Matematica 2 - I esonero 5 Aprile 2019 - Compito A

---

1) Data la funzione $f(x,y) = (y-x^2)|x|\log(1+x^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinarne (se esistono):

- il gradiente;
- l'insieme degli zeri ed il segno della funzione.

2) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

e dire se la serie converge totalmente nel suo insieme di convergenza.

Cenni di soluzione

1) La funzione $f \in C(\mathbb{R}^2)$ perché prodotto di funzioni continue. Inoltre $Z_f = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. Dunque Z_f divide $\mathbb{R}^2$ in 3 componenti aperte e connesse nella quali f assume segno costante: positivo nei punti al di sopra della parabola $y = x^2$, negativo negli altri.

Studiamo ora il gradiente di f. Risulta banalmente $f'_y(x,y) = |x|\log(1+x^2)$ per ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Per studiare f'_x spezziamo innanzitutto la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} (y-x^2)x\log(1+x^2) & x \geq 0 \\ -(y-x^2)x\log(1+x^2) & x < 0. \end{cases}$$

Se $x > 0$ (aperto e connesso) si possono applicare i teoremi di derivazione, risulta allora:

$$f'_x(x,y) = (-3x^2+y)\log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}(y-x^2).$$

In modo analogo se $x < 0$ risulta:

$$f'_x(x,y) = -\left[(-3x^2+y)\log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}(y-x^2)\right].$$

Se $x = 0$, visto che c'è un cambio di legge bisogna calcolare la derivata parziale usando la definizione. In $(0,0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f'_x(0,0) = 0,$$

se invece considero i punti $(0,y), y \neq 0$ risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(y-x^2)|x|\log(1+x^2)}{x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f'_x(0,y) = 0.$$

Il gradiente è allora definito su tutto $\mathbb{R}^2$. Posto allora

$$\alpha(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Risulta $\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ed è dato da

$$\nabla f(x,y) = \big(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\big) = \left(\alpha(x)\left[(-3x^2+y)\log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}(y-x^2)\right], |x|\log(1+x^2)\right).$$

2) Si tratta di una serie di potenze. $f_n(0) = 0$ per ogni $n \geq 1$ dunque $s(0) = 0$. Se $x \neq 0$ applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti. Risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{|x|^n} = |x| < 1$$

e quindi la serie converge assolutamente se $x \in]-1,1[$. Se $x = \pm 1$ allora $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^2+1}$ e quindi la serie converge per il criterio del confronto asintotico (si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente 2). Questo ci assicura anche la convergenza totale della serie in $[-1,1]$ in quanto

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2+1}.$$

Se $x > 1$ la serie è a termini positivi ed il criterio del rapporto ci dice che la serie diverge; mentre se $x < -1$ la serie è a segni alterni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{n^2+1}.$$

Proviamo che la successione $\left(\dfrac{|x|^n}{n^2+1}\right)_n$ è monotona non decrescente, almeno da un certo m in poi.

$$\frac{|x|^n}{n^2+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2+1} \quad \Longleftrightarrow \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} \leq |x|.$$

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $1+\varepsilon < |x|$, allora applicando la definizione di limite a $\dfrac{n^2+2n+2}{n^2+1}$ si ottiene l'esistenza di un $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq m$ risulta

$$1 - \varepsilon \leq \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} \leq 1 + \varepsilon < |x|$$

(il colore blu evidenzia la disuguaglianza che interessa).

Matematica 2 - I esonero 5 Aprile 2019 - Compito B

---

1) Data la funzione $f(x,y) = (y - x^2)|y|\log(1+y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinarne (se esistono):

- il gradiente;
- l'insieme degli zeri ed il segno della funzione.

2) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \sin^2(\frac{1}{n}), \qquad x \in \mathbb{R}$$

e dire se la serie converge totalmente nel suo insieme di convergenza.

Cenni di soluzione

1) La funzione $f \in C(\mathbb{R}^2)$ perché prodotto di funzioni continue. Inoltre $Z_f = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. Dunque Z_f divide $\mathbb{R}^2$ in 3 componenti aperte e connesse nella quali f assume segno costante: positivo nei punti al di sopra della parabola $y = x^2$, negativo negli altri.

Studiamo ora il gradiente di f. Risulta banalmente $f'_x(x,y) = -2x|y|\log(1+y^2)$ per ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Per studiare f'_y spezziamo innanzitutto la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} (y-x^2)y\log(1+y^2) & y \geq 0 \\ -(y-x^2)y\log(1+y^2) & y < 0. \end{cases}$$

Se $y > 0$ (aperto e connesso) si possono applicare i teoremi di derivazione, risulta allora:

$$f'_y(x,y) = (2y - x^2)\log(1+y^2) + \frac{2y^2}{1+y^2}(y - x^2).$$

In modo analogo se $y < 0$ risulta:

$$f'_y(x,y) = -\left[(2y - x^2)\log(1+y^2) + \frac{2y^2}{1+y^2}(y - x^2)\right].$$

Se $y = 0$, visto che c'è un cambio di legge bisogna calcolare la derivata parziale usando la definizione. In $(0,0)$

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f'_y(0,0) = 0,$$

se invece considero i punti $(x,0), x \neq 0$ risulta

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{(y - x^2)|y|\log(1+y^2)}{y} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f'_y(x,0) = 0.$$

Il gradiente è allora definito su tutto $\mathbb{R}^2$. Posto allora

$$\alpha(y) = \begin{cases} +1 & y > 0 \\ -1 & y < 0 \\ \ \ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Risulta $\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ed è dato da

$$\nabla f(x,y) = \big(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\big) = \left(-2x|y|\log(1+y^2), \alpha(y)\left[(2y-x^2)\log(1+y^2) + \frac{2y^2}{1+y^2}(y-x^2)\right]\right).$$

2) Si tratta di una serie di potenze. $f_n(0) = 0$ per ogni $n \geq 1$ dunque $s(0) = 0$. Se $x \neq 0$ applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti. Tenendo conto che $\sin t \sim t$, $t \to 0$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}\sin^2(\frac{1}{n+1})}{\sin^2(\frac{1}{n})|x|^n} = |x| < 1$$

e quindi la serie converge assolutamente se $x \in]-1,1[$. Se $x = \pm 1$ allora $|f_n(x)| = \sin^2(\frac{1}{n})$ e quindi la serie converge per il criterio del confronto asintotico (si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente 2). Questo ci assicura anche la convergenza totale della serie in $[-1,1]$ in quanto

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \sin^2(\frac{1}{n}).$$

Se $x > 1$ la serie è a termini positivi ed il criterio del rapporto ci dice che la serie diverge; mentre se $x < -1$ la serie è a segni alterni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |x|^n \cdot \sin^2(\frac{1}{n}).$$

Proviamo che la successione $\left(|x|^n \cdot \sin^2(\frac{1}{n})\right)_n$ è monotona non decrescente, almeno da un certo m in poi.

$$|x|^n \cdot \sin^2(\frac{1}{n}) \leq |x|^{n+1} \cdot \sin^2(\frac{1}{n+1}) \quad \iff \frac{\sin^2(\frac{1}{n})}{\sin^2(\frac{1}{n+1})} \leq |x|.$$

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $1 + \varepsilon < |x|$, allora applicando la definizione di limite a $\dfrac{\sin^2(\frac{1}{n})}{\sin^2(\frac{1}{n+1})}$ si ottiene l'esistenza di un $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq m$ risulta

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\sin^2(\frac{1}{n})}{\sin^2(\frac{1}{n+1})} \leq 1 + \varepsilon < |x|$$

(il colore blu evidenzia la disuguaglianza che interessa).

Matematica 2 - I esonero 5 Aprile 2019 - Compito C

---

1) Data la funzione $f(x,y) = e^x(y+x^2)|x|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinarne (se esistono):

- il gradiente;
- l'insieme degli zeri ed il segno della funzione.

2) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \log(1+\frac{1}{n}), \qquad x \in \mathbb{R}$$

e dire se la serie converge totalmente nel suo insieme di convergenza.

Cenni di soluzione

1) La funzione $f \in C(\mathbb{R}^2)$ perché prodotto di funzioni continue. Inoltre $Z_f = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(x,-x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. Dunque Z_f divide $\mathbb{R}^2$ in 3 componenti aperte e connesse nella quali f assume segno costante: positivo nei punti al di sopra della parabola $y = -x^2$, negativo negli altri.

Studiamo ora il gradiente di f. Risulta banalmente $f'_y(x,y) = |x|e^x$ per ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Per studiare f'_x spezziamo innanzitutto la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} (y+x^2)xe^x & x \geq 0 \\ -(y+x^2)xe^x & x < 0. \end{cases}$$

Se $x > 0$ (aperto e connesso) si possono applicare i teoremi di derivazione, risulta allora:

$$f'_x(x,y) = e^x(x^3 + 3x^2 + xy + y).$$

In modo analogo se $x < 0$ risulta:

$$f'_x(x,y) = -e^x(x^3 + 3x^2 + xy + y).$$

Se $x = 0$, visto che c'è un cambio di legge bisogna calcolare la derivata parziale usando la definizione. In $(0,0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 e^x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f'_x(0,0) = 0,$$

se invece considero i punti $(0,y), y \neq 0$ risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(y+x^2)|x|e^x}{x} = \begin{cases} +y & x \to 0^+ \\ -y & x \to 0^- \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \nexists f'_x(0,y) = 0.$$

Il gradiente è allora definito su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y), y \neq 0\}$. Posto allora

$$\alpha(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \;\;0 & x = 0. \end{cases}$$

Risulta $\nabla f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y), y \neq 0\} \to \mathbb{R}^2$ ed è dato da

$$\nabla f(x, y) = \left(f'_x(x, y), f'_y(x, y)\right) = \left(\alpha(x)\left[e^x(x^3 + 3x^2 + xy + y)\right], |x|e^x\right).$$

2) Visto che la funzione logaritmo è monotona crescente, risulta

$$0 \leq |x|^n \log(1 + \frac{1}{n}) \leq \log 2|x|^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Poiché la serie geometrica converge quando $|x| < 1$ allora la serie data converge assolutamente in $]-1, 1[$ per il criterio del confronto.
Se $x = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n})$ che è divergente a $+\infty$, visto che si comporta come la serie armonica (ricordare il limite notevole).
Se invece $x = -1$ allora la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \log(1 + \frac{1}{n})$ che è una serie a segni alterni convergente per il criterio di Leibnitz ($\log(1 + \frac{1}{n}) \downarrow 0$).
Se $x > 1$ la serie è a termini positivi e diverge per il criterio del rapporto:

$$\frac{x^{n+1} \log(1 + 1/(n+1))}{x^n \log(1 + 1/n)} \to x > 1.$$

Se $x < -1$ la serie è a segni alterni: proviamo che la successione $\left(|x|^n \cdot \log(1 + \frac{1}{n})\right)_n$ è monotona non decrescente, almeno da un certo m in poi.

$$|x|^n \cdot \log(1 + \frac{1}{n}) \leq |x|^{n+1} \cdot \log(1 + \frac{1}{n+1}) \quad \Longleftrightarrow \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\log(1 + \frac{1}{n+1})} \leq |x|.$$

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $1 + \varepsilon < |x|$, allora applicando la definizione di limite a $\dfrac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\log(1 + \frac{1}{n+1})}$ si ottiene l'esistenza di un $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq m$ risulta

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\log(1 + \frac{1}{n+1})} \leq 1 + \varepsilon < |x|$$

(il colore blu evidenzia la disuguaglianza che interessa).

La convergenza in $[-1, 1[$ non è totale poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n}) = +\infty.$$

Matematica 2 - I esonero 5 Aprile 2019 - Compito D

---

1) Data la funzione $f(x,y) = f(x,y) = e^y(y+x^2)|y|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinarne (se esistono):

- il gradiente;
- l'insieme degli zeri ed il segno della funzione.

2) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

e dire se la serie converge totalmente nel suo insieme di convergenza.

Cenni di soluzione

1) La funzione $f \in C(\mathbb{R}^2)$ perché prodotto di funzioni continue. Inoltre $Z_f = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(x,-x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. Dunque Z_f divide $\mathbb{R}^2$ in 3 componenti aperte e connesse nella quali f assume segno costante: positivo nei punti al di sopra della parabola $y = -x^2$, negativo negli altri.

Studiamo ora il gradiente di f. Risulta banalmente $f'_x(x,y) = 2x|y|e^y$ per ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Per studiare f'_y spezziamo innanzitutto la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} (y+x^2)ye^y & y \geq 0 \\ -(y+x^2)ye^y & y < 0. \end{cases}$$

Se $y > 0$ (aperto e connesso) si possono applicare i teoremi di derivazione, risulta allora:

$$f'_y(x,y) = e^y(x^2 + y^2 + yx^2 + 2y).$$

In modo analogo se $y < 0$ risulta:

$$f'_y(x,y) = -e^y(x^2 + y^2 + yx^2 + 2y).$$

Se $y = 0$, visto che c'è un cambio di legge bisogna calcolare la derivata parziale usando la definizione. In $(0,0)$

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f'_y(0,0) = 0,$$

se invece considero i punti $(0,y), y \neq 0$ risulta

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{(y+x^2)|y|e^y}{y} = \begin{cases} +x^2 & x \to 0^+ \\ -x^2 & x \to 0^- \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \nexists f'_y(x,0) = 0.$$

Il gradiente è allora definito su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \neq 0\}$. Posto allora

$$\alpha(y) = \begin{cases} +1 & y > 0 \\ -1 & y < 0 \\ \ \ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Risulta $\nabla f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \neq 0\} \to \mathbb{R}^2$ ed è dato da

$$\nabla f(x,y) = \big(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\big) = \big(2x|y|e^y, \alpha(y)\left[e^y(x^2+y^2+yx^2+2y)\right]\big).$$

2) Visto che la funzione $e^{1/n} - 1$ è monotona decrescente, risulta

$$0 \leq |x|^n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \leq (e-1)|x|^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Poiché la serie geometrica converge quando $|x| < 1$ allora la serie data converge assolutamente in $]-1,1[$ per il criterio del confronto.
Se $x = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ che è divergente a $+\infty$, visto che si comporta come la serie armonica (ricordare il limite notevole $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t}$).
Se invece $x = -1$ allora la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ che è una serie a segni alterni convergente per il criterio di Leibnitz ($\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \downarrow 0$).
Ricordando che $e^t - 1 \sim t$, $t \to 0$, se $x > 1$ la serie è a termini positivi e diverge per il criterio del rapporto:

$$\frac{x^{n+1}(e^{\frac{1}{n+1}} - 1)}{x^n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} \to x > 1.$$

Se $x < -1$ la serie è a segni alterni: proviamo che la successione $\left(|x|^n \cdot (e^{\frac{1}{n}} - 1)\right)_n$ è monotona non decrescente, almeno da un certo m in poi.

$$|x|^n \cdot (e^{\frac{1}{n}} - 1) \leq |x|^{n+1} \cdot (e^{\frac{1}{n+1}} - 1) \quad \Longleftrightarrow \frac{(e^{\frac{1}{n}} - 1)}{(e^{\frac{1}{n+1}} - 1)} \leq |x|.$$

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $1 + \varepsilon < |x|$, allora applicando la definizione di limite a $\dfrac{(e^{\frac{1}{n}} - 1)}{(e^{\frac{1}{n+1}} - 1)}$ si ottiene l'esistenza di un $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq m$ risulta

$$1 - \varepsilon \leq \frac{(e^{\frac{1}{n}} - 1)}{(e^{\frac{1}{n+1}} - 1)} \leq 1 + \varepsilon < |x|$$

(il colore blu evidenzia la disuguaglianza che interessa).

La convergenza in $[-1,1[$ non è totale poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1) = +\infty.$$

Matematica 2 (Chimica) - II esonero 06/05/2019 - Compito A

1) Data la funzione $f(x,y) = x^3 - 4x + 2xy^2$, studiarne massimi e minimi relativi in tutto $\mathbb{R}^2$ e in $[-3,3]^2$.

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 4x(t) + y(t) - 5t \\ x'(t) = -x(t) + y(t) \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

Cenni di soluzione

1) La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ perché è un polinomio. È anche simmetrica, infatti è pari rispetto alla variabile y, mentre è dispari rispetto alla x ($f(x,-y) = f(x,y)$; $f(-x,y) = -f(x,y)$). Inoltre si annulla per $x = 0$ e per $x^2 + 2y^2 = 4$ (ellisse di semiassi $a = 2, b = \sqrt{2}$). Studiamo ora la derivabilità parziale della funzione f applicando le regole di derivazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 4 + 2y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy.$$

Studiamo pertanto $\nabla f = (0,0)$ in $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 3x^2 - 4 + 2y^2 = 0 \\ 4xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \ y = \pm\sqrt{2} \\ y = 0, \ x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Siccome f è simmetrica (vedi sopra) basta studiare la natura dei punti $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0), (0, \sqrt{2})$. Siccome f (polinomio) è sicuramente di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ possiamo applicare il metodo della matrice Hessiana. Risulta :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix} \quad \det H(x,y) = 24x^2 - 16y^2,$$

pertanto

$$\begin{array}{ll} \det H(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0) > 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0) > 0 \Longrightarrow \text{ punto di minimo} \\ \det H(0, \sqrt{2}) < 0, & \Longrightarrow \text{ punto sella} \end{array}$$

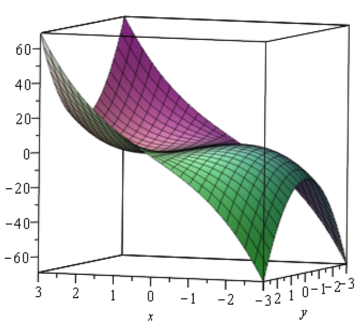
Ricapitolando, per simmetria, $(0, \pm\sqrt{2})$ punti sella, $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$ punto di minimo relativo, $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$ punto di massimo relativo per f in $\mathbb{R}^2$.
I quattro punti individuati in $\mathbb{R}^2$ cadono tutti nel quadrato $[-3,3]^2$ e quindi di punti di massimo o di minimo interni ulteriori non ce ne sono. Studiamo ora i punti di frontiera:

- $x = t,\ y = \pm 3,\ t \in [-3, 3]$ (f è pari rispetto ad y). In tal caso $g(t) = f(t, \pm 3) = x^3 + 14x$. Siccome $g'(t) = 3t^2 + 14 > 0$ sempre la funzione g ha un minimo per $t = -3$ ed un massimo per $t = 3$.
- $x = 3,\ y = t,\ t \in [-3, 3]$. In tal caso $h(t) = f(3, t) = 6t^2 + 15$ che è una parabola e pertanto h ha un minimo per $t = 0$ e due massimi per $t = \pm 3$.
- $x = -3,\ y = t,\ t \in [-3, 3]$. In tal caso $l(t) = f(-3, t) = -h(t)$. (f è dispari rispetto ad x e quindi dove c'è un massimo per h c'è un minimo per per l e viceversa).

Siccome f è continua nel compatto $K := [-3, 3]^2$, per il Teorema di Weierstrass f ammette massimi e minimi assoluti in K. I massimi sono in $(3, \pm 3), (-3, 0), (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$. I minimi sono in $(-3, \pm 3), (3, 0), (\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$.

$$\max\{f(3, \pm 3), f(-3, 0), f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)\} = 69 = f(3, \pm 3);$$
$$\min\{f(-3, \pm 3), f(3, 0), f(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)\} = -69 = f(-3, \pm 3).$$

Quindi i punti $(3, \pm 3)$ sono di minimo assoluto per f in K, $(-3, \pm 3)$ sono di massimo assoluto nello stesso insieme. Il grafico della funzione valutata nei punti $(x, y) \in [-3, 3]^2$ è riportati in figura:



2) Ricaviamo la $y(t)$ dalla seconda equazione, la deriviamo e la sostituiamo nella prima.

$$y(t) = x'(t) + x(t), \qquad y'(t) = x''(t) + x'(t)$$
$$x''(t) + x'(t) = 4x(t) + x'(t) + x(t) - 5t$$
$$x''(t) - 5x(t) = -5t$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, completa. L'equazione caratteristica: $z^2 - 5 = 0$ ammette come soluzioni $z = \pm\sqrt{5}$.

L'integrale generale della equazione omogenea è $x(t) = c_1 e^{-\sqrt{5}t} + c_2 e^{\sqrt{5}t}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa: $y(t) = at + b$. Derivando due volte e sostituendo nella equazione completa si ottiene $a = 1$, $b = 0$. Pertanto l'integrale generale della equazione completa è

$$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{5}t} + c_2 e^{\sqrt{5}t} + t, \qquad 0 = x(0) = c_1 + c_2.$$

Deriviamola e sostituiamola nella prima equazione:

$$y(t) = c_1 e^{-\sqrt{5}t}(1-\sqrt{5}) + c_2 e^{\sqrt{5}t}(1+\sqrt{5}) + t + 1, \qquad 1 = y(0) = c_1(1-\sqrt{5}) + c_2(1+\sqrt{5}) + 1.$$

Risulta allora $c_1 = c_2 = 0$. La soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t + 1 \end{cases}$$

Matematica 2 (Chimica) - II esonero 06/05/2019 - Compito B

---

1) Data la funzione $f(x,y) = 2x^2y - 6y + 3y^3$, studiarne massimi e minimi relativi in tutto $\mathbb{R}^2$ e in $[-3,3]^2$.

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = x(t) - y(t) \\ x'(t) = -x(t) + y(t) + e^t \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

Cenni di soluzione

1) La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ perché è un polinomio. È anche simmetrica, infatti è pari rispetto alla variabile x, mentre è dispari rispetto alla y ($f(x,-y) = -f(x,y)$; $f(-x,y) = f(x,y)$). Inoltre si annulla per $y = 0$ e per $2x^2 + 3y^2 = 6$ (ellisse di semiassi $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}$). Studiamo ora la derivabilità parziale della funzione f applicando le regole di derivazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 9y^2 - 6.$$

Studiamo pertanto $\nabla f = (0,0)$ in $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 4xy = 0 \\ 2x^2 - 6 + 9y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0, \ x = \pm\sqrt{3} \\ x = 0, y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}. \end{cases}$$

Per la simmetria di f (vedi sopra) basta studiare la natura dei punti $(0, \sqrt{\frac{2}{3}})$, $(\sqrt{3}, 0)$. Siccome f (polinomio) è sicuramente di classe C^2 e quindi possiamo applicare il metodo della matrice Hessiana. Risulta

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x \\ 4x & 18y \end{pmatrix} \quad \det H(x,y) = 72y^2 - 16x^2$$

$$\det H(0, \sqrt{\frac{2}{3}}) > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \sqrt{\frac{2}{3}}) > 0 \Longrightarrow \text{ punto di minimo}$$

$$\Longrightarrow (0, -\sqrt{\frac{2}{3}}) \quad \text{punto di massimo}$$

$$\det H(\sqrt{3}, 0) < 0 \Longrightarrow \text{ punto sella}$$

I quattro punti individuati in $\mathbb{R}^2$ cadono tutti nel quadrato $[-3,3]^2$ e quindi di punti di massimo o di minimo interni ulteriori non ce ne sono. Studiamo ora i punti di frontiera:

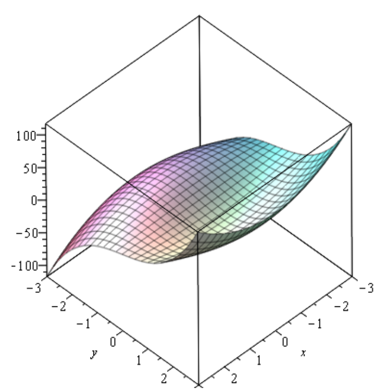
- $x = \pm 3,\ y = t,\ t \in [-3, 3]$ (f è pari rispetto ad x). In tal caso $g(t) = f(\pm 3, t) = 3y^3 + 12y$. Siccome $g'(t) = 9t^2 + 12 > 0$ sempre la funzione g ha un minimo per $t = -3$ ed un massimo per $t = 3$.
- $x = t,\ y = 3,\ t \in [-3, 3]$. In tal caso $h(t) = f(t, 3) = 6t^2 + 63$ che è una parabola e pertanto h ha un minimo per $t = 0$ e due massimi per $t = \pm 3$.
- $x = t,\ y = -3,\ t \in [-3, 3]$. In tal caso $l(t) = f(t, -3) = -h(t)$. (f è dispari rispetto ad y e quindi dove c'è un massimo per h c'è un minimo per l e viceversa).

Siccome f è continua nel compatto $K := [-3, 3]^2$, per il Teorema di Weierstrass f ammette massimi e minimi assoluti in K. I massimi sono in $(3, \pm 3), (-3, 0), (-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$.
I minimi sono in $(-3, \pm 3), (3, 0), (\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$.

$$\max\{f(3, \pm 3), f(-3, 0), f(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)\} = 117 = f(3, \pm 3);$$
$$\min\{f(-3, \pm 3), f(3, 0), f(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)\} = -117 = f(-3, \pm 3).$$

Quindi i punti $(3, \pm 3)$ sono di minimo assoluto per f in K, $(-3, \pm 3)$ sono di massimo assoluto nello stesso insieme.

In grafico della funzione valutata nei punti $x^2 + y^2 \leq 9$ è riportato in figura:



2) Ricaviamo la $x(t)$ dalla prima equazione, la deriviamo e la sostituiamo nella seconda.

$$x(t) = y'(t) + y(t), \qquad x'(t) = y''(t) + y'(t)$$
$$y''(t) + y'(t) = -y'(t) - y(t) + y(t) + e^t$$
$$y''(t) + 2y'(t) = e^t$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, completa. L'equazione caratteristica: $z^2 + 2z = 0$ ammette come soluzioni $z = 0, z = -2$.

L'integrale generale della equazione omogenea è $y(t) = c_1 + c_2 e^{-2t}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa: $y(t) = ae^t$. Derivando due volte e sostituento nella equazione completa si ottiene $a = 1/3$. Pertanto l'integrale generale della equazione completa è

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} + \frac{e^t}{3}, \qquad 0 = y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{3}.$$

Deriviamola e sostituiamola nella prima equazione:

$$x(t) = c_1 - c_2 e^{-2t} + \frac{2e^t}{3}, \qquad 1 = x(0) = c_1 - c_2 + \frac{2}{3}.$$

Risulta allora $c_1 = 0$ e $c_2 = -\dfrac{1}{3}$. La soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{e^{-2t} + 2e^t}{3} \\ \\ y(t) = \dfrac{2e^t - e^{-2t}}{3} \end{cases}$$

Matematica 2 (Chimica) - II esonero 06/05/2019 - Compito C

---

1) Data la funzione $f(x, y) = 2x^3 - 4x + xy^2$, studiarne massimi e minimi relativi in tutto $\mathbb{R}^2$ e in $[-3, 3]^2$.

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = x(t) + y(t) \\ x'(t) = -x(t) - y(t) + \sin t \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

Cenni di soluzione

1) La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ perché è un polinomio. È anche simmetrica, infatti è pari rispetto alla variabile y, mentre è dispari rispetto alla x ($f(x, -y) = f(x, y)$; $f(-x, y) = -f(x, y)$). Inoltre si annulla per $x = 0$ e per $x^2 + 2y^2 = 4$ (ellisse di semiassi $a = 2, b = \sqrt{2}$). Studiamo ora la derivabilità parziale della funzione f applicando le regole di derivazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 - 4 + y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy.$$

Studiamo pertanto $\nabla f = (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 6x^2 - 4 + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \; y = \pm 2 \\ y = 0, \; x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

Siccome f è simmetrica (vedi sopra) basta studiare la natura dei punti $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0), (0, 2)$. Siccome f (polinomio) è sicuramente di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ possiamo applicare il metodo della matrice Hessiana. Risulta :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \quad \det H(x, y) = 24x^2 - 4y^2,$$

pertanto

$$\begin{aligned} &\det H(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0) > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0) > 0 \Longrightarrow \text{ punto di minimo} \\ &\det H(0, 2) < 0, \qquad \Longrightarrow \text{ punto sella} \end{aligned}$$

Ricapitolando, per simmetria, $(0, \pm 2)$ punti sella, $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ punto di minimo relativo, $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ punto di massimo relativo per f in $\mathbb{R}^2$.

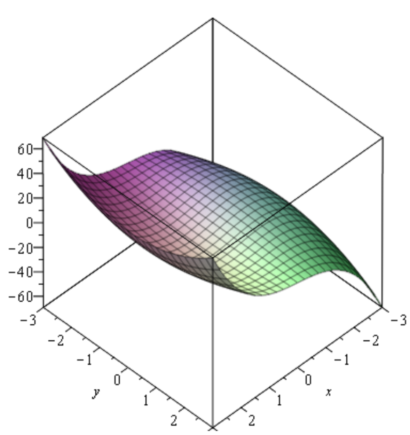
I quattro punti individuati in $\mathbb{R}^2$ cadono tutti nel quadrato $[-3,3]^2$ e quindi di punti di massimo o di minimo interni ulteriori non ce ne sono. Studiamo ora i punti di frontiera:

- $x = t,\ y = \pm 3,\ t \in [-3,3]$ (f è pari rispetto ad y). In tal caso $g(t) = f(t, \pm 3) = 2x^3 + 5x$. Siccome $g'(t) = 6t^2 + 5 > 0$ sempre la funzione g ha un minimo per $t = -3$ ed un massimo per $t = 3$.
- $x = 3,\ y = t,\ t \in [-3,3]$. In tal caso $h(t) = f(3,t) = 3t^2 + 42$ che è una parabola e pertanto h ha un minimo per $t = 0$ e due massimi per $t = \pm 3$.
- $x = -3,\ y = t,\ t \in [-3,3]$. In tal caso $l(t) = f(-3,t) = -h(t)$. (f è dispari rispetto ad x e quindi dove c'è un massimo per h c'è un minimo per per l e viceversa).

Siccome f è continua nel compatto $K := [-3,3]^2$, per il Teorema di Weierstrass f ammette massimi e minimi assoluti in K. I massimi sono in $(3, \pm 3), (-3, 0), (-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$.
I minimi sono in $(-3, \pm 3), (3, 0), (\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$.

$$\max\{f(3,\pm 3), f(-3,0), f(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)\} = 69 = f(3, \pm 3);$$
$$\min\{f(-3,\pm 3), f(3,0), f(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)\} = -69 = f(-3, \pm 3).$$

Quindi i punti $(3, \pm 3)$ sono di minimo assoluto per f in K, $(-3, \pm 3)$ sono di massimo assoluto nello stesso insieme. Il grafico della funzione valutata nei punti $(x,y) \in [-3,3]^2$ è riportati in figura:



2) Ricaviamo la $x(t)$ dalla prima equazione, la deriviamo e la sostituiamo nella seconda.

$$\begin{aligned}
&x(t) = y'(t) - y(t), \qquad x'(t) = y''(t) - y'(t) \\
&y''(t) - y'(t) = -y'(t) + y(t) - y(t) + \sin t \\
&y''(t) = \sin t
\end{aligned}$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a variabili separabili. L'integrale generale della equazione è ottenuto integrando due volte ambo i membri

$$\begin{aligned}
&y'(t) = -\cos t + c_1 \\
&y(t) = c_2 + c_1 t - \sin t, \qquad y(0) = 0, \quad c_2 = 0 \\
&x(t) = -\cos t + c_1 + \sin t - c_1 t, \qquad x(0) = 0, \quad c_1 = 1
\end{aligned}$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{cases} x(t) = \sin t - \cos t + 1 - t \\ y(t) = t - \sin t. \end{cases}$$

Matematica 2 (Chimica) - II esonero 06/05/2019 - Compito D

1) Data la funzione $f(x, y) = 3x^2y - 6y + 2y^3$, studiarne massimi e minimi relativi in tutto $\mathbb{R}^2$ e in $[-3, 3]^2$.

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = x(t) + y(t) \\ x'(t) = x(t) - y(t) + 2t^2 \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

Cenni di soluzione

1) La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ perché è un polinomio. È anche simmetrica, infatti è pari rispetto alla variabile x, mentre è dispari rispetto alla y ($f(x, -y) = -f(x, y)$; $f(-x, y) = f(x, y)$). Inoltre si annulla per $y = 0$ e per $2x^2 + 3y^2 = 6$ (ellisse di semiassi $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}$). Studiamo ora la derivabilità parziale della funzione f applicando le regole di derivazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 + 6y^2 - 6.$$

Studiamo pertanto $\nabla f = (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 6xy = 0 \\ 3x^2 - 6 + 6y^2 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0, \ x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0, y = \pm 1. \end{cases}$$

Per la simmetria di f (vedi sopra) basta studiare la natura dei punti $(0, 1)$, $(\sqrt{2}, 0)$. Siccome f (polinomio) è sicuramente di classe C^2 e quindi possiamo applicare il metodo della matrice Hessiana. Risulta

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 12y \end{pmatrix} \quad \det H(x, y) = 72y^2 - 36x^2$$

$$\det H(0, 1) > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) > 0 \Longrightarrow \text{ punto di minimo}$$
$$\Longrightarrow (0, -1) \quad \text{punto di massimo}$$
$$\det H(\sqrt{2}, 0) < 0 \Longrightarrow \text{ punto sella}$$

I quattro punti individuati in $\mathbb{R}^2$ cadono tutti nel quadrato $[-3, 3]^2$ e quindi di punti di massimo o di minimo interni ulteriori non ce ne sono. Studiamo ora i punti di frontiera:

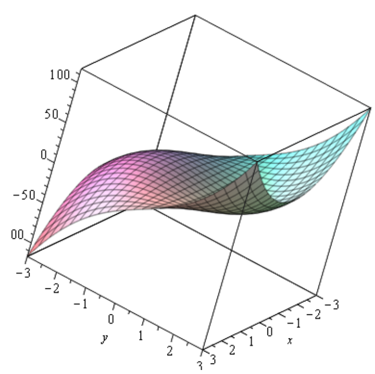
- $x = \pm 3,\ y = t,\ t \in [-3, 3]$ (f è pari rispetto ad x). In tal caso $g(t) = f(\pm 3, t) = 2y^3 + 21y$. Siccome $g'(t) = 6t^2 + 21 > 0$ sempre la funzione g ha un minimo per $t = -3$ ed un massimo per $t = 3$.
- $x = t,\ y = 3,\ t \in [-3, 3]$. In tal caso $h(t) = f(t, 3) = 9t^2 + 36$ che è una parabola e pertanto h ha un minimo per $t = 0$ e due massimi per $t = \pm 3$.
- $x = t,\ y = -3,\ t \in [-3, 3]$. In tal caso $l(t) = f(t, -3) = -h(t)$. (f è dispari rispetto ad y e quindi dove c'è un massimo per h c'è un minimo per l e viceversa).

Siccome f è continua nel compatto $K := [-3, 3]^2$, per il Teorema di Weierstrass f ammette massimi e minimi assoluti in K. I massimi sono in $(3, \pm 3), (-3, 0), (0, -1)$.
I minimi sono in $(-3, \pm 3), (3, 0), (0, 1)$.

$$\max\{f(3, \pm 3), f(-3, 0), f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)\} = 117 = f(3, \pm 3);$$
$$\min\{f(-3, \pm 3), f(3, 0), f(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)\} = -117 = f(-3, \pm 3).$$

Quindi i punti $(3, \pm 3)$ sono di minimo assoluto per f in K, $(-3, \pm 3)$ sono di massimo assoluto nello stesso insieme.

In grafico della funzione valutata nei punti $x^2 + y^2 \leq 9$ è riportato in figura:



2) Ricaviamo la $x(t)$ dalla prima equazione, la deriviamo e la sostituiamo nella seconda.

$$x(t) = y'(t) - y(t), \qquad x'(t) = y''(t) - y'(t)$$
$$y''(t) - y'(t) = y'(t) - y(t) - y(t) + 2t^2$$
$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 2t^2$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, completa. L'equazione caratteristica: $z^2 - 2z + 2 = 0$ ammette come soluzioni $z = 1 \pm i$. L'integrale generale della equazione omogenea è $y(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t$. Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa: $at^2 + bt + c$. Derivando due volte e sostituento nella equazione completa si ottiene $(t+1)^2$. L'integrale generale della equazione è

$$
\begin{aligned}
&y(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t + (t+1)^2, \qquad y(0) = 0, \quad c_1 = -1 \\
&x(t) = c_2 e^t \cos t + e^t \sin t - t^2 + 1, \qquad x(0) = 1, \quad c_2 = 0
\end{aligned}
$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$
\begin{cases}
x(t) = e^t \sin t - t^2 + 1 \\
y(t) = (t+1)^2 - e^t \cos t.
\end{cases}
$$

Matematica 2 (Chimica) - III esonero 07/06/2019 - Compito A

---

1) Calcolare $\displaystyle\iint_D (x-y)dxdy$ quando $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2},\, y \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$, sia per sostituzione che come integrale curvilineo.

2) Sia $\omega := \dfrac{2xy}{1+x^2}dx + (e^y + \log(1+x^2))dy$. Dire se la forma differenziale lineare è esatta e, se lo è, determinarne la classe delle primitive. Calcolare in almeno due modi

$$\int_\gamma \frac{2xy}{1+x^2}dx + (e^y + \log(1+x^2))dy$$

quando γ è data da: $\gamma := \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad 2 \ge t \ge 1.$

Cenni di soluzione

1) L'insieme D è un dominio regolare che si può scrivere in coordinate polari nella forma $D' := \{(r,t) \,:\, t \in [0,\pi/4],\, r \in [0,1]\}$. Se quindi operiamo una integrazione per sostituzione otteniamo

$$\begin{aligned}\iint_D (x-y)dxdy &= \int_0^{\pi/2} dt \int_0^1 r^2(\cos t - \sin t)dr = \left(\int_0^{\pi/2}(\cos t - \sin t)dt\right) \cdot \left(\int_0^1 r^2 dr\right) = \\ &= [\sin t + \cos t]_0^{\pi/4} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}-1}{3}.\end{aligned}$$

Per calcolare lo stesso integrale come integrale curvilineo dobbiamo usare le formule di Green:

$$\iint_D (x-y)dxdy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2} - xy\right)dxdy = \int_{+Fr(D)} \left(\frac{x^2}{2} - xy\right)dy.$$

Dobbiamo quindi descrivere $+Fr(D)$ che sarà data da

$$\begin{aligned}&+Fr(D) = +\mathcal{C}_1 \cup +\mathcal{C}_2 \cup +\mathcal{C}_3 \\ &+\mathcal{C}_1 := x(t) = t,\, y = 0, \qquad 0 \le t \le 1 \\ &+\mathcal{C}_2 := x(t)\cos t,\, y(t) = \sin t, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{4} \\ &+\mathcal{C}_3 := x(t) = t,\, y(t) = t, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \ge t \ge 0.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{+Fr(D)}\left(\frac{x^2}{2}-xy\right)dy &= \int_0^1 \frac{t^2}{2}\cdot 0\,dt+\int_0^{\pi/4}\left(\frac{(\cos^2 t)}{2}-\cos t\sin t\right)\cos t dt-\int_{\sqrt{2}/2}^0\frac{t^2}{2}dt = \\
&= \int_0^{\pi/4}\left(\frac{\cos^2 t}{2}-\cos t\sin t\right)\cos t dt+\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{t^2}{2}dt = \\
&= \int_0^{\pi/4}\left(\frac{\cos^3 t}{2}-\cos^2 t\sin t\right)dt+\left[\frac{t^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \\
&= \left[\frac{1}{6}\cdot(2+\cos^2 t)\sin t+\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/4}+\left[\frac{t^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}-1}{3}.
\end{aligned}$$

2) La forma differenziale lineare $\omega := \dfrac{2xy}{1+x^2}dx+(e^y+\log(1+x^2))dy$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, infatti le sue componenti sono rapporti di polinomi ed i denominatori non si annullano mai. Dimostriamone l'esattezza con la definizione:

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int\frac{2xy}{1+x^2}dx = y\log(1+x^2)+g(y), \qquad \text{con } g\in C^1(\mathbb{R}) \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= \log(1+x^2)+g'(y) = e^y+\log(1+x^2) \quad \Longleftrightarrow g'(y)=e^y \\
U(x,y) &= y\log(1+x^2)+e^y+c.
\end{aligned}$$

La curva γ congiunge i punti (2,4) (punto iniziale) e (1,1) (punto finale), pertanto

$$I := \int_\gamma \frac{2xy}{1+x^2}dx+(e^y+\log(1+x^2))dy = U(1,1)-U(2,4) = \log 2-4\log 5+e-e^4.$$

Calcoliamo ora l'integrale lungo la curva α individuata da:

$$\alpha :\to \{(t,4), 2\geq t\geq 1\}\cup\{(1,t), 4\geq t\geq 1\}$$

questo perché, essendo ω esatta, l'integrale non dipende dal percorso ma solo dagli estremi e dal verso di percorrenza. Nel primo tratto $dy=0$, mentre nel secondo tratto $dx=0$, quindi

$$\begin{aligned}
I &:= \int_\alpha \omega = \int_2^1\frac{8t}{1+t^2}dt+\int_4^1(e^t+\log 2)dt = -\int_1^2\frac{8t}{1+t^2}dt-\int_1^4(e^t+\log 2)dt = \\
&= -\left\{\left[4\log(1+t^2)\right]_1^2+\left[e^t+t\log 2\right]_1^4\right\} = -\left\{4(\log 5-\log 2)+e^4-e+4\log 2-\log 2\right\} = \\
&= \log 2-4\log 5+e-e^4
\end{aligned}$$