allora $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$. Inoltre, $\theta = 2\arctan t \Rightarrow d\theta = \frac{2}{1+t^2}\,dt$. Infine, ricordiamo che
$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ .$$
Concludiamo quindi che l'integrale dato è
$$\begin{aligned} I &= -\frac{\pi}{2}+2\int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = -\frac{\pi}{2}+2\int_0^1\frac{2}{2t+1-t^2}\,dt = \\ &= -\frac{\pi}{2}-4\int_0^1\frac{1}{t^2-2t-1}\,dt = -\frac{\pi}{2}+4\log\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\ . \end{aligned}$$

2. Per il teorema di derivazione della funzione composta, la funzione è derivabile in tutti i punti (x, y) per cui $x - y - 1 \neq 0$; essendo

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 - x(y+1), & y \leq x-1 \\ x(1+y) - x^2, & y > x-1 \end{cases},$$

si ottiene

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} (2x - y - 1, -x), & y < x-1 \\ (1 + y - 2x, x), & y > x-1 \end{cases}.$$

Studiamo la derivabilità dei punti $(x, x-1)$:

$$\begin{aligned} R(h) &= \frac{f(x+h, x-1) - f(x, x-1)}{h} = \begin{cases} \dfrac{(x+h)^2 - (x+h)x}{h}, & h > 0 \\ \\ \dfrac{(x+h)x - (x+h)^2}{h}, & h < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{(x+h)(x+h-x)}{h}, & h > 0 \\ \\ \dfrac{(x+h)(x-x-h)}{h}, & h < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+h, & h > 0 \\ \\ -(x+h), & h < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

quindi

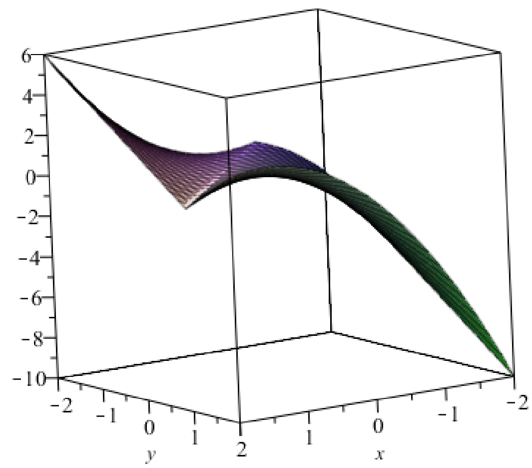
$$\lim_{h \to 0^+} R(h) = x; \qquad \lim_{h \to 0^-} R(h) = -x.$$

Ne consegue che esiste la derivata rispetto ad x se e solo se $x = -x \Leftrightarrow x = 0$; dunque tutti i punti $(x, x-1)$ con $x \neq 0$ non hanno gradiente, mentre $f_x(0, -1) = 0$.

Vediamo se esiste anche $f_y(0, -1)$:

$$R(k) = \frac{f(0, -1+k) - f(0, -1)}{k} = 0 \longrightarrow_{k \to 0} 0 = f_y(0, -1).$$

Allora esiste il gradiente di f in $(0, -1)$ e si ha $\nabla f(0, -1) = (0, 0)$.



3. Si vede facilmente che il raggio di convergenza di questa serie è $r = 1$, infatti, per il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+2}\, n(n+1)}{|x|^{n+1}\,(n+1)(n+2)} = |x| < 1.$$

Siccome

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall\, x \in [-1,1]$$

la serie data converge totalmente e quindi uniformemente ed assolutamente in $[-1,1]$. Visto che la convergenza in tale intervallo è in particolare uniforme si può applicare il teorema di derivazione per serie ed ottenere

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \log(1+x).$$

Matematica II (Modulo Analisi) - Analisi Matematica II - 4 Febbraio 2019

1. Si trovino i massimi e minimi liberi della funzione $f(x,y) = (x+y)^e\, e^{-(x+y)}$, nel dominio $T = \{(x,y) : x+y > 0\}$.

2. Data nel piano la forma differenziale
$$\omega = (y + \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}})dx + \frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}dy,$$
se ne calcoli l'integrale curvilineo
$$\int_C \omega$$
ove C è l'arco di circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$, percorsa in senso orario, contenuto nel primo quadrante.

3. Si consideri una stanza mansardata, avente base quadrata ($m.5 \times 5$); delle pareti verticali, due hanno forma rettangolare di altezza $3m$ e $2m$ rispettivamente, e le altre due sono a forma di trapezio. Si calcoli il volume di tale stanza, e si trovi la quota z_G del suo baricentro, supponendo che la densità sia costantemente 1.

---

1. Ponendo $t = x+y$, si può riconoscere che $f(x,y) = t^e\, e^{-t}$, per $t > 0$. Dunque, i massimi e minimi liberi cercati si possono individuare studiando la funzione $h(t) = t^e\; e^{-t}$. Si vede facilmente che
$$h'(t) = et^{e-1}e^{-t} - t^e e^{-t} = t^{e-1}e^{-t}(e-t),$$
ed è evidente che l'unico punto critico si ha per $t = e$, ove si riconosce facilmente un massimo. In conclusione, i punti estremanti cercati sono tutti quelli della retta $x + y = e$, e sono punti di massimo.

2. Si vede facilmente che $\omega_1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}dx + \dfrac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}dy$, e che ω_1 è esatta, avendo come potenziale la funzione $U(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2}$. Pertanto, si ha
$$\int_C \omega = \int_C ydx + U(1,0) - U(0,1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{3}.$$

3. La figura di cui dobbiamo calcolare il volume è un prisma retto a base trapeziodale (trapezio rettangolo): la base maggiore del trapezio è $B = 3m$, quella minore $b = 2m$, l'altezza del trapezio $h = 5m$, l'altezza del prisma $H = 5m$. Pertanto il volume è pari all'area di base del trapezio per l'altezza del prisma: $V = \frac{(3+2)\cdot 5}{2} \cdot 5m^3 = \frac{125}{2}m^3$.
Se invece vogliamo impostare il problema in maniera analitica, supporremo che la base della mansarda sia contenuta nel piano xy, e coincida con il quadrato Q di vertici $(0,0,0)$, $(5,0,0)$, $(0,5,0)$ e $(5,5,0)$. Similmente, supporremo che il soffitto della stanza sia contenuto nel piano contenente i punti $(0,0,3)$, $(5,0,3)$, $(5,5,2)$ e $(0,5,2)$. L'equazione di tale piano si può facilmente ricavare, imponendo il passaggio per gli ultimi tre punti: $z = 3 - \frac{y}{5}$. Il volume cercato si trova allora integrando tale funzione nel quadrato Q:

$$V = \int_Q (3 - \frac{y}{5}) dxdy = 75 - 5\int_0^5 \frac{y}{5} dy = 75 - \frac{25}{2} = \frac{125}{2}m^3.$$

Per quanto riguarda il baricentro, si ha per definizione

$$z_G = \frac{1}{V}\int_S z dxdydz,$$

ove S indica la stanza stessa: $S = \left\{(x,y,z) : x \in [0,5], y \in [0,5], z \in [0, 3 - \frac{y}{5}]\right\}$.
Dunque si ha

$$z_G = \frac{2}{125}\int_0^5 dx \int_0^5 dy \int_0^{3-\frac{y}{5}} z dz = \frac{1}{25}\int_0^5 (3 - \frac{y}{5})^2 dy.$$

Adoperando la sostituzione $u = 3 - \frac{y}{5}$, si perviene infine a

$$z_G = \frac{1}{25}\int_2^3 5u^2 du = \frac{19}{15}m.$$

Analisi Matematica II (Civile) - 15 Aprile 2019

---

1. Assegnato $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - x \leq 0;\ x \geq 0;\ \ y \geq 0;\ z \in [0, 1]\}$, calcolare l'integrale triplo $\displaystyle\iiint_D \frac{z}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\, dxdydz.$

2. Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - 5y' + 6y = e^{3x} + 10\cos x$ che passano per il punto $(0, 1)$ ed hanno ivi tangente orizzontale.

3. Determinare l'insieme di convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)x^{n+1}$ e calcolarne la somma.

Cenno di svolgimento

1. Trasformiamo D in coordinate cilindriche:
$$D' = \{(r, t, z) : 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq \cos t\}.$$
(osserviamo che $x^2 + y^2 - x \leq 0$ è il semicerchio di centro $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$ che si trova nel primo quadrante). Risulta allora
$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{z}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\, dxdydz &= \int_0^1 zdz \int_0^{\pi/2} dt \int_0^{\cos t} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = \\ &= \int_0^1 zdz \int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{1-r^2}\right]_{\cos t}^{0} dt = \\ &= \int_0^1 zdz \int_0^{\pi/2} (1-\sin t)dt = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-1).\end{aligned}$$
(attenzione perché l'integrale più interno è in realtà un integrale generalizzato)

2. Si tratta di una equazione lineare del secondo ordine completa. L'integrale generale della equazione omogenea è $c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$. Una soluzione particolare della equazione completa è $y(x) = xe^{3x} + \cos x - \sin x$. Allora l'integrale generale della equazione completa è
$$y(x) = xe^{3x} + \cos x - \sin x + c_1e^{2x} + c_2e^{3x}.$$
Imponendo $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ si ottiene $y(x) = xe^{3x} + \cos x - \sin x$, $\ (c_1 = c_2 = 0)$.

3. Si tratta di una serie di potenze che ha raggio di convergenza $r = 1$ (si calcola con il criterio del rapporto applicato alla serie dei valori assoluti). Pertanto converge assolutamente in $]-1,1[$.

   Se $x = -1$ la serie diventa a termini positivi e diverge a $+\infty$, se $x = 1$ la serie è a segni alterni ed è indeterminata (conseguenze del criterio di Leibnitz). Questo ci dice che la convergenza non può essere uniforme in $]-1,1[$ (si può usare il criterio di Cauchy) e quindi non converge neanche totalmente in tale insieme. Sia $x \in]-1,1[$, allora esiste $\rho < 1$ tale che $x \in [-\rho, \rho]$ e quindi per calcolare la somma della serie in x si possono usare il teorema di derivazione per serie e la serie geometrica.

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(3 + \frac{2}{n}\right) x^{n+1} = 3\sum_{n=1}^{+\infty} (-x)^{n+1} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \\ &= 3(\frac{1}{1+x} - 1 + x) + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \int_0^x t^{n-1} dt = \\ &= \frac{3x^2}{1+x} + 2x \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} (-t)^{n-1} dt = \frac{3x^2}{1+x} + 2x \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \\ &= \frac{3x^2}{1+x} + 2x \log(1+x) \end{aligned}$$

Analisi Matematica II (Civile), Matematica 2 (Meccanica) – 3 Giugno 2019

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1. Determinare e classificare i punti estremanti della funzione $f(x, y) = x^2y + y^3 - y + 1$ nel suo dominio di definizione; calolare poi, se esistono, i massimi ed i minimi assoluti di f lungo il vincolo: $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

2. Studiare la convergenza assoluta e totale della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{|x|} - 3)^n}{n \ln(1 + \frac{1}{n})}, \ x \in \mathbb{R}.$$

3. Calcolare
$$\iint_E \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy,$$
quando $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq 0,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\}$.

---

1. La funzione è un polinomio, dunque $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ed i punti estremanti vanno ricercati solo tra i punti critici. Si ha: $f'_x(x, y) = 2xy$; $f'_y(x, y) = x^2 + 3y^2 - 1$; allora
$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \ \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1/\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$
I candidati ad essere punti di massimo o di minimo relativo sono: $(0, \pm 1/\sqrt{3})$, $(\pm 1, 0)$. Per stabilirne la natura calcoliamo la matrice hessiana:
$$\det H_f(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) = 2y & f''_{xy}(x, y) = 2x \\ f''_{yx}(x, y) = 2x & f''_{yy}(x, y) = 6y \end{vmatrix} = 12y^2 - 4x^2.$$
Si ha:

$\det H_f(0, \pm 1/\sqrt{3}) = 4 > 0$ e $f''_{xx}(0, \pm 1/\sqrt{3}) = \pm 2/\sqrt{3}$, per cui $(0, 1/\sqrt{3})$ è punto di minimo relativo, mentre $(0, 1/\sqrt{3})$ è punto di massimo relativo;

$\det H_f(\pm 1, 0) = -4 < 0$, quindi $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono entrambi punti di sella.
Infine, per quanto riguarda i punti di massimo e di minimo assoluti in $x^2 + y^2 = 4$ basta osservare che la circonferenza è un compatto e quindi essi esistono per Weierstrass. Se imponiamo $x = 2\cos t, y = 2\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$, otteniamo $g(t) := f(r,t) = 8\cos^2 t \sin t + 8\sin^3 t - 2\sin t - 1 = 6\sin t - 1$ e quindi il massimo assoluto è ottenuto per $t = \pi/2$, il minimo assoluto per $t = 3/2\pi$. Quindi il massimo assoluto è il punto (0,2) mentre il minimo assoluto è il punto (0,-2).

2. La f_n è pari e quindi basta studiarla in $\mathbb{R}_0^+$. Posto $y = \sqrt{x} - 3$, la serie si riscrive come la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n\ \log\ \dfrac{n+1}{n}},\ \ y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Determiniamo il suo raggio di convergenza utilizzando il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|y| n\ \ln\ \dfrac{n+1}{n}}{(n+1)\ \ln\ \dfrac{n+2}{n+1}} = |y| < 1$$

quindi: la serie converge assolutamente per

$|y| < 1 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{x} < 4 \Leftrightarrow 4 < x < 16$; visto che la serie è pari converge assolutamente anche in $]-16, -4[$.
Se poi $x = \pm 4 \vee x = \pm 16$, allora la serie non converge assolutamente in quanto la serie assoluta si riduce alla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\ \ln\ \dfrac{n+1}{n}}$$

il cui termine generale non è infinitesimo

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\ \frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$$

e pertanto non risulta soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie numeriche.

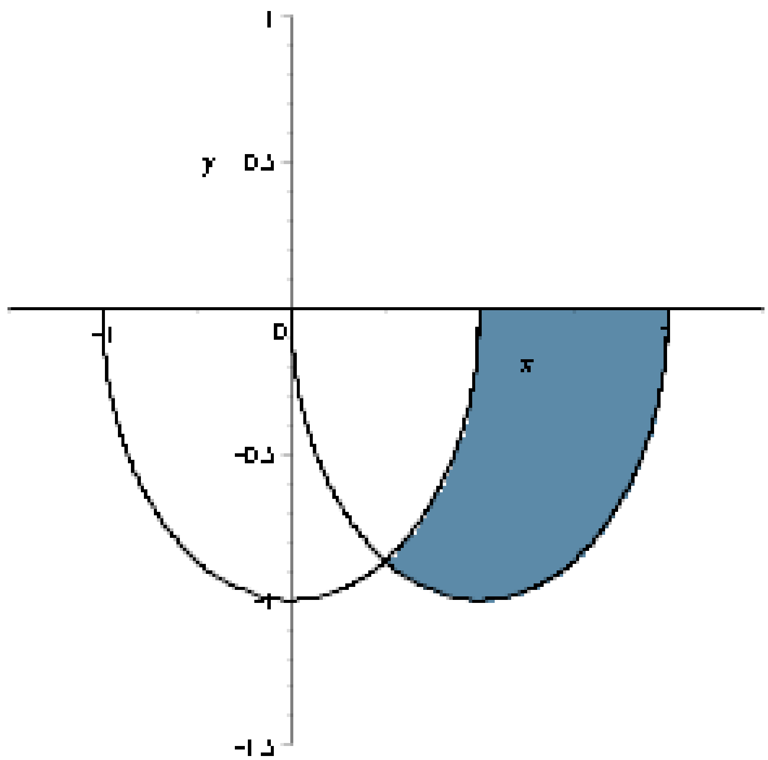
Riassumendo, l'insieme di convergenza assoluta della serie data è $I =]-16, -4[\cup]4, 16[$.
Vediamo ora la convergenza totale. La serie non converge totalmente nell'insieme di convergenza assoluta, infatti la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sup_{x\in I} |f_n(x)|\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sup_{|\sqrt{|x|}-3|<1} \frac{|\sqrt{|x|} - 3|^n}{n\ \ln\ \dfrac{n+1}{n}}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\ \ln\ \dfrac{n+1}{n}}$$

non converge (vedi sopra).

Dal teorema sulla convergenza totale delle serie di potenze sappiamo però che la serie converge totalmente in $[-b,-a]\cup[a,b]$ per ogni a,b tale che $4<a<b<16$.

3. L'insieme E è la parte del disco di centro $(1,0)$ e raggio 1 (perché $x^2+y^2-2x\le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$) contenuta nel quarto quadrante ($y\le 0$), esterna al disco di centro l'origine e raggio 1.



Se scriviamo tale insieme in coordinate polari otteniamo: $E'=\{(r,t):-\frac{\pi}{3}\le t\le 0,\ 1\le r\le 2\cos t\}$. Infatti, $2\cos t$ si ottiene come lunghezza del cateto del triangolo rettangolo di base il diametro della circonferenza $x^2+y^2-2x=0$ e vertice sulla circonferenza stessa, mentre da:

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\le t\le 0$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\iint_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy &= \iint_{E'} \frac{1}{\rho}\,\rho d\theta d\rho = \iint_{E'} d\theta d\rho. = \int_{-\pi/3}^{0}\left(\int_1^{2\cos t} dr\right)dt = \\ &= \int_{-\pi/3}^{0}(2\cos t - 1)dt = 2[\sin t]_{-\pi/3}^{0} - \pi/3 = \sqrt{3} - \pi/3.\end{aligned}$$

Analisi Matematica II (Civile), Matematica 2 (Meccanica) – 17 Giugno 2019

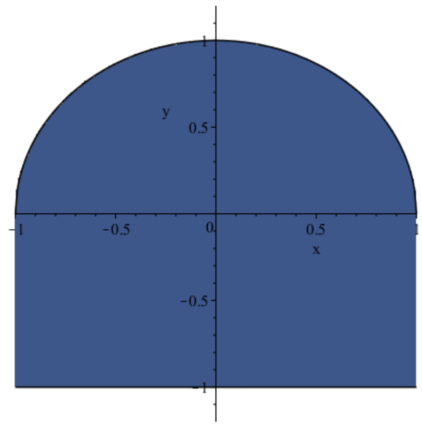
---

1. Calcolare
$$\int_{+\gamma} y^2 dx + xy dy$$
quando $+\gamma = +Fr(D)$ con $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$.

2. Sia $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ $f : A := \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 \le 1\} \to \mathbb{R}$. Calcolare $\sup_A f$ e $\inf_A f$, sono massimo e minimo?

3. Sia $\omega := \dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}dx - \dfrac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}dy$. Dire se ω è esatta nella sua regione di definizione e, se si, calcolare la primitiva che nel punto $(1,1)$ assume valore 1.

Cenno di svolgimento

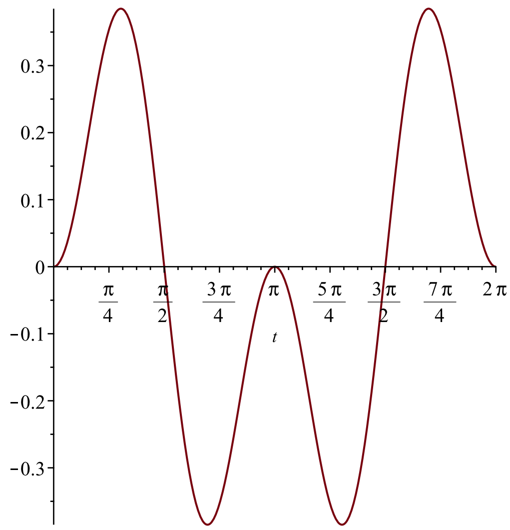


1. L'insieme D è un dominio regolare e le funzioni $f(x,y) = xy$ e $g(x,y) = y^2$ sono di classe $C^1(D)$. Allora per le formule di Green:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma y^2 dx + xy dy &= \iint_D \left(-\frac{\partial}{\partial y}y^2 + \frac{\partial}{\partial x}xy\right) dxdy = \iint_D (-2y+y) dxdy = \\
&= -\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \\
&= -\int_0^1 [(1-x^2)-1] dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2. Siccome f è rapporto di polinomi, esso è di classe $C^\infty(A^\circ)$ ed il suo gradiente è dato da:
$$\nabla f := \left(\frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \right).$$
Se ne deduce immediatamente che il gradiente si annulla nei punti di A° per cui $y=0$, cioè: $\{(x,0) : 0 < x < 1 \text{ oppure } -1 < x < 0\}$. Poiché $f(x,0)=0$, dallo studio del segno, si ha che tutti i punti del tipo $(x,0)$ con $0<x<1$ sono di minimo relativo, mentre quelli $(x,0)$ con $-1<x<0$ sono di massimo relativo. Visto che la funzione assume sia segno positivo che negativo, l'inf ed il sup, se esistono, si dovranno trovare sulla frontiera di A. Siccome f è prolungabile con continuità nell'origine:
$$0 \quad \leq \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{r\to 0} \frac{r^3|\cos t \sin^2 t|}{r^2} \leq \lim_{r\to 0} r = 0$$
uniformemente in t, allora posto
$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$
f è continua sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, allora $\inf_A f = \min_{\overline{A}} f$ e $\sup_A f = \max_{\overline{A}} f$.

Studiamo ora la frontiera di A: $Fr(A) = \{(0,0)\} \cup \{(\cos t, \sin t),\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Possiamo subito escludere l'origine perché in un intorno di esso la funzione assume sia valori positivi che negativi e quindi l'origine non può essere né di massimo né di minimo. Studiamo ora $g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin^2 t$. Risulta $g'(t) = 2\cos^2 t \sin t - \sin^3 t = \sin t(3\cos^2 t - 1) \geq 0$. Denotiamo con α l'angolo $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3})$ la funzione g assumerà due massimi in $\alpha, 2\pi-\alpha$ e due minimi in $\pi-\alpha, \pi+\alpha$, come si evince anche dal grafico:



3. La forma differenziale lineare $\omega \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, visto che è definita in una regione priva di buchi allora, in questo caso, l'esattezza e la chiusura sono equivalenti. (Non si può usare l'altra condizione sufficiente perché le funzioni sono positivamente omogenee di grado -1). Risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{x(x^2+2y^2}{y^2(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Calcoliamo ora la classe delle primitive a partire dal punto $(0, 1)$,

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt - \int_1^y \frac{x^2}{t^2\sqrt{x^2+t^2}}dt + c = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^x + \left[\frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t}\right]_1^y + c = \\ &= \sqrt{1+x^2} - 1 + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + \sqrt{1+x^2} + c = c - 1 + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} \\ U(1,1) &= \sqrt{2} - 1 + c = 1, \quad c = 2 - \sqrt{2} \\ U(x,y) &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Analisi Matematica II (Civile), Matematica 2 (Meccanica) – 1 Luglio 2019

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1) Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\iint_D (y^2-x^2)^2 \cos(y+x)^3\,dxdy$, ove $D := \{(x,y) : |x+y| \le \sqrt[3]{\pi/4},\ |y-x| \le \sqrt[3]{\pi/4}\}$ utilizzando e motivando la sostituzione $u = x+y$, $v = y-x$.

2) Studiare continuità, derivabilità (parziale e direzionale), differenziabilità nell'origine, della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xy\,e^{\sqrt{|x+y|}}$. Nel caso in cui f sia differenziabile nell'origine scrivere l'equazione della normale al grafico nel punto (0,0,0) orientata in modo concorde all'asse negativo delle z.

3.civile) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y+2)(x+1) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

3.meccanica) Sia $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4, x \le 0, y \ge 0\}$. Calcolare il flusso del vettore $\vec{u} = (x^3 + \cos y, \sin x + y^3)$ uscente dalla frontiera di D.

Cenno di svolgimento

1) L'insieme D risulta essere il quadrato di vertici $(\pm\sqrt[3]{\pi/4}, 0)$, $(0, \pm\sqrt[3]{\pi/4})$. Utilizzando il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = y+x \\ v = y-x \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad dxdy = |J(u,v)|\,dudv = \frac{1}{2}\,dudv$$

l'insieme Q diventa $\tilde{Q} = \left[-\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}\right] \times \left[-\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}\right]$ (inoltre la trasformazione è di classe $C^1(\tilde{Q})$ ed è una biiezione, quindi sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di integrazione per sostituzione). Allora

$$\iint_Q (y+x)^2(y-x)^2 \cos(y+x)^3\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_{\tilde{Q}} (u^2 \cos u^3)\,v^2\,dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{3}\int_{-\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} 3u^2 \cos u^3\,du \int_{-\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} v^2\,dv = \left[\frac{\sin u^3}{6}\right]_{-\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} \cdot \left[\frac{v^3}{3}\right]_{-\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{18}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{36}.$$

2) La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ perché composizione di funzioni continue e quindi lo è in particolare nell'origine.

Risulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}0=0$$
$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}0=0$$

quindi f ammette gradiente nell'origine. Sia ora $v=(v_1,v_2)$ un generico versore.

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{x\to 0}\frac{t^2v_1v_2}{t}e^{\sqrt{|t|\cdot|v_1+v_2|}}=0$$

(un infinitesimo per una quantità limitata e quindi f ammette derivate direzionali nell'origine).

Studiamo ora la differenziabilità nell'origine. Si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hke^{\sqrt{|k+h|}}}{\sqrt{h^2+k^2}}\ ;$$

passando a coordinate polari si ha

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2 sen\theta\, cos\theta\, e^{\sqrt{\rho|sen\theta+cos\theta|}}}{\rho}=0\qquad \text{uniformemente in } \theta$$

infatti

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi[}\left|\rho sen\theta\, cos\theta\, e^{\sqrt{\rho|sen\theta+cos\theta|}}\right|\le \rho e^{\sqrt{2\rho}}\longrightarrow_{\rho\to 0}0\ .$$

Dunque f è differenziabile nell'origine. Dunque $n=(f'_x(0,0),f'_y(0,0),-1)=(0,0,-1)$.

3-civile) L'equazione differenziale presente nel problema dato è a variabili separabili. Osservando che la soluzione va cercata in un intorno di $(0,1)$, possiamo limitarci a considerare $y>-2$; dividiamo quindi per $y+2$ ambo i membri della equazione differenziale. Una soluzione dovrà allora verificare l'equazione

$$\frac{y'(x)}{y(x)+2}=x+1$$

da cui

$$\begin{aligned}\int\frac{y'(x)}{y(x)+2}\,dx=\int(x+1)\,dx\quad&\Longrightarrow\quad \log|y(x)+2|=\frac{x^2}{2}+x+c\ ,\ c\in\mathbb{R}\\ &\Longrightarrow\quad |y(x)+2|=e^{\frac{x^2}{2}+x+c}\ ,\ c\in\mathbb{R}\ .\end{aligned}\qquad(4)$$

inoltre per ogni $c \in \mathbb{R}$ si può scrivere $e^{\frac{x^2}{2}+x+c} = e^{\frac{x^2}{2}+x}e^c = ke^{\frac{x^2}{2}+x}$ con $k > 0$; allora la (4) diventa

$$y(x) + 2 = ke^{\frac{x^2}{2}+x}\ ,\ k > 0 \Longleftrightarrow y(x) = ke^{\frac{x^2}{2}+x} - 2\ ,\ k > 0\ .$$

Imponendo poi la condizione iniziale si ricava $k = 3$. Segue che l'unica soluzione del problema assegnato è la funzione

$$y(x) = 3e^{\frac{x^2}{2}+x} - 2\ .$$

3-meccanica) D è un dominio regolare, $\vec{u} \in C^1(D)$ pertanto, per calcolare il flusso I del vettore $\vec{u}$ uscente dalla frontiera di D basta applicare il teorema della divergenza:

$$I \ = \ \iint_D \nabla\vec{u}\, dxdy = \iint_D 3(x^2+y^2)dxdy = 3\int_0^2 r^3 dr \int_{\pi/2}^{\pi} dt = \frac{3\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 6\pi$$

Analisi Matematica II (Civile), Matematica 2 (Meccanica) – 15 Luglio 2019

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1) Posto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq -\sqrt{3}\,x,\ y \geq \sqrt{3}\,x\,,\ x^2 + y^2 \leq 16\}$, calcolare $\displaystyle\int_{Fr\,E} y^2\,ds$.

2) Calcolare

$$\iiint_D (x^2 + y^2)dxdydz$$

dove D è la regione delimitata dalle superfici cilindriche $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ e dai piani $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$, e $x = y$.

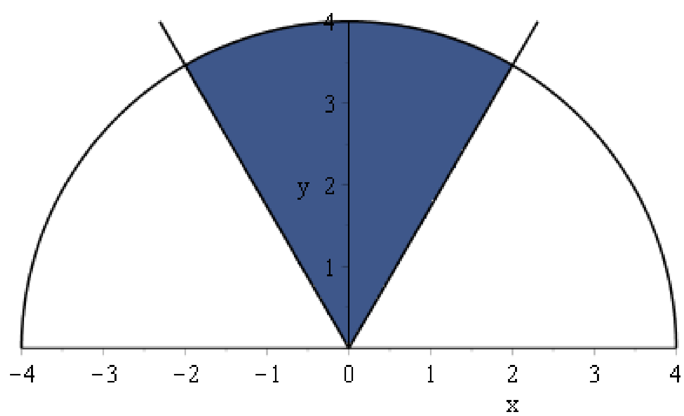
3) Sia dato il campo vettoriale piano

$$\vec{F}(x, y) = \left(x\ \log\left(1 + y^2\right), \frac{x^2 y}{y^2 + 1} \right) \quad , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Provare che è conservativo; determinarne la famiglia dei potenziali; calcolarne il lavoro sulla curva γ parametrizzata da $\vec{r}(t) = (1, t^2)\,,\, 0 \leq t \leq 1$.

Cenno di svolgimento

1) L'insieme E è la regione colorata del seguente disegno



pertanto $Fr\,E = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, ove

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}\,t \end{cases} ,0 \le t \le 4\cos\tfrac{\pi}{3} = 2 \qquad \Rightarrow \quad ds = 2dt \ ;$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} ,\ \pi/3 \le t \le 2\pi/3 \qquad \Rightarrow \quad ds = 4dt \ ;$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = -\sqrt{3}\,t \end{cases} ,-2 = 4\cos\frac{2\pi}{3} \le t \le 0 \qquad \Rightarrow \quad ds = 2dt \ ;$$

avendo osservato che $y = \sqrt{3}x \Rightarrow \tan\,\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$ mentre $y = -\sqrt{3}x \Rightarrow tg\,\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} y^2\,ds &= \int_0^2 3t^2\,2dt = 6\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = 16; \\
\int_{\gamma_2} y^2\,ds &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} 16\sin^2 t\,4dt = 64\left[\frac{t-\sin t\cos t}{2}\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} = \\
&= 32\left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\right] = 32\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \\
\int_{\gamma_3} y^2\,ds &= \int_{-2}^{0} 3t^2\,2dt = 6\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{0} = 2\left[-(-2)^3\right] = 16;
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\int_{Fr\,E} y^2\,ds &= \int_{\gamma_1} y^2\,ds + \int_{\gamma_2} y^2\,ds + \int_{\gamma_3} y^2\,ds = 16 + 32\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 16 \\
&= 32\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right).
\end{aligned}$$

2) Utilizzando le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = z \end{cases}$$

si ha che le nuove limitazioni sono $1 \le R \le 2$, $0 \le z \le 1$ e $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$, che definiscono l'insieme D'. L'integrale diventa

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz = \iiint_{D'} R^2 R\, dRdzdt = \int_0^1 dz \int_{\pi/4}^{\pi/2} dt \int_1^2 R^3 dR$$
$$= \quad (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\left[\frac{R^4}{4}\right]_1^2 = \frac{15}{16}\pi.$$

3) Osserviamo che, per come è definito, $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$; inoltre il campo è irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{y^2+1} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) \ .$$

Poiché poi $\mathbb{R}^2$ è ovviamente convesso, $\vec{F}$ è anche conservativo.

Determiniamo il potenziale da

$$\begin{cases} U_x(x,y) = F_1(x,y) \\ U_y(x,y) = F_2(x,y) \end{cases} \iff \begin{cases} U_x(x,y) = x \, \log(1+y^2) \\ U_y(x,y) = \dfrac{x^2 y}{y^2+1} \end{cases} .$$

Integrando la prima equazione rispetto ad x si ha

$$U(x,y) = \int x \, \log(1+y^2)\, dx = \frac{x^2}{2} \log(1+y^2) \ + \ k(y) \ ;$$

derivando questa rispetto ad y si ottiene

$$U_y(x,y) = \frac{x^2 y}{1+y^2} + k'(y);$$

quindi, sostituendo nella seconda equazione, si ricava

$$k'(y) = 0 \ \Rightarrow \ k(y) = c \in \mathbb{R}.$$

Allora la famiglia dei potenziali del campo dato è

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} \log(1+y^2) \ + \ c \ , \ \ c \in \mathbb{R} \ .$$

Calcoliamo ora il lavoro del campo lungo la curva assegnata, la quale è il segmento congiungente $(0,1)$ a $(1,1)$.
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \ U(1,1) - U(0,1) \ = \ \log \sqrt{2} \ .$$

Analisi Matematica II (Civile) - Modulo Analisi di Matematica II (Meccanica) – 3 Settembre 2019

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = (1+\cos t+2\sin t, 2-2\cos t-\sin t, 3+2\cos t-2\sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$, dopo aver provato che è regolare.

2. Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo della funzione
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - z + 5, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^2.$$
Studiare quindi il massimo e minimo assoluti di f sul disco D contenuto nel piano $z = \frac{1}{2}$, centrato in $(0, 0, \frac{1}{2})$ e avente raggio 1.

3. Calcolare il lavoro svolto dal campo di forze $F := (y^2+\cos x, 2xy+y^2+x)$ per spostare un punto materiale lungo la curva $\gamma := \{(\cos t, \sin t) : \quad 0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi\} \cup \{(t, t-1), 0 \leq t \leq 1\}$.

Cenni di svolgim

1. Sia C la curva tale che γ sia una sua parametrizzazione. $\gamma \in C^1([0, \pi])$ inoltre $\gamma'(t) = (-\sin t + 2\cos t, 2\sin t - \cos t, -2\sin t - 2\cos t)$ e
$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = 3 > 0.$$
Se proviamo che la γ è semplice abbiamo provato la regolarità. se $x(t_1) = x(t_2)$ e $z(t_1) = z(t_2)$ allora $x(t_1) + z(t_1) = 4 + 3\cos t_1$ e $x(t_2) + z(t_2) = 4 + 3\cos t_2$. In $[0, \pi]$ la funzione $\cos t$ è strettamente monotona e dunque questo è possibile se e solo se $t_1 = t_2$.
Risulta infine
$$L_C = \int_0^\pi 3dt = 3\pi.$$

2. Il gradiente di f è $(2x - 2, 2y - 4, 2z - 1)$, ed è nullo soltanto nel punto $P_0 \equiv (1, 2, \frac{1}{2})$. L'Hessiano ha tre autovalori coincidenti, tutti positivi, dunque il punto è di minimo. Il disco D è individuato dalle equazioni $z = \frac{1}{2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$. Nei punti del piano $z = \frac{1}{2}$ la funzione assume il valore
$$g(x, y) = f(x, y, \frac{1}{2}) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - \frac{1}{4}.$$

Poiché tale funzione ha gradiente mai nullo nell'insieme, è evidente che i punti di massimo e minimo sono raggiunti sulla frontiera di D. Basta applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con il vincolo $x^2 + y^2 - 1 = 0$, pertanto in questi punti $g(x, y) = -2x - 4y + \frac{23}{4}$. Essendo

$$L(x, y, \lambda) = \frac{23}{4} - 2x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

si deve imporre

$$-2 + 2\lambda x = 0, \quad -4 + 2\lambda y = 0,$$

da cui $\lambda y = 2\lambda x$, ossia (escludendo $\lambda = 0$), $y = 2x$. Dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$ si ricava $x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$, $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Ovviamente, data l'espressione di g, il massimo richiesto è raggiunto nel punto $(-\sqrt{\frac{1}{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2})$ e il minimo nel punto $(\sqrt{\frac{1}{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2})$.

3. La forma differenziale $\omega = (y^2 + \cos x)dx + (2xy + y^2 + x)dy$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ non è esatta in quanto non è chiusa e $\mathbb{R}^2$ è privo di buchi. Ma può essere vista come $\omega = (y^2 + \cos x)dx + (2xy + y^2)dy + xdy$. La prima parte è esatta ed essendo γ una curva generalmente regolare e chiusa il suo integrale è nullo; basta allora calcolare $\int_\gamma xdy$.

$$\begin{aligned} L &= \int_\gamma xdy = \int_0^{3\pi/2} \cos^2 t dt - \int_0^1 t dt = \\ &= \left[\frac{1}{2}\cos t \sin t + \frac{1}{2}t\right]_0^{3\pi/2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Modulo Analisi di Matematica II (Meccanica)
7 Gennaio 2020

1. Calcolare
$$\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy$$
dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \le 1, \; x \ge 0, \; y \ge 0\}$.

2. Dato l'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \le 16, \; (x-1)^2 > 1, \; (x+1)^2+y^2 > 1\}$ calcolare
$$\int_{+FrE} -ydx + xdy.$$

3. Studiare convergenza puntuale (uniforme) e somma della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{(2n)!}\right)x^{2n+1}.$$

Cenni di svolgimen

1. L'insieme D può essere scritto
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}.$$
Dal teorema di riduzione si ha
$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{(x^2+y^2+1)^2}dy = \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2}dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2}dy \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2}dx \left[-\frac{1}{(x^2+y^2+1)}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2}\left(-\frac{1}{x^2+(1-x^2)+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{x}{4}+\frac{x}{2(x^2+1)}\right)dx = \int_0^1 -\frac{x}{4}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = -\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\left[\log(x^2+1)\right]_0^1 = \\
&= -\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\log 2.
\end{aligned}$$

Si poteva risolvere anche passando a coordinate polari:

$$\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy \quad = \quad \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt \int_0^1 \frac{\varrho^3}{(\varrho^2+1)^2}d\varrho$$

osservando che

$$\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \frac{1}{4}[-\cos 2t]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\varrho^3}{(\varrho^2+1)^2}d\varrho &= \int_0^1 \frac{\varrho^3+\varrho-\varrho}{(\varrho^2+1)^2}d\varrho = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4\varrho^3+4\varrho}{(\varrho^2+1)^2}d\varrho - \int_0^1 \frac{\varrho}{(\varrho^2+1)^2}d\varrho \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{(\varrho^2+1)^2}d(\varrho^2+1)^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2\varrho}{(\varrho^2+1)^2}d\varrho \\ &= \frac{1}{4}[\log(\varrho^2+1)^2]_0^1 + \frac{1}{2}[\frac{1}{\varrho^2+1}]_0^1 = \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \\ &= \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2. Dal Teorema di Gauss-Green si ha che

$$AreaE = \frac{1}{2}\int_{FrE} xdy - ydx \Rightarrow 2AreaE = \int_{FrE} xdy - ydx.$$

Possiamo calcolare l'area di E come differenza di dischi, in particolare

$$AreaE = 16\pi - 2\pi = 14\pi$$

quindi

$$\int_{FrE} xdy - ydx = 28\pi.$$

3. Si tratta di una serie di potenze. Per determinarne il raggio di convergenza calcoliamo i raggi di convergenza delle due serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n+1}.$$

La prima ha raggio di convergenza $r = 1$, mentre la seconda ha raggio di convergenza $r = +\infty$. Inoltre nei punti $x = \pm 1$ la prima serie converge per il criterio di Leibnitz. La serie data allora converge assoultamente se $|x| < 1$ e puntualmente in $|x| \leq 1$. Utilizzando il criterio di Dirichelet la serie data converge anche uniformemente in $[-1, 1]$ mentre in tale insieme non converge totalmente. Per calcolarne la somma

$s(x)$ osserviamo che

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n+1} = \\ &= \arctan x + x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \arctan x + x \cos x. \end{aligned}$$

Analisi Matematica II (Civile), Matematica 2 (Meccanica) – 20 Gennaio 2020

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1) Determinare, se esistono, i massimi ed i minimi assoluti della funzione $f(x,y) = x^4 - x^2y^2 + 2y^4$ nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}$.

2) Calcolare
$$\iint_D \sin(\pi\frac{\sqrt{4x^2+9y^2}}{6})\,dxdy$$
quando $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; x \geq 0,\, y \geq 0,\, 36 \leq 4x^2 + 9y^2 \leq 144\}$.

3) Calcolare
$$\int_{\mathcal{C}} \frac{x+2y+2}{x+2y+1}dx + \frac{2}{x+2y+1}dy$$
quando $\mathcal{C}$ è la curva percorsa da A a B costituita dai seguenti archi di curva: il segmento AC con $A = (0,0)$, $C = (2,4)$, l'arco di parabola di equazione $y = -x^2 + 8x - 8$ che congiunge il punto C con il punto $B = (6,4)$.

Cenno di svolgimento

1) La funzione f è un polinomio, dunque è una funzione di calsse C^∞, l'insieme D è una ellisse di semiassi $\sqrt{2}$ e 1 (insieme compatto) pertanto, per il teorema di Weierstrass, la funzione assume massimo e minimo assoluto in D. Il minimo assoluto si troverà sicuramente nell'origine, visto che $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$ per ogni $(x,y) \in D$. Con semplici calcoli si prova che non esistono altri punti che annullano il gradiente, per cui i massimi assoluti, che esistono, si troveranno sulla frontiera di D. Parametrizziamo la frontiera in questo modo: $y^2 = 1 - x^2/2,\; |x| \leq \sqrt{2}$. Sia allora $g(x, \pm\sqrt{1-x^2/2}) = 2x^4 - 3x^2 + 2$. La funzione g ha massimi relativi se $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$ che corrispondono sulla frontiera di D ai punti $(0,\pm 1)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$. Visto che $f(\pm\sqrt{2},0) \geq f(0,\pm 1)$, i massimi assoluti cercati sono raggiunti nei punti $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

2) La curva $4x^2 + 9y^2 = 36$ è una ellisse di semiassi $a = 3$, $b = 2$ rispettivamente; la curva $4x^2 + 9y^2 = 144$ è una ellisse di semiassi $a = 6$, $b = 4$. Pertanto l'insieme D (che è un dominio regolare) è la porzione di piano del primo quadrante esterna alla prima ellisse ed interna alla seconda. Scriviamo l'insieme D in coordinate ellittiche:

$$\begin{cases} x = 3r\cos t \\ y = 2r\sin t \end{cases} \qquad r \in [1,2],\ t \in [0,\pi/2], \quad dxdy = 6rdrdt.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned}
\iint_D \sin\left(\pi\frac{\sqrt{4x^2+9y^2}}{6}\right) dxdy &= \int_0^{\pi/2} dt \int_1^2 6r\sin(\pi r)dr = \\
&= 6\,\frac{\pi}{2}\int_1^2 r\left(-\frac{\cos(\pi r)}{\pi}\right)' dr = \\
&= 3\pi\left\{-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_1^2\frac{\cos(\pi r)}{\pi}dr\right\} = -9.
\end{aligned}$$

3) Sia $\omega := \dfrac{x+2y+2}{x+2y+1}dx + \dfrac{2}{x+2y+1}dy$. Questa forma differenziale è definita ad esempio nel semipiano $\Omega := \{(x,y) : y > -\frac{1+x}{2}\}$. La curva $\mathcal{C}$ ha sostegno in tale insieme (da verificare, ad occhio non ci dovrebbero essere problemi) ed è generalmente regolare. Inoltre $\omega \in C^1(\Omega)$ e $X'_y = Y'_x = -\dfrac{2}{(x+2y+1)^2}$. Siccome Ω è convesso allora la ω risulta esatta, quindi l'integrale cercato non dipende dal percorso. Troviamo allora la classe delle primitive di ω. Risulta

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int \frac{x+2y+2}{x+2y+1}dx = \int\left(1+\frac{1}{x+2y+1}\right)dx = \\
&= x+\log(x+2y+1)+g(y) \\
U'_y(x,y) &= \frac{2}{x+2y+1}+g'(y) = \frac{2}{x+2y+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(y)=c \\
U(x,y) &= x+\log(x+2y+1)+c.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{x+2y+2}{x+2y+1}dx + \frac{2}{x+2y+1}dy = U(6,4)-U(0,0) = 6+\log 15.$$

Analisi Matematica II (Civile), Matematica 2 (Meccanica) – 3 Febbraio 2020

Motivare tutte le risposte, altrimenti non saranno considerate

1) Sia F il campo vettoriale $F(x,y) = (X,Y) = \left(3x^2 + \frac{2xy^2}{1+x^2y^2},\ 3 + \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\right)$. Stabilire se è conservativo e in caso affermativo calcolare un potenziale. Calcolare poi l'integrale curvilineo sull'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ contenuta nel semipiano $y \geq 0$ percorsa in senso antiorario.

2) Data la funzione $f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$ determinarne i punti di massimo e minimo liberi.

3) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(x+2)^n}{(n^2+1)x^n},\ x \neq 0,$$

determinarne l'insieme di convergenza assoluta; la serie converge totalmente in tale insieme?

Cenno di svolgimento

1) Il dominio del campo è tutto il piano $\mathbb{R}^2$ e $X, Y \in C^1(\mathbb{R}^2)$; inoltre

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{4xy(1+x^2y^2) - 4x^3y^3}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{4xy + 4x^3y^3 - 4x^3y^3}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

quindi la forma differenziale associata è chiusa **inoltre poiché il dominio è convesso** la forma differenziale è esatta. Questo significa che il campo è conservativo. Determiniamo un potenziale U. Deve risultare

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}$$

da cui $U(x,y) = x^3 + \log(1+x^2y^2) + h(y)$, $h \in C^1(\mathbb{R})$. Inoltre deve anche essere

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3 + \frac{2x^2y}{1+x^2y^2} = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2} + h'(y) \Leftrightarrow h(y) = 3y + K.$$

Quindi

$$U(x,y) = x^3 + \log(1+x^2y^2) + 3y + K.$$

Infine calcoliamo l'integrale curvilineo. Parametrizzando l'ellisse si ha:

$$\gamma(t) = (2\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi].$$

Poiché il campo è conservativo possiamo calcolare l'integrale semplicemente come differenza di potenziale agli estremi della curva $U(-2,0) - U(2,0) = -16$.

2 La funzione è infinitamente derivabile su tutto il piano e quindi gli eventuali punti di massimo e di minimo vanno ricercati tra quelli che annullano il gradiente. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = x^2y^2(3 - 4x - 3y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = x^3y(2 - 2x - 3y).$$

Sicuramente sono soluzioni i punti $(x, 0)$ e $(0, y)$, inoltre risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3 - 4x - 3y = 0 \\ 2 - 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

si ottiene anche il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. Calcoliamo ora la matrice Hessiana, si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y.$$

Quindi

$$H(x, 0) = 0 = H(0, y), \quad H(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{144} > 0$$

perciò il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ è un punto di massimo visto che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -1/9$ mentre i rimanenti punti devono essere studiati con un altro metodo.
Si ha che $f(0,0) = f(x,0) = f(0,y) = 0$ e $f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3 = x^3y^2(1 - x - y)$. Studiando il segno di f si ha che la funzione è positiva in

- $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \geq 0, \, y < 1 - x\}$ e in
- $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x < 0, \, y > 1 - x\}$.

Quindi i punti dell'asse y sono tutti sella. Per quanto riguarda i punti $(x, 0)$ sono

- di massimo relativo se $0 < x < 1$

- di minimo relativo se $x > 1$ o $x < 0$
- il punto $(1, 0)$ è di sella.

3) La serie si riscrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \left(\frac{x+2}{x} \right)^n, \ x \neq 0;$$

quindi, ponendo $t = \dfrac{x+2}{x}$, essa fornisce la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} t^n.$$

Da $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{(n+1)^2+1} \dfrac{n^2+1}{n} = 1 \quad \Longrightarrow R := 1$, sappiamo che la serie non converge per

$$|t| > 1 \iff \left| \frac{x+2}{x} \right| > 1 \iff |x+2| > |x| \iff x > -1$$

mentre converge assolutamente per $|t| < 1 \iff x < -1$.

Se $x = -1$, allora la serie assoluta si riduce a $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$ che non converge essendo il suo termine generale asintotico a quello della serie armonica.

Possiamo quindi affermare che l'insieme di convergenza assoluta della serie data è $I =]-\infty, -1[$.

La serie non converge totalmente in I in quanto la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x\in I} \left[\frac{n}{n^2+1} \left| \frac{x+2}{x} \right|^n \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

non converge.

Dalle proprietà delle serie di potenze possiamo però affermare che c'è convergenza totale per $|t| \leq \rho, \quad \forall \rho \in]0,1[$, ovvero per

$$\begin{cases} \left| \dfrac{x+2}{x} \right| \leq \rho \\ x < -1 \end{cases} \iff \frac{2}{1-\rho} \leq x \leq -\frac{2}{1+\rho}, \quad \forall \rho \in]0,1[.$$