Analisi Matem. II (Civ.) - mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)
13 Giugno 2022

---

1) Sia $D := \{(x, y) \in (\mathbb{R})^2 : x, y \geq \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1,\ 1 \leq x+y \leq 5\}$. Disegnare l'insieme e parametrizzare la sua frontiera in modo che il verso di percorrenza risulti positivo. Facendo uso delle formule di Green, calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{+Fr(D)} \left[(\frac{1}{x}\log(1+xy)+x+3y)dx + (\frac{1}{y}\log(1+xy)+x+3y)dy \right]$$

Esprimere infine il risultato dell'integrale in termini fisici. **(8 punti)**

2) Assegnata la funzione f definita da $f(x, y) = \dfrac{1}{x+y}\arctan\sqrt{|x-1|}$ Studiarne la continuità e derivabilità parziale nei punti del dominio. Determinare, se esistono, i massimi ed i minimi relativi nel suo dominio ed il massimo ed il minimo assoluti nell'insieme $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. **(12 punti)**

---

cenni di svolgimento

1) L'insieme D è un dominio regolare (trapezio). La sua frontiera è individuata da:

$$\begin{aligned} +Fr(D) \quad := \quad & \{(t, \varepsilon),\ 1-\varepsilon \leq t \leq 5-\varepsilon\} \cup \{(t, 5-t),\ 5-\varepsilon \geq t \geq \varepsilon\} \\ & \cup\{(\varepsilon, t),\ 5-\varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon\} \cup \{(t, 1-t),\ \varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Le funzioni $X = (\dfrac{1}{x}\log(1+xy)+x+3y)$, $Y = (\frac{1}{y}\log(1+xy)+x+3y)$ sono sicuramente di classe C^1 in D in quanto $1+xy > 0$ in D e quindi in D il logaritmo è continuo e derivabile con derivate parziali continue e le funzioni $\dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{x}$ sono ben definite, continue e derivabili sempre in D. Per le formule di

Green risulta:

$$\int_{+Fr(D)} \left[(\frac{1}{x}\log(1+xy)+x+3y)dx + (\frac{1}{y}\log(1+xy)+x+3y)dy \right] =$$

$$\iint_D \left[-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{x}\log(1+xy)+x+3y) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{y}\log(1+xy)+x+3y) \right] dxdy =$$

$$\iint_D \left[-(\frac{1}{1+xy}+3) + (\frac{1}{1+xy}+1) \right] dxdy = -2\iint_D dxdy = -2(6\sqrt{2}-4\varepsilon)\sqrt{2}.$$

L'integrale curvilineo di seconda specie rappresenta il flusso del campo $\vec{F} = (Y, -X)$ uscente della frontiera di D. Siamo in presenza di un pozzo, visto che il flusso, calcolato attraverso il teorema della divergenza, è negativo.

2) $f : E := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, -x), x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$. È sicuramente continua in E perché prodotto e composizione di funzioni continue. Per quanto riguarda la derivabilità risulta:

$$f'_y(x,y) = -\frac{\arctan(\sqrt{|x-1|})}{(x+y)^2}.$$

Mentre per la derivata parziale rispetto ad x osserviamo che

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x+y}\arctan\sqrt{x-1} & x \geq 1, (x,y) \in E \\ \frac{1}{x+y}\arctan\sqrt{1-x} & x < 1, , (x,y) \in E. \end{cases}$$

Pertanto

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} -\frac{\arctan(\sqrt{x-1})}{(x+y)^2} + \frac{1}{2x(x+y)\sqrt{x-1}} & x > 1 \\ \\ -\frac{\arctan(\sqrt{1-x})}{(x+y)^2} - \frac{1}{2(2-x)(x+y)\sqrt{1-x}} & x < 1. \end{cases}$$

Se $(1, y) \in E$, $(y \neq -1)$ visto che c'è il cambio di legge, bisogna fare il limite del rapporto incrementale.

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(1+h,y)-f(1,y)}{h} &= \lim_{h\to 0^\pm} \frac{1}{1+h+y}\frac{\arctan\sqrt{|h|}}{h} = \\ &= \frac{1}{1+y}\lim_{h\to 0^\pm}\frac{\arctan\sqrt{|h|}}{h} = \frac{1}{1+y}\lim_{h\to 0^\pm}\frac{\sqrt{|h|}}{h} = \\ &= \begin{cases} +\infty \cdot \text{segno}(1+y) & h \to 0^+ \\ -\infty \cdot \text{segno}(1+y) & h \to 0^- \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $\nabla f : E \setminus \{(1, y), y \neq -1\} \to \mathbb{R}^2$.

Studiamo il segno della funzione:

$$f(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y \neq 0 \\ \arctan \sqrt{|x-1|} = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} y \neq -x \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f(x,y) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y > -x \\ x \neq 1 \end{cases} \qquad f(x,y) < 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y < -x \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Segue allora che i punti della retta $x = 1$ (che sono punti angolosi) sono di minimo relativo per f se $y > -1$, mentre sono di massimo relativo per f se $y < -1$.

Vediamo se ci sono altri punti interni e di derivabilità di massimo o minimo relativo. Osserviamo che

$$f'_y(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2} \text{ arctg } \sqrt{|x-1|} = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \text{ (già esaminati)}$$

quindi $\nabla f \neq (0,0) \in E \setminus \{(1,y), y \neq -1\}$ non ci sono altri punti da studiare.

Dallo studio precedente, possiamo dedurre che su T la f ammette minimo assoluto uguale a 0 nel punti $(1,t) : 0 \leq t \leq 1$.

Per quanto riguarda il massimo assoluto, osserviamo che l'insieme T non è compatto e quindi non possiamo applicare il teorema di Weierstrass. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} \text{ arctg } \sqrt{|x-1|} = +\infty.$$

Quindi f non è limitata superiormente. Segue che non esiste massimo assoluto su T.

Analisi Matem. II (Civ.) - mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)

27 Giugno 2022

---

1) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} = (x^2, xy, xz)$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ z = x^2 + y^2\},$$

quando la normale è orientata verso il basso.

2) Determinare massimi e minimi vincolati, se esistono, della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20 = 0\}.$$

Svolgimento

1) La superficie Σ è la porzione di paraboloide $z = x^2+y^2$ definita in $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$. Essa è regolare e il flusso del campo vettoriale $\vec{F}$ si calcola attraverso l'integrale superficiale $\int_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n} dS$. Siccome la normale è orientata verso il basso risulta $\vec{n} = (2x, 2y, -1)$. Pertanto, passando a coordinate polari,

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D (x^2, xy, xz) \cdot (2x, 2y, -1) dxdy = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^1 (r^2 \cos^2 t, r^2 \sin t \cos t, r^3 \cos t) \cdot (2r \cos t, 2r \sin t, -1) r dr = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^1 (2r^4 \cos^3 t + 2r^4 \sin^2 t \cos t - r^4 \cos t) dr = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \int_0^1 r^4 dt = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

2) La funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ poiché è un polinomio. Il vincolo $g(x,y) = 0$ è la circonferenza di centro $(1,2)$ e raggio $r = \sqrt{20}$, dunque è un compatto. Il teorema di Weierstrass ci dice allora che esistono massimi e minimi assoluti. Per determinarli utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange poiché anche la $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Poniamo allora $F(x,y,\alpha) = x^2 + y^2 + \alpha((x-1)^2 + (y-2)^2 - 20)$. Osserviamo innanzitutto che $\nabla g(x,y) = (2(x-1), 2(y-2)) \neq (0,0)$ per ogni $(x,y) \in M$ e quindi i punti di massimo e di minimo vincolato vanno cercati applicando il teorema di Fermat a F. Risulta

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2\alpha(x-1) = 0 \\ F'_y = 2y + 2\alpha(y-2) = 0 \\ F'_\alpha = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x(1+\alpha) = \alpha \\ y(1+\alpha) = 2\alpha \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20 = 0 \end{cases}$$

Non può risultare $\alpha = -1$, altrimenti le prime due equazioni sarebbero false. Per cui

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha}{1+\alpha} \\ y = \frac{2\alpha}{1+\alpha} \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{1+\alpha} \\ y = \frac{2\alpha}{1+\alpha} \\ (\frac{\alpha}{1+\alpha} - 1)^2 + (\frac{2\alpha}{1+\alpha} - 2)^2 - 20 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha}{1+\alpha} \\ y = \frac{2\alpha}{1+\alpha} \\ \frac{5}{(1+\alpha)^2} = 20 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{1+\alpha} \\ y = \frac{2\alpha}{1+\alpha} \\ 1 + \alpha = \pm\frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{2} \\ x = 3 \\ y = 6. \end{cases}$$

Risulta $f(-1,-2) = 5 < f(3,6) = 45$ pertanto $(-1,-2)$ è il punto di minimo vincolato e $(3,6)$ quello di massimo vincolato.

Analisi Matem. II (Civ.) - mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)

11 Luglio 2022

---

1) Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}$ definito da

$$\vec{F} = \left(\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{z^{3/4}} + \sqrt{x^2+y^2} \right).$$

Determinare la regione Ω per la quale $\vec{F} \in C^1(\Omega)$. Verificare che $\vec{F}$ è irrotazionale. Dire se $\vec{F}$ è conservativo in Ω. Se si, calcolarne la classe delle primitive.

2) Calcolare il volume della regione di spazio compresa tra le superfici di equazioni

$$z = 3 \quad \text{e} \quad x^2+y^2-2z+2 = 0\ .$$

Svolgimento

1) Risulta $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0),\ z > 0\}$. L'insieme è aperto e connesso, dunque è una regione di $\mathbb{R}^3$; tuttavia non è un semplicemente connesso perché ad Ω manca la semiretta $\{(0,0,z), z > 0\}$. Per provare che $\vec{F}$ è conservativo, avendo già osservato che esso è di classe C^1 in Ω, basta calcolarne il rotore

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{1}{z^{3/4}} + \sqrt{x^2+y^2} \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

in quanto

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{xyz}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Siccome $\vec{F}$ non è positivamente omogeneo di grado $\alpha \neq -1$ e la regione non è semplicemente connessa, non possiamo applicare le condizioni sufficienti studiate. Applichiamo direttamente la definizione. Se esiste $U \in C^2(\Omega)$ tale che $\nabla U = \vec{F}$, allora deve risultare

$$U(x,y,z) = \int \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}dx = z\sqrt{x^2+y^2} + f(y,z),\ f \in C^1(\{(y,z) : y \neq 0,\ z > 0\})$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} \Longleftrightarrow f(y,z) = g(z), g \in C^1(\mathbb{R}^+)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \sqrt{x^2+y^2} + g'(z) = \frac{1}{z^{3/4}} + \sqrt{x^2+y^2} \Longleftrightarrow g'(z) = \frac{1}{z^{3/4}}, g(z) = 4z^{1/4}$$

$$U(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2} + 4z^{1/4} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dunque $\vec{F}$ è conservativo.

2) Le superfici $z = 3$ e $x^2 + y^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = 1 + \dfrac{x^2+y^2}{2}$ sono rispettivamente un piano ed un paraboloide. I punti del piano xy corrispondenti all'intersezione delle due superfici sono dati da

$$\begin{cases} z = 3 \\ z = 1 + \dfrac{x^2+y^2}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4\ .$$

Possiamo quindi calcolare il volume come l'integrale doppio

$$V = \iint_D \left[3 - \left(1 + \frac{x^2+y^2}{2}\right)\right] dxdy = \iint_D \left(2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy$$

essendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Consideriamo le coordinate polari con polo nell'origine

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

il cui jacobiano è $j = \rho$, cosicché l'insieme D viene trasformato in

$$T = \{(\theta, \rho) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,\ 0 \leq \rho \leq 2\}\ .$$

Dalla formula del cambiamento di variabili per gli integrali doppi e dalle formule di riduzione otteniamo

$$V = \iint_T \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) \rho \, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(2\rho - \frac{\rho^3}{2}\right) d\rho = 2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{8}\right]_0^2 = 4\pi \, .$$

Analisi Matem. II (Civ.) - mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)

1 Settembre 2022

---

1) Sia $\mathcal{C}$ una corda parametrizzata da $x(t) = t\cos(2t), y(t) = -t\sin(2t)$ con $-1 \leq t \leq 1$. Calcolare la massa della corda sapendo che la sua densità $d(x, y)$ è $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. (punti 12)

2) Determinare massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = x^2 \log(1 + y) + x^2 y^2. \qquad \text{(punti 18)}$$

Svolgimento

1) Sia $\gamma(t) = (t\cos(2t), -t\sin(2t))$, con $-1 \leq t \leq 1$. Risulta $\gamma \in C^1([-1, 1])$ e

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \cos(2t) - 2t\sin(2t) \qquad y'(t) = -\sin(2t) - 2t\cos(2t) \\
s'(t) &= \sqrt{\cos^2 2t + 4t^2\sin^2 2t - 4t\sin(2t)\cos(2t) + \sin^2 2t + 4t^2\cos^2 2t + 4t\sin(2t)\cos(2t)} = \\
&= \sqrt{1 + 4t^2} > 0, \text{ per ogni } t \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

La sua massa pertanto sarà data da

$$\begin{aligned}
m &= \int_{-1}^{1} \sqrt{t^2\cos^2 2t + t^2\sin^2 2t} \cdot \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \\
&= 2\int_0^1 t\sqrt{1 + 4t^2}\, dt \qquad 1 + 4t^2 = w,\ 8t dt = dw,\ 1 \leq w \leq 5 \\
m &= \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{w}\, dw = \frac{1}{6}[w^{3/2}]_1^5 = \frac{1}{6}[5\sqrt{5} - 1].
\end{aligned}$$

2) Il dominio della funzione f è l'insieme $D := \{(x, y) : y > -1\}$. Risula $f \in C^2(D)$ e pertanto i punti di massimo e di minimo relativo devono soddisfare il teorema di Fermat.

$$\begin{cases} 2x[\log(1 + y) + y^2] = 0 \\ x^2\Big(\dfrac{1}{1 + y} + 2y\Big) = 0 \end{cases} \iff x = 0 \ \vee \ \begin{cases} \log(1 + y) + y^2 = 0 \\ \dfrac{1}{1 + y} + 2y = 0 \end{cases}$$

Poiché $\dfrac{1}{1+y} + 2y = 0$ se e solo se $2y^2 + 2y + 1 = 0$ (che non ammette soluzioni), i punti critici sono $(0, y), y > -1$. Scriviamo la matrice Hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2[\log(1+y)+y^2] & 2x\Big(\dfrac{1}{1+y}+2y\Big) \\ 2x\Big(\dfrac{1}{1+y}+2y\Big) & x^2\Big(-\dfrac{1}{(1+y)^2}+2\Big). \end{pmatrix}$$

Purtroppo risulta $detH(0, y) = 0$ per ogni $y > -1$. Procediamo allora direttamente a studiare la natura di questi punti. Innanzitutto $f(0, y) = 0$ per ogni $y > -1$. Risulta

$$f(x,y) - f(0,y) \;=\; x^2[\log(1+y)+y^2] \geq 0 \quad \iff \quad \log(1+y)+y^2 \geq 0.$$

Sia $g :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ definita da $g(y) = \log(1+y) + y^2$. Vale ovviamente $g(0) = 0, g(y) > 0$ se $y > 0$. Se invece $-1 < y < 0$ allora la sua derivata prima $\dfrac{2y^2+2y+1}{1+y}$ è positiva e quindi g in tale intervallo è crescente e pertanto $g(y) < 0$. Pertanto

- $(0, y)$ con $y > 0$ sono di minimo locale;
- $(0, 0)$ è un punto sella;
- $(0, y)$ con $-1 < y < 0$ sono di massimo locale.

Analisi Matem. II (Civ.) - mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)

15 Settembre 2022

---

1) Sia $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{4}\}$. Calcolare

$$\int_{Fr(E)} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds.$$

2) Verificare il teorem di Stokes per il campo vettoriale $\vec{F} = (x^3, y^3, 1)$ e la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$.

Svolgimento

1) L'insieme E si trova nel primo quadrante, è esterno alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ e al di sotto della parabola $y = 1 - \frac{x^2}{4}$. Pertanto la sua frontiera (percorsa in verso orario) è data da $Fr(E) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_2$ dove

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, 1 - \frac{t^2}{4}), \qquad 0 \leq t \leq 2; \\
\gamma_2(t) &= (t, 0), \qquad 2 \geq t \geq 1; \\
\gamma_3(t) &= (\cos t, \sin t), \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che $Fr(E)$ è una curva generalmente regolare e che l'integrale curvilineo di prima specie non dipende dal verso di percorrenza. Risulta pertanto

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(t) &= (1, -\frac{t}{2}), \qquad 0 \leq t \leq 2; \qquad ds = \frac{4+t^2}{2} dt; \\
\gamma_2'(t) &= (1, 0), \qquad 2 \geq t \geq 1; \qquad ds = dt \\
\gamma_3'(t) &= (-\sin t, \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \qquad ds = dt.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
I \quad &:= \quad \int_{Fr(E)} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds \\
&\int_{\gamma_1} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds = \int_0^2 \frac{t(1-t^2/4)}{\sqrt{4+t^2}} \cdot \frac{4+t^2}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t-\frac{t^3}{4}) dt = \frac{1}{2}; \\
&\int_{\gamma_2} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds = 0; \\
&\int_{\gamma_2} \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{4+\cos^2 t}} dt = [-\sqrt{4+\cos^2 t}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{5}-2; \\
I \quad &= \quad \sqrt{5} - \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

2) La superficie Σ è la porzione della superficie laterale del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, quando $|z| \leq 1$. Essa è sicuramente regolare, di classe C^2, orientabile e con bordo. Una rappresentazione parametrica della superficie è

$$r : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3 : x = \cos t, y = \sin t, z = z.$$

Se andiamo a considerate la frontiera di $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$ con il suo verso positivo di percorrenza assegnato, otteniamo le curve:

- $\gamma_1 = \{(\cos t, \sin t, -1), 0 \leq t \leq 2\pi\}$, (verso antiorario)
- $\gamma_2 = \{(\cos t, \sin t, 1), 2\pi \geq t \geq 0\}$ (verso orario) e
- $\gamma_3 = \{(1, 0, z), |z| \leq 1\}$ (presa una volta dal basso verso l'alto e un'altra volta dall'alto verso il basso).

Calcoliamo separatamente

$$\int_{\Sigma} rot(\vec{F}) dS, \qquad \int_{+\partial\Sigma} \vec{F} \cdot dr.$$

Poiché

$$rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 & y^3 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, 0),$$

risulta

$$\int_{\Sigma} rot(\vec{F}) dS = 0.$$

$$\begin{aligned}
\int_{+\partial\Sigma} \vec{F} \cdot dr = \int_{+\gamma_1} \vec{F} \cdot dr - \int_{+\gamma_2} \vec{F} \cdot dr = \\
= \quad \int_0^{2\pi} (\sin^3 t, \cos^3 t, -1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt + \\
- \quad \int_0^{2\pi} (\sin^3 t, \cos^3 t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = 0.
\end{aligned}$$

Pertanto la formula di Stokes è verificata.

Analisi Matem. II (Civ.) – mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)
9 Gennaio 2023

Gli Studenti di Meccanica devono risolvere gli esercizi 1,2,3. Gli Studenti di Civile devono risolvere l'esercizio 4 e altri due esercizi a scelta, tra i primi 3 esercizi.

Motivare tutte le risposte

1) Posto $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1\right\}$, utilizzando il cambiamento di variabili ($x = \rho\cos\theta,\ y = 2\rho\sin\theta$), calcolare l'integrale

$$I = \iint_E x\left(1 - x^2 - \frac{y^2}{4}\right) dxdy.$$

2) Stabilire la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = (y - x)(x^2 + y^2 - 1)$. Determinarne poi, nell'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, gli eventuali punti di estremo assoluto.

3) Dato il campo vettoriale $\vec{v}(x, y, z) = (ze^{xz}, 1 + z^2\cos y, xe^{xz} + 2z\sin y)$ si verifichi se ammette un potenziale e, nel caso affermativo, si determini l'espressione della classe dei potenziali.

4 - Civile) Risolvere **obbligatoriamente** il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 8\sin(3x) \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Cenni di svolgimento

1) L'insieme E è la parte dell'ellisse di centro l'origine e semiassi $a = 1, b = 2$ contenuta nel semipiano delle $x \geq 0$.

Ricordando il cambiamento di variabili che utilizza le coordinate ellittiche, si ha

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases} \quad ; \quad J = 2\rho$$

e l'insieme E viene trasformato nel rettangolo

$$R = \left\{ (\theta, \rho) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 1 \right\}.$$

Usando quindi la formula del cambiamento di variabili si ottiene

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \rho \cos\theta \left(1-\rho^2\right) 2\rho d\theta d\rho = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^1 \left(\rho^2-\rho^4\right) d\rho = \\ &= 2\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

2) La funzione è di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^2$, quindi gli eventuali punti di massimo e di minimo devono essere soluzione del sistema $\nabla f = (0,0)$. Determiniamo l'insieme dei punti critici:

$$\begin{cases} f_x(x,y) \equiv -(x^2+y^2-1) + 2x(y-x) = 0 \\ f_y(x,y) \equiv x^2+y^2-1+2y(y-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 = 2x(y-x) \\ x^2+y^2-1 = -2y(y-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 = 2x(y-x) \\ 2x(y-x) = -2y(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 = 2x(y-x) \\ x(y-x)+y(y-x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 = 2x(y-x) \\ (x+y)(y-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1 = 2x(y-x) \\ y = x \vee y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1 = 0 \\ y = x \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2-1 = -4x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \vee (x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

La matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+2y & -2y+2x \\ 2x-2y & 6y-2x \end{pmatrix},$$

per cui:

$$\det H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-8 \qquad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ è punto di sella;}$$

$$\det H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-8 \qquad \Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ è punto di sella;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det H_f\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=8 \\ f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{8}{\sqrt{6}}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ è punto di massimo relativo;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=8 \\ f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{8}{\sqrt{6}}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ è punto di minimo relativo.}$$

Dalle definizioni di f e K si vede subito che la funzione si annulla sulla frontiera di K ed è positiva al suo interno, per cui tutti i punti di $Fr\,K$ sono di minimo assoluto per $f|_K$.

Essendo f continua su K compatto, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette anche massimo assoluto su K e, per lo studio del segno, esso deve essere interno a K stesso. L'unico punto interno che soddisfa le condizioni necessarie per essere estremanti è $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, che quindi è il punto di massimo assoluto per $f|_K$.

3) Il campo vettoriale $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e quindi basta verificare che il suo rotore si annulli. Risulta infatti

$$\frac{\partial v_3}{\partial y}=2z\cos y=\frac{\partial v_2}{\partial z}; \qquad \frac{\partial v_1}{\partial z}=e^{xz}(1+x)=\frac{\partial v_3}{\partial x}; \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x}=0=\frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Per determinare la classe dei potenziali $U(x,y,z)$ deve risultare

$$\begin{aligned}
U(x,y,z) &= \int z e^{xz} dx = e^{xz} + f(y,z) \quad f \in C^1(\mathbb{R}^2) \\
\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) &= x e^{xz} + \frac{\partial f}{\partial z}(y,z) = x e^{xz} + 2z \sin y \\
&\Rightarrow f(y,z) = z^2 \sin y + g(y), \quad g \in C^1(\mathbb{R}) \\
U(x,y,z) &= e^{xz} + z^2 \sin y + g(y) \\
\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) &= z^2 \cos y + g'(y) = z^2 \cos y + 1 \\
&\Rightarrow g(y) = y + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
U(x,y,z) &= e^{xz} + z^2 \sin y + y + k.
\end{aligned}$$

4-Civile) L'integrale generale della equazione differenziale (del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, completa) è

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \frac{3}{5} \cos 3x + \frac{1}{5} \sin 3x.$$

La soluzione particolare del problema di Cauchy è

$$y^*(x) = e^{2x}(-\frac{3}{5} \cos 3x + \frac{1}{5} \sin 3x) + \frac{3}{5} \cos 3x + \frac{1}{5} \sin 3x.$$

Analisi Matem. II (Civ.) – mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)
23 Gennaio 2023

Gli Studenti di Meccanica devono risolvere gli esercizi 1,2,3. Gli Studenti di Civile devono risolvere l'esercizio 4 e altri due esercizi a scelta, tra i primi 3 esercizi.

Motivare tutte le risposte

1) Calcolare le derivate seconde miste in $(0,0)$ della funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

2) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$ quando la curva γ è parametrizzata da:

$[x(t),y(t)]=[2(\cos t+t\sin t),\ 2(\sin t-t\cos t)],\quad 0\le t\le 2\pi.$

3) E' conservativo il campo vettoriale H di componenti $H(x,y,z)=(z-y,y-z,(z-y)^2)$?

4 - Civile) Risolvere **obbligatoriamente** il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''-6y'+9y=3x+2 \\ y(0)=-1, \qquad y'(0)=2. \end{cases}$$

Cenni di svolgimento

1) Calcoliamo innanzitutto il gradiente di f. Se $(x,y)\neq(0,0)$ risulta

$$f'_x(x,y)=-\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f'_y(x,y)=-\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

mentre in $(0,0)$ risulta

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$

Per calcolare le derivate seconde miste nell'origine calcoliamo i limiti dei rapporti incrementali delle derivate parziali prime:

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} = 1,$$
$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} = -1.$$

2) La curva γ è una curva di classe $C^1([0,2\pi])$ e

$$y'(t) = (2t\cos t, 2t\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Risulta $ds = 2tdt$ e pertanto

$$\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}ds = 2\int_0^{2\pi} 2t\sqrt{1+t^2}dt = \frac{4}{3}\left[(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\left[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

3) Sia H il campo vettoriale di componenti $H(x,y,z) = (z-y, y-z, (z-y)^2)$, $H \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Poiché il campo vettoriale è di classe C^1 in un semplicemente connesso, il campo è conservativo se e solo se è irrotazionale. Calcoliamo allora il rotore di H.

$$\nabla H = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-y & y-z & (z-y)^2 \end{pmatrix} = (1-2z+2y, 1, 1).$$

Dunque H non è conservativo.

4) L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0$ che ha come soluzioni $\alpha = 3$ con molteplicità 2. L'integrale generale della equazione omogenea è $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$. Una soluzione della equazione completa avrà la forma $y(x) = ax + b$. L'integrale generale della equazione completa è

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{13}{9}e^{3x} + 6xe^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}.$$

Analisi Matem. II (Civ.) – mod. Analisi di Matem. 2 (Mecc.)
6 Febbraio 2023

Gli Studenti di Meccanica devono risolvere gli esercizi 1,2,3. Gli Studenti di Civile devono risolvere l'esercizio 4 e altri due esercizi a scelta, tra i primi 3 esercizi.

Motivare tutte le risposte

1) Esplicitare, se possibile, in un intorno del punto $(1,1)$ l'equazione

$$(x-1)\log(\sin y)+(y-1)\tan(x^2)=0,$$

nella forma $y=y(x)$ e calcolare $y'(1)$.

2) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y,z)=\arctan(y\sqrt[3]{xz})$ sulla curva γ determinata dalla intersezione delle superfici di equazione $x^2+y^2=1$ e $z=x^2$.

3) Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}, \qquad x\in\mathbb{R}$$

converge uniformemente ma non totalmente.

4 - Civile) Risolvere **obbligatoriamente** il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''-4y'+4y=e^{2x} \\ y(0)=1, \qquad y'(0)=2. \end{cases}$$

Cenni di svolgimento

1) Verifichiamo di poter applicare il teorema di Dini. Sia U in intorno di $(1,1)$ di raggio minore di 1/2 (in tal modo $(0,0)\notin\overline{U}$ e $x^2\neq\frac{\pi}{2}$).

Allora, posto $f(x,y)=(x-1)\log(\sin y)+(y-1)\tan(x^2)$, risulta $f\in C^1(U)$ e $f(1,1)=0$. Inoltre $f'_y(x,y)=(x-1)\dfrac{\cos y}{\sin y}+\tan(x^2)$ e $f'_y(1,1)=\tan(1)\neq 0$.

Allora il teorema di Dini assicura l'esistenza di un intorno I di $x = 1$, J di $y = 1$, ($I \times J \subset U$) e di una funzione $y : I \to J$ tale che $f(x, y(x)) = 0$ per ogni $x \in I$. Inoltre

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{f'_x(x, y(x))}{f'_y(x, y(x))} = -\frac{\log(\sin y) + (y-1)2x(1+\tan^2(x^2))}{(x-1)\frac{\cos y}{\sin y} + \tan(x^2)} \\ y'(1) &= -\frac{\log(\sin(1))}{\tan(1)}. \end{aligned}$$

2) La curva γ può essere parametrizzata nel seguente modo

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t & \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z(t) = \cos^2 t \end{cases}$$

Sia $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$g(t) = f(\cos t, \sin t, \cos^2 t) = \arctan(\cos t \sin t).$$

La funzione $g \in C^1([0, 2\pi])$ è definita in un compatto e per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti. Risulta

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\sin^2 t \cos^2 t + 1} \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t) \ge 0 \\ &\Longleftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi < t < \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_t g(t) = g(\frac{1}{4}\pi) = \arctan(\frac{1}{2}) \\ \min_t g(t) = g(\frac{3}{4}\pi) = -\arctan(\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

3) Sia $x = \sqrt{n}$. Risulta allora

$$\sup_x \frac{1}{n + x^2} \ge \frac{1}{2n}$$

e dunque la serie data non converge totalmente. Per provarne la convergenza uniforme si usa il criterio di Leibnitz, visto che la serie è a segni alterni. In particolare

$$\sup_x |R_n(x)| \le \sup_x \frac{1}{n + 1 + x^2} \le \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{uniformemente.}$$

4) L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ che ha come soluzioni $\alpha = 2$ con molteplicità 2. L'integrale generale della equazione omogenea è $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$. Una soluzione della equazione completa avrà la forma $y(x) = a x^2 e^{2x}$. L'integrale generale della equazione completa è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Analisi Matematica II (Civile)

30 Maggio 2023 - fuori corso e laureandi

Motivare tutte le risposte

1) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^x + 11e^{2x} \\ y(0) = \dfrac{3}{2}; \quad y'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2) Calcolare il volume del solido

$$E := \{(x, y, z) : \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2\}.$$

3) Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x, y) = (2x \log y, \dfrac{x^2}{y} + 2y \log y)$, stabilire se è conservativo nel suo dominio e determinarne un potenziale, se esiste. Cacolare il lavoro svolto dal campo $\vec{F}$ lungo la curva parametrizzata da $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{2t}$, $0 \leq t \leq 1$.

Cenni di svolgimento

1)

$y'' - 5y' + 6y = e^x + 11e^{2x}$ è una equazione differenziale lineare del secondo ordine completa. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$ che ammette come soluzioni $\alpha = 2$ e $\alpha = 3$. L'integrale generale della equazione omogenea associata è $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.
Cerchiamo ora una soluzione particolare di $y'' - 5y' + 6y = e^x$ della forma $y(x) = ae^x = y'(x) = y''(x)$. Sostituendo nella equazione differenziale otteniamo $a = \dfrac{1}{2}$.
Cerchiamo ora una soluzione particolare di $y'' - 5y' + 6y = +11e^{2x}$. Siccome $\alpha = 2$ è soluzione della equazione caratteristica la soluzione cercata sarà della forma $y(x) = bxe^{2x}$. Derivandola due volte e sostituendola nella

equazione differenziale si ottiene $b=-11$.

L'integrale generale della equazione completa è

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^x-11xe^{2x}.$$

Imponendo i dati iniziali si ottiene

$$\begin{cases} c_1+c_2+\dfrac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ 2c_1+3c_2+\dfrac{1}{2}-11=\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1=-8 \\ c_2=9 \end{cases}$$

2) Risulta

$$\begin{aligned} \text{vol}(E) &= \iint(2+x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}dt\int_0^1 r(2+r^2)dr= \\ &= 2\pi\left[r^2+\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{5}{2}\pi. \end{aligned}$$

3) Siano $\Omega=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, $F_1=2x\log y, F_2=\dfrac{x^2}{y}+2y\log y$. Risulta $\vec{F}\in C^1(\Omega)$. Inoltre $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2x}{y}=\dfrac{\partial F_2}{\partial x}$, per ogni $(x,y)\in\Omega$. Pertanto $\vec{F}$ è irrotazionale e, siccome Ω è semplicemente connesso, $\vec{F}$ è conservativo. Per determinarne un potenziale osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &= 2x\log y \\ U(x,y) &= \int 2x\log y dx=x^2\log y+f(y), \quad f\in C^1(\mathbb{R}^+) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{x^2}{y}+f'(y)=\frac{x^2}{y}+2y\log y \quad\iff \\ & f(y)=\int 2y\log y dy=y^2\log y-\frac{y^2}{2}+c, \quad c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$U(x,y)=x^2\log y+y^2\log y-\frac{y^2}{2}+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

La curva $\mathcal{C}$ congiunge i punti $(1,1)$ e (e,e^2) pertanto il lavoro compiuto dal campo $\vec{F}$ lungo la curva $\mathcal{C}$ è pari a

$$L_{\mathcal{C}}(\vec{F})=U(e,e^2)-U(1,1)=2e^2+2e^4-\frac{e^4}{2}-\frac{1}{2}.$$

---

1) Sia S la superficie ottenuta dalla rotazione di un angolo piatto attorno all'asse z della curva $z = 2 - x$, $x \in [2,4]$ e orientata in modo che la normale abbia terza componente positiva. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$F(x,y,z) = \left(x^2 y\,,\ xy^2,\ z\right).$$

Il flusso di F attraverso S è pari a

- ☐ 0 ☐ $-\dfrac{20}{3}\pi$ ☐ $\dfrac{\pi}{3}$ ☐ $\dfrac{\pi}{6}$ ☐ $\dfrac{\pi^2}{12}$

2) Data la superficie cartesiana S definita dalla funzione $f(x,y) = x^2 y - 4x - y^2$ trovare il versore ν normale ad essa nel punto $(1, 1, f(1,1))$.

- ☐ $\nu = \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$ ☐ $\nu = \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ☐ $\nu = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
  ☐ $\nu = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

3) Data la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 5y^2\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 10xy\right)dy.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(\cos(\pi t) + t^2, 1 + t^2\right)$$

- ☐ $-3-\sqrt{2}$ ☐ $-3+\sqrt{2}$ ☐ $-2-\sqrt{5}$ ☐ $-2+\sqrt{5}$

Svolgimento

1) Parametrizziamo la superficie S (la metà di un tronco di cono) :

$$\begin{cases} x = u\cos t \\ y = u\sin t \qquad (u,t) \in [2,4]\times[0,\pi]. \\ z = 2-u \end{cases}$$

Calcoliamo la sua normale

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t & \sin t & -1 \\ -u\sin t & u\cos t & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(u\cos t) + \vec{j}(u\sin t) + \vec{k}u.$$

$$\begin{aligned} F|_S &= (u^3\cos^2 t\sin t, u^3\cos t\sin^2 t, 2-u) \\ F|_S \bullet (L,M,N) &= (u^3\cos^2 t\sin t, u^3\cos t\sin^2 t, 2-u)\bullet(-u\cos t, u\sin t, u) = \\ &= u^4\cos t\sin t + 2u - u^2 \\ \int_S F\cdot(L,M,N)dudt &= \int_0^\pi dt \int_2^4 (u^4\cos t\sin t + 2u - u^2)du \\ &= \int_0^\pi dt\Big[\frac{u^5}{5}\sin t\cos t + u^2 - \frac{u^3}{3}\Big]_2^4 = \\ &= \Big[\frac{u^5}{5}\Big]_2^4 \cdot \int_0^\pi \sin t\cos t\,dt + \pi\cdot\Big[u^2 - \frac{u^3}{3}\Big]_2^4 = -\frac{20}{3}\pi. \end{aligned}$$

2) Risulta

$$\begin{aligned} n &= \big(-f'_x, -f'_y, 1\big) = \big(4-2xy, 2y-x^2, 1\big) \\ \text{se } (x,y) &= (1,1) \quad \Longrightarrow \quad n = (2,1,1), \quad \|n\| = \sqrt{6} \\ \nu &= \Big(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big) \end{aligned}$$

3)

$$\omega = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 5y^2\Big)dx + \Big(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 10xy\Big)dy.$$

Le componenti sono di classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 5y^2\Big) &= -\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2y + 10y \\ \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 10xy\Big) &= -\frac{y}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2x + 10y \end{aligned}$$

e dunque la ω è chiusa. Siccome non è definita in un semplicemente connesso, per provare la sua esattezza utilizziamo la CNES che utilizza le curve generalmente regolari chiuse con sostegno nel campo di esistenza. Grazie alle formule di Green e alla condizione sufficiente sulle componenti semplicemente connesse basta calcolare un integrale curvilineo su una singola curva chiusa che circonda l'origine (buco). Sia $\mathcal{C}$ definita da $(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \omega &= \int_0^{2\pi} \Big[\Big(\frac{\cos t}{1} + 5\sin^2 t\Big)(-\sin t) + \Big(\frac{\sin t}{1} + 10 \sin t \cos t\Big)(\cos t)\Big] dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[-\sin t \cos t - 5\sin^3 t + \sin t \cos t + 10 \sin t \cos^2 t\Big] dt = 0.
\end{aligned}$$

Dunque ω è esatta e una primitiva può essere determinata ad esempio a partire da $(1,0)$ nel semipiano delle x positive.

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2}} dt + \int_0^y \Big(\frac{t}{\sqrt{x^2+t^2}} + 10xt\Big) dt = \\
&= (x-1) + \sqrt{x^2+y^2} - x + 5xy^2 = \sqrt{x^2+y^2} + 5xy^2 - 1.
\end{aligned}$$

Osserviamo che il gradiente di U coincide con le componenti di ω su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Siccome la curva γ congiunge i punti $(1,1)$ e $(0,2)$ allora

$$\int_\gamma \omega = U(0,2) - U(1,1) = 1 - \sqrt{2} - 4 = -3 - \sqrt{2}.$$

Analisi Matematica II (Civile) **12 Giugno 2023**

Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica) **BES/DSA** ☐

---

1) Determinare, se esiste, il punto della curva $y = x^2 - 4x + \frac{7}{2}$ più vicino all'origine.

2) Sia $\vec{F}$ il campo di forze definito da $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2y, zx, -x)$. Determinare il lavoro compiuto dal campo di forze per spostare un punto materiale lungo la curva $\gamma(t) = (1+\cos t, \sin t, -2\sin^2 t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

3) Studiare la convergenza totale in $\mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{n^2+1}$$

e della serie delle sue derivate.

Cenni di svolgimento

1) Possiamo considerare come funzione da minimizzare la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + \frac{7}{2} - y := g(x,y) = 0\}$. Trasformiamo il problema della ricerca di un minimo vincolato in un problema di minimo assoluto per una funzione di una sola variabile sostituendo il vincolo nella f. Sia

$$F(x) = x^2 + \left(x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right)^2 = 24x^2 + x^4 - 8x^3 - 28x + \frac{49}{4}.$$

Risulta $F'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x - 28 = (x-1)(4x^2 - 20x + 28) \geq 0$ se e solo se $x \geq 1$. Dunque la funzione F è decrescente se $x \leq 1$ e poi diventa crescente. Il punto $(x = 1, y = \frac{1}{2})$ è il minimo assoluto cercato.

Se avessimo voluto determinarlo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange avremmo osservato che entrambe le funzioni sono continue con derivate parziali continue e $\nabla g \neq (0,0)$ poiché $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -1$.
Sia

$$L(x, y, a) = x^2 + y^2 + a(x^2 - 4x + \frac{7}{2} - y).$$

Risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + a(2x - 4) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - a = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial a} = x^2 - 4x + \dfrac{7}{2} - y = 0. \end{cases}$$

Ovviamente risulta $a \neq 0, a \neq -1$. Quindi

$$\begin{cases} x = \dfrac{2a}{a+1} \\ 2y = a \\ 2x^2 - 8x + 7 - 2y = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$2\left(\frac{2a}{a+1}\right)^2 - 8 \cdot \frac{2a}{a+1} + 7 - a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -a^3 - 3a^2 - 3a + 7 = (a-1) \cdot (-a^2 - 4a - 7) = 0$$

che ammette come unica soluzione $a = 1$. Dunque si ritrova come candidato il punto $(x = 1, y = \frac{1}{2})$. Resta da provare che questo è il minimo assoluto. Per farlo si può provedere come sopra.

2) Il campo di forze è di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ ed è definito in tutto lo spazio (semplicemente connesso). Dunque $\vec{F}$ è conservativo se e solo se è irrotazionale. Si prova facilmente che non è irrotazionale. Calcoliamo direttamente il lavoro compiuto da $\vec{F}$. La curva γ è regolare poiché è semplice, di classe $C^1([0, 2\pi])$ e

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, -4 \sin t \cos t) \neq (0,0,0) \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Per la regola della catena (composizione di funzioni di classe C^1)si ha

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) \bullet \gamma(t) &= F(1+\cos t, \sin t, -2\sin^2 t) \bullet (-\sin t, \cos t, -4\sin t \cos t) = \\ &= -2\sin^2 t - 4\sin^2 t \cos^2 t - 6\sin^2 t \cos t + 4\sin t \cos^2 t + 4\sin t \cos t. \end{aligned}$$

Dunque il lavoro fatto dal campo $\vec{F}$ è pari a

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F} \bullet dr &= \int_0^{2\pi} \Big(-2\sin^2 t - 4\sin^2 t \cos^2 t - 6\sin^2 t \cos t + 4\sin t \cos^2 t + 4\sin t \cos t \Big) dt = \\ &= \Big[(\sin t \cos t - t) - \frac{1}{4}(2t - \sin(2t)\cos(2t)) - 2\sin^3 t - \frac{4}{3}\cos^3 t + 2\sin^2 t \Big]_0^{2\pi} = -3\pi. \end{aligned}$$

3) Sia $f_n(x) = \dfrac{\sin(2nx)}{n^2+1}$. Risulta $f_n'(x) = \dfrac{2n}{n^2+1}\cos(2nx)$. Allora

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| &= \sup_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2nx)}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1} \\ \sup_{\mathbb{R}} |f_n'(x)| &= \sup_{\mathbb{R}} \frac{2n}{n^2+1}\cos(2nx) = \frac{2n}{n^2+1}. \end{aligned}$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty$$

per il criterio del confronto asintotico con la serie $\dfrac{1}{n^2}$, mentre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} = \infty$$

sempre per il criterio del confronto asintotico con la serie $\dfrac{1}{n}$. Pertanto la serie di partenza converge totalmente, mentre la serie delle sue derivate no.

Analisi Matematica II (Civile) **26 Giugno 2023**

Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)

Svolgere gli esercizi motivando tutte le risposte. Gli Studenti di Civile devono risolvere anche l'equazione differenziale.

1) Data la curva γ parametrizzata da $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, calcolare $\int_\gamma x\, ds$.

2) Data $f(x, y) = x\sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$, $\quad (x, y) \in E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$, calcolarne: il gradiente (ove esista); la derivata direzionale nel punto $(1/2, 1/4)$ nella direzione individuata dal vettore $\vec{w} = (3, 4)$. Inoltre, la funzione presenta punti di massimo e di minimo assoluti in E? Perché?

3) Sia Σ la superficie di rotazione ottenuta da una rotazione completa della curva $z = 1 + 3x^2$, $1 \leq x \leq 3$, attorno all'asse z. Scrivere una parametrizzazione di Σ. Dopo aver verificato che $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 13)$ appartiene alla superficie, determinare il versore normale e il piano tangente a Σ in P.

civile) Determinare le soluzioni del seguente problema di Cauchy:

$$y'' - 2y' + y = e^x \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Cenni di svolgimento

1) La curva ha equazione polare $\rho(t) = e^t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, per cui

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{[\rho(t)]^2 + [\rho'(t)]^2} = \sqrt{e^{2t} + e^{2t}} = \sqrt{2}\, e^t$$

e l'integrale diventa

$$\int_\gamma x\, ds \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t\, \sqrt{2}\, e^t\, dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t\, dt.$$

Ora, applicando due volte l'integrazione per parti, si ha

$$\begin{aligned}\int e^{2t}\cos t\,dt &= e^{2t}\sin t - \int 2\,e^{2t}\sin t\,dt = \\ &= e^{2t}\sin t - 2\left[-e^{2t}\cos t + \int 2e^{2t}\cos t\,dt\right] = \\ &= e^{2t}\sin t + 2e^{2t}\cos t - 4\int e^{2t}\cos t\,dt\end{aligned}$$

e dunque

$$\int e^{2t}\cos t\,dt = \frac{(\sin t + 2\cos t)\,e^{2t}}{5} + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Pertanto si ha

$$\int_\gamma x\,ds = \sqrt{2}\left[\frac{(\sin t + 2\cos t)\,e^{2t}}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\cdot\frac{e^{\pi}-2}{5}\ .$$

2) Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1-2x^2-4y^2}{\sqrt{1-x^2-4y^2}}, \frac{-4xy}{\sqrt{1-x^2-4y^2}}\right),$$

per $(x,y) \in E^o = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+4y^2 < 1\}$.

Posto $\vec{v} = \dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$, essendo $f \in C^1(E^o)$ possiamo applicare il teorema sulla formula del gradiente ed ottenere

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \nabla f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\cdot\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}, -1\right)\cdot\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Infine, la funzione è continua su E compatto, quindi per il teorema di Weierstrass ammette sia minimo che massimo assoluti.

3) La curva generatrice γ di equazione $z = 1+3x^2$, $1 \le x \le 3$ è regolare e si trova nel primo quadrante del piano (x,z). La superficie generata Σ ammette come parametrizzazione

$$r(t,u) = \begin{cases} x(t,u) = u\cos t \\ y(t,u) = u\sin t \qquad u \in [1,3], \quad t \in [0, 2\pi]. \\ z(t,u) = 1+3u^2 \end{cases}$$

$P = r(2, \frac{\pi}{4})$. Infatti da $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ possiamo assumere $t = \frac{\pi}{4}$ e da questo $u = 2$.

L'equazione cartesiana della Σ è $z = f(x, y) = 1 + 3(x^2 + y^2)$ pertanto il vettore normale n in P è $n := (-f'_x(\sqrt{2}, \sqrt{2}), -f'_y((\sqrt{2}, \sqrt{2}), 1) = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 1)$. la norma di tale vettore è $\sqrt{145}$ quindi il versore normale nel punto P alla Σ è $\frac{1}{\sqrt{145}}(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 1)$.

L'equazione del piano tangente alla Σ in P è

$$z = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) + f'_x(\sqrt{2}, \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + f'_y(\sqrt{2}, \sqrt{2})(y - \sqrt{2})$$
$$z = 13 + 6\sqrt{2}(x - \sqrt{2} + y - \sqrt{2}) = 6\sqrt{2}(x + y) - 11.$$

civile) L'integrale generale della equazione differenziale è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$$

La soluzione cercata si ottiene per $(c_1, c_2) = (0, 1)$.

Analisi Matematica II (Civile) **10 Luglio 2023**

Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)

L'ultimo esercizio è obbligatorio per gli Studenti dei CdS Civile e Ambientale

1) Dopo aver disegnato l'insieme $E \subset \mathbb{R}^3$ individuato da:

$$E := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [-2,0],\ x^2+y^2-(2-z)^2 \le 0,\ \Big\},$$

determinare il flusso del campo vettoriale $\vec{F} := \Big(x + ye^z, y - z + \sin x, z - \cos xy\Big)$ uscente dalla frontiera di E.

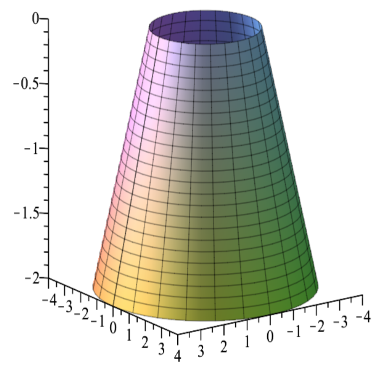
2) Sia $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$. Si determinino i punti $P = (x_0,y_0)$ del dominio e che appartengono alla bisettrice del primo e terzo quadratnte tali che $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = 1$ quando $v = (2^{-1/2}, 2^{-1/2})$.

3) Data la forma differenziale lineare $\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{x\ln y}\Big)dx + \Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \dfrac{\ln x}{y(\ln y)^2}\Big)dy$, determinarne il campo di esistenza, dire se è esatta. Se si, trovare la primitiva U tale che $U(x,x) \to 0$ se $x \to 0$.

civile) Sia $y(x)$ la soluzione di $y' - 2y = 8$ con $y(0) = 0$. Calcolare $\ln\Big(\dfrac{y(2)+4}{4}\Big)$.

Cenni di svolgimento

1) Individuiamo intanto l'insieme E. Se $z = -2$ allora $x^2+y^2 \le 16$; se $z = 0$ allora $x^2+y^2 \le 4$. Dalla disuguaglianza $x^2+y^2-(2-z)^2 \le 0$ si ottiene $-2 \le z \le 2 - \sqrt{x^2+y^2}$, pertanto l'insieme E è il tronco di cono generato da $z = 2-x$, $x \in [2,4]$ (dominio regolare di $\mathbb{R}^3$).



Allora per il Teorema della Divergenza (che si può applicare)

$$\int_{FrE} \vec{F} \bullet \vec{n}_e \, dS \quad = \quad \iiint_E div\vec{F} \; dxdydz = 3\,\mathrm{vol}(E).$$

Resta quindi da calcolare il volume di E come differenza dei volumi di due coni (nel primo $z \in [-2, 2]$, nel secondo $z \in [0, 2]$).

$$\mathrm{vol}(E) = \pi \cdot 4^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} - \pi \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{56}{3}\pi.$$

Il flusso del campo $\vec{F}$ uscente dalla frontiera di E è pari a 56π.

2) Sia $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 4\}$. Risulta $f \in C(E)$ e $\nabla f \in C(E°)$ con

$$\nabla f(x, y) = \Big(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\Big) \quad \forall \; (x, y) \in E°.$$

Poiché $f \in C^1(E°)$ e v è un versore, allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \nabla f(x, y) \bullet \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x + y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Se imponiamo $(x, x) \in E°$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x, x) = 1$ otteniamo $-\sqrt{2}x = \sqrt{4 - 2x^2}$ con $|x| < \sqrt{2}$. x deve essere quindi negativo e deve risolvere l'equazione $2x^2 = 4 - 2x^2$. L'unico punto che soddisfa l'equazione è $P = (-1, -1)$.

3) Deve risultare $A =]0,1[\times]0,1[$. Utilizziamo la definizione per studiare l'esattezza della forma differenziale lineare:

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{x\ln y}\Big)dx = \arcsin x + \frac{\ln x}{\ln y} + g(y), \qquad g \in C^1(]0,1[) \\
\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\ln x}{y(\ln y)^2} + g'(y) = Y(x,y) \quad\Longleftrightarrow\quad g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad\Longleftrightarrow \\
& \quad g(y) = \arcsin y + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
U(x,y) &= \arcsin x + \arcsin y + \frac{\ln x}{\ln y} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Allora $U(x,x) = 2\arcsin x + 1 + c$, quindi $U(x,x) \to 0$ per $x \to 0$, se $c = -1$.

La primitiva cercata è

$$\boldsymbol{U(x,y) = \arcsin x + \arcsin y + \frac{\ln x}{\ln y} - 1}.$$

civile) L'integrale generale della equazione è $y(x) = ce^{2x} - 4$ imponendo il dato iniziale $c = 4$. La soluzione cercata è $y(x) = 4e^{2x} - 4$ e quindi

$$\ln\Big(\frac{y(2)+4}{4}\Big) = \ln e^4 = 4.$$

Analisi Matematica II (Civile) **5 Settembre 2023**

Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)

L'ultimo esercizio è obbligatorio per gli Studenti dei CdS Civile e Ambientale

1) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ soggetti al vincolo $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$.

2) Dire se il campo di forze associato alla forma differenziale lineare $\omega = [1 + \cos(x+y)]\,dx + \cos(x+y)\,dy$ è conservativo o meno. Calcolare il lavoro fatto dal campo di forze per spostare un punto materiale lungo la traiettoria individuata da $\gamma = (\cos^{50} t, \sin^{50} t)$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

3) Calcolare

$$\iiint_T z e^{x^2+y^2}\, dxdydz$$

quando $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le z \le 1\right\}$.

civile) Determinare le soluzioni del seguente problema di Cauchy:

$$y'(x) = (x + y(x))^2, \qquad y(0) = 0.$$

Cenni di svolgimento

1) Sia la funzione f che il vincolo g sono funzione in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Inoltre $\nabla g(x,y) = (4x^3, 4y^3)$ che si annulla solo nell'origine (che non appartiene al vincolo). Se utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x = 4ax^3 \\ 2y = 4ay^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

La prima equazione è soddisfatta se $x=0$ oppure $x^2 = \dfrac{1}{2a},\ a>0$. Se $x=0$ allora $y = \pm 1$. Analogamente per la seconda equazione se $y=0$ allora $x=\pm 1$ altrimenti $y^2 = \dfrac{1}{2a},\ a>0$. Se poniamo $x^2 = \dfrac{1}{2a},\ y^2 = \dfrac{1}{2a}$ nella terza equazione si ottiene $\dfrac{1}{2a^2} = 1$ e quindi si ottengono 4 punti: $(\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}})$. Per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti ($g(x,y)=0$ è un compatto). Risulta

$$
\begin{aligned}
& f(0,\pm 1) = f(\pm 1, 0) = 1 \quad \text{minimi assoluti;} \\
& f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}) = \sqrt{2} \quad \text{massimi assoluti.}
\end{aligned}
$$

2) La forma differenziale lineare ω è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e quindi ω è esatta se e solo se è chiusa. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}[1+\cos(x+y)] = -\sin(x+y) = \frac{\partial}{\partial x}\cos(x+y).$$

Calcoliamo allora la classe delle primitive

$$
\begin{aligned}
U(x,y) &= \int [1+\cos(x+y)]dx = x + \sin(x+y) + f(y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}) \\
\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= \cos(x+y) + f'(y) = \cos(x+y) \quad \Longleftrightarrow f(y) = c \\
U(x,y) &= x + \sin(x+y) + c \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Allora il campo di forze è conservativo e il lavoro è dato da:

$$L = \int_\gamma \omega = U(0,1) - U(1,0) = \sin 1 - 1 - \sin 1 = -1$$

3) Scriviamo l'insieme T in coordinate cilindriche: $(x = r\cos t, y = r\sin t, z)$

$$T \to \{(r,t,z) : z \in [0,1],\ t \in [0,2\pi],\ 0 \le r \le \sqrt{z}\}.$$

Risulta allora

$$
\begin{aligned}
\iiint_T z e^{x^2+y^2} dxdydz &= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 zdz \int_0^{\sqrt{z}} r e^{r^2} dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 z(e^z - 1)dz = \\
&= \pi\Big[ze^z - e^z - \frac{z^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

civile) Poniamo $v(x) = x + y(x)$. Risulta $y'(x) = v'(x) - 1$. L'equazione differenziale diventa

$$v'(x) = v^2(x) + 1 \qquad \text{equazione del primo ordine a variabili separabili}$$

$$\int \frac{dv}{v^2+1} = \int dx = x + c$$

$$\arctan v(x) = x + c, \qquad x + y(x) = \tan(x+c), \qquad y(x) = \tan(x+c) - x$$

$$0 = \tan(c), \quad c = 0, \quad \boldsymbol{y(x) = \tan(x) - x}, \quad \boldsymbol{x} \in]-\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}, \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}[.$$

19 Settembre 2023

Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)

---

1) Calcolare il volume del solido $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2 + y^2 \leq z \leq 8-4x\}$.

2) Scrivere la superficie di rotazione ottenuta per rotazione intorno all'asse x della generatrice $z = e^{2x},\ x \in [0, 3]$. Dire se la superficie è regolare.

3) Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k.$$

Cenni di svolgimento

1) Scriviamo $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ (x-2)^2 + y^2 \leq z \leq 8-4x\}$. Per determinare D risolviamo la disequazione

$$(x-2)^2 + y^2 \leq 8-4x \iff (x-2)^2 + 4(x-2) + 4 + y^2 - 4 \leq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 4 := D.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \text{vol}\,(T) &= \iint_{x^2+y^2\leq 4} dxdy \int_{(x-2)^2+y^2}^{8-4z} dz = \iint_{x^2+y^2\leq 4} (4 - x^2 - y^2)\, dxdy = \\ &= \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 r(4-r^2) dr = 8\pi. \end{aligned}$$

2) La superficie S ha una rappresentazione parametrica $r : D \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{cases} x = x \\ y = e^{2x} \sin t \\ z = e^{2x} \cos t \end{cases} \qquad D := \{(x, t) : x \in [0, 3],\ t \in [0, 2\pi]\}.$$

Risulta: $r \in C^1(D)$, la superficie è semplice perché se $r(x_1, t_1) = r(x_2, t_2)$ allora necessariamente $x_1 = x_2 = x$. Allora $r(x, t_1) = r(x, t_2)$ ci fornisce $\sin t_1 = \sin t_2$ e $\cos t_1 = \cos t_2$ e questo accade solo se $t_1 = t_2$. Calcoliamo ora la matrice delle derivate parziali

$$\begin{pmatrix} 1 & 2e^{2x}\sin t & 2e^{2x}\cos t \\ 0 & e^{2x}\cos t & -e^{2x}\sin t \end{pmatrix}.$$

Risulta allora $L = -2e^{4x} \neq 0$, quindi la superficie è regolare.

3) Se applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti otteniamo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)!)^2}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k)!}{(2k+2)!} \cdot |x| = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{|x|}{4} < 1$$

se e solo se $|x| < 4$, quindi il raggio di convergenza della serie è $r = 4$.

8 Gennaio 2024

Analisi Matematica II (Civile) Analisi Matematica II (Elettronica e Informatica) Modulo Analisi-Matematica II (Meccanica)

---

1) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = x + y$ nell'insieme $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 2(2 - xy)\}$.

2) Studiare il comportamento (convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale) della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+1}$.

3) Data la lamina piana $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq y \leq 2x\}$ di densità unitaria, determinarne la massa e il baricentro.

4) Determinare l'integrale generale della equazione differenziale $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 2(1 - t + \sin t)$. Tra tutte le soluzioni determinare quelle per cui $\lim_{t\to 0} x(t) = \frac{4}{45}$.

Cenni di svolgimento

1) Proviamo che l'insieme A è un compatto. Innanzitutto

$$x^2 + 2y^2 \leq 2(2 - xy) \iff x^2 + 2y^2 + 2xy \leq 4 \iff 0 \leq (x+y)^2 + y^2 \leq 4$$
$$\implies y^2 \leq 4 \quad (|y| \leq 2) \quad \& \quad (x+y)^2 \leq 4 \implies (|y| \leq 2) \quad \& \quad |x+y| \leq 2.$$

Quindi l'insieme A è limitato perché è contenuto nel parallelogramma individuato da

$$A \subset \{(x,y) : -2 \leq x + y \leq 2,\ |y| \leq 2\}.$$

Inoltre A è chiuso perché $A = g^{-1}([0,4])$ quando $g(x,y) = (x+y)^2 + y^2$. La funzione $f \in C^1(A)$ poiché è un polinomio e il suo gradiente non si annulla mai, pertanto i punti di massimo e di minimo assoluti, che esistono per

Weierstrass, devono trovarsi sulla frontiera di A. Per determinarli basta osservare che gli insiemi di livello della funzione f assumono in A valori da -2 a 2. Quindi se sostituiamo in A al posto di $x+y$ il valore ± 2 otteniamo $y=0$. Pertanto il minimo assoluto sarà $(-2,0)$ mentre il massimo assoluto sarà $(2,0)$.

2) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$\frac{|\sin(nx)|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} := L_n$$

La serie pertanto converge totalmente in $\mathbb{R}$ e dunque anche uniformemente, assolutamente e puntualmente.

3) Per calcolare l'integrale $m(E) = \iint_E dxdy$ passiamo alle coordinate ellittiche ponendo $x(t) = r\cos t,\ y(t) = 2r\sin t$. La lamina piana E risulta immagine del rettangolo $R := \{(r,t) :\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq t \leq \pi/4\}$. Poiché il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è pari a $2r$ otteniamo

$$m(E) = \iint_R 2rdrdt = \int_0^{\pi/4} dt \int_0^1 2rdr = \frac{\pi}{4}.$$

Utilizzando sempre le coordinate ellittiche per il calcolo degli integrali, otteniamo che le coordinate del baricentro sono

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m(E)}\iint_E xdxdy = \frac{4}{\pi}\iint_R 2r^2\cos tdrdt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 2r^2\cos tdrdt = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \\ y_G &= \frac{1}{m(E)}\iint_E ydxdy = \frac{4}{\pi}\iint_R 4r^2\sin tdrdt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 4r^2\sin tdrdt = \frac{4(4-2\sqrt{2})}{3\pi}. \end{aligned}$$

4) L'equazione differenziale data è lineare del secondo ordine completa

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = -2t + 2 + 2\sin t.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea $z^2 - 2z - 3 = 0$ ha come soluzioni $z = 3, z = -1$ e dunque l'integrale generale della omogenea è dato da

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare di $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = -2t + 2 \quad \to \quad x_1(t) = \frac{2}{3}t - \frac{10}{9}$.

Determiniamo una soluzione particolare di di $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 2\sin t \quad \to \quad x_2(t) = \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t$. Pertanto risulta

$$x(x) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{2}{3}t - \frac{10}{9} + \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t.$$

Per le soluzioni che soddisfano il limite dato deve risultare $c_1 + c_2 = 1$.

22 Gennaio 2024

Analisi Matematica II (Civile) Analisi Matematica II (Elettronica e Informatica) Modulo Analisi-Matematica II (Meccanica)

Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

1) Scrivere in coordinate sferiche la superficie $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$ e determinarne il bordo.(**Suggerimento**: per rappresentare la superficie utilizzare latitudine e longitudine: $x(\varphi, \theta) = r\cos\varphi\cos\theta$, $y(\varphi, \theta) = r\cos\varphi\sin\theta$, $z(\varphi, \theta) = r\sin\varphi$, $r \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.)

2) Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $F(x, y, z) = \Big(5x^2 - 1 + \cos(e^{xz} - 1), 5y^2 - \log(1 + \arctan^2(xz)), 2y - \sin(xz)\Big)$ attraverso la superficie Σ orientata in modo che la normale sia concorde con l'asse positivo delle z.

3) Sviluppare in serie di soli seni la funzione $f(x) = x(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$ e determinare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

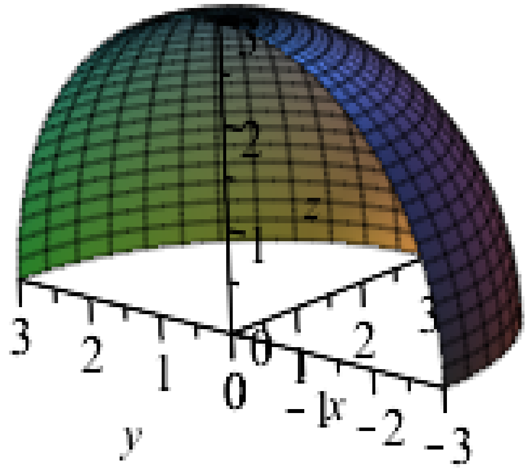
4) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = 4x^2 - 2xy + 6y^2 - 8x + 2y + 3$ nel rettangolo $Q = [0, 2] \times [-1, 1]$.

Cenni di svolgimento

1) La superficie Σ è una porzione di sfera (orientabile). Indicando con φ la latitudine e con θ la longitudine, una sua rappresentazione parametrica è data da $w : [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ con

$$w(\varphi, \theta) = \begin{cases} x(\varphi, \theta) = 3\cos\varphi\cos\theta \\ y(\varphi, \theta) = 3\cos\varphi\sin\theta \\ z(\varphi, \theta) = 3\sin\varphi. \end{cases}$$

($w \in C^2([0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ e regolare).



Determiniamo ora il suo bordo. Posto $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, risulta $Fr(D) = \{(0, \theta),\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} \cup \{(\varphi, \frac{\pi}{2}),\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}]\} \cup \{(\frac{\pi}{2}, \theta),\ \frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}\} \cup \{(\varphi, -\frac{\pi}{2}),\ \frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq 0\}$.

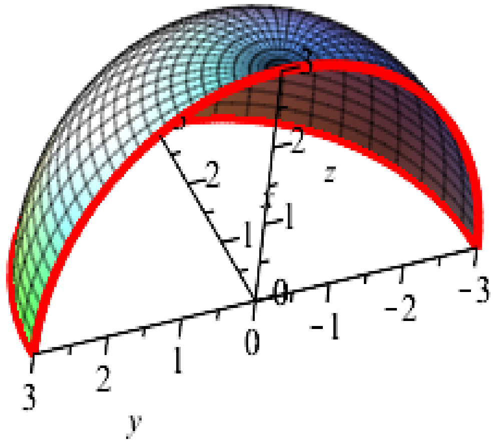
Determiniamo ora $w(Fr(D))$. Si ha:

1. $w(0, \theta) = (3\cos\theta, 3\sin\theta, 0)$ quando $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$;
2. $w(\varphi, \frac{\pi}{2}) = (0, 3\cos\varphi, 3\sin\varphi)$ quando $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;
3. $w(\frac{\pi}{2}, \theta) = (0, 0, 3)$ quando $\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}$;
4. $w(\varphi, -\frac{\pi}{2}) = (0, -3\cos\varphi, 3\sin\varphi)$ quando $\frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq 0$.

Ne deduciamo che il bordo $\partial\Sigma$ è dato da

$$
\begin{aligned}
\partial\Sigma = C_1 \cup C_2 \quad &= \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9,\ x \geq 0,\ z = 0\} \cup \\
& \quad\quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 9,\ x = 0,\ z \geq 0\},
\end{aligned}
$$

Dove la curva C_2 è ottenuta tramite 2. e 4. In particolare la C_2 è la semicirconferenza che si trova nel piano $x = 0$ e congiunge i punti $(0, 3, 0); (0, 0, 3); (0, -3, 0)$.



La superficie Σ è dunque con bordo.

2) Risulta $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$, allora per calcolare il flusso applichiamo il teorema di Stokes. Riscriviamo il bordo della superficie in questo modo: $r_1(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0)$ con $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ (una rappresentazione parametrica di C_1; $r_1'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 0)$) e $r_2(t) = (0, 3\cos t, 3\sin t)$ con $0 \le t \le \pi$ (una rappresentazione parametrica di C_2; $r_2'(t) = (0, -3\sin t, 3\cos t)$). In questo modo il bordo della superficie è percorso in modo che l'osservatore che lo percorre (e ha la testa rivolta verso l'alto) lascia la superficie alla propria sinistra.

$$\int_\Sigma \mathrm{rot} F dS \quad = \quad \int_{\partial\Sigma} F dr = \int_{C_1} F dr + \int_{C_2} F dr.$$

Risulta

$$\begin{aligned} F(r_1(t)) \cdot r_1'(t) &= \left(45\cos^2 t, 45\sin^2 t, 6\sin t\right) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0) = -135\sin t\cos^2 t + 135\cos \\ F(r_2(t)) \cdot r_2'(t) &= \left(0, 45\cos^2 t, 6\cos t\right) \cdot (0, -3\sin t, 3\cos t) = -135\sin t\cos^2 t + 18\cos^2 t. \end{aligned}$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} F dr &= 135\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\big(-\sin t\cos^2 t+\cos t\sin^2 t\big)dt=\frac{135}{3}\Big[\cos^3 t+\sin^3 t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=90;\\
\int_{C_2} F dr &= \int_0^{\pi}(-135\sin t\cos^2 t+18\cos^2 t)dt=\Big[45\cos^3 t+9t+9\sin t\cos t\Big]_0^{\pi}=9\pi-90;\\
\int_{\Sigma}\mathrm{rot}F dS &= 9\pi.
\end{aligned}
$$

3) Sia $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ la funzione dispari che coincide con f in $[0,\pi]$. Assumiamo che g sia 2π-periodica e calcoliamo i suoi coefficienti di Eulero Fourier (g è continua e derivabile con derivata limitata con $g(\pi)=0=g(-\pi)$).

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0 \qquad n=0,1,2,\dots,\\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\pi}\pi x\sin nx dx-\int_0^{\pi}x^2\sin nx dx\Big)=\\
&= 2\int_0^{\pi}x\Big(-\frac{\cos nx}{n}\Big)'dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\Big(\frac{\cos nx}{n}\Big)'dx=\\
&= 2\Big[-x\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx+\frac{2}{\pi}\Big[x^2\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi}-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x\frac{\cos nx}{n}dx=\\
&= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n+\frac{2}{n}\Big[\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi}+\frac{2\pi}{n}(-1)^n-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\Big(\frac{\sin nx}{n}\Big)'dx=-\frac{4}{n\pi}\Big[x\frac{\sin nx}{n}\Big]_0^{\pi}+\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx=\\
&= \frac{4}{\pi n^3}\cdot\Big[1-(-1)^n\Big]=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{8}{\pi(2k+1)^3} & n=2k+1\end{cases}\qquad n=1,2,\dots
\end{aligned}
$$

Dunque la serie di Fourier di g convergerà uniformemente a

$$x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\big((2k+1)x\big),\qquad 0\le x\le\pi.$$

In particolare se $x=\frac{\pi}{2}$ allora $\sin\big((2k+1)\frac{\pi}{2}\big)=(-1)^k$ e dunque

$$\frac{\pi^2}{4}=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}(-1)^k;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

4) La funzione $f(x,y) = 4x^2 - 2xy + 6y^2 - 8x + 2y + 3$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Determiniamo innanzitutto gli eventuali punti di massimo e di minimo relativi in $Q°$. In tali punti si dovrà annullare il gradiente $\nabla f(x,y) = \big(8x - 2y - 8, -2x + 12y + 2\big) = (0,0)$ se e solo se $(x,y) = (1,0)$. Risulta $H(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$ e dunque sia il determinante della matrice che $f''_{xx}(1,0)$ sono positivi. Pertanto il punto $(1,0)$ è di minimo relativo ($f(1,0) = -1$). Cerchiamo ora i punti di massimo/minimo assoluti, che devono esistere per il teorema di Weierstrass, sulla frontiera di Q. Risulta

- $f(x,-1) = g(x) = 4x^2 - 6x + 7$ con $g : [0,2] \to \mathbb{R}$. $g'(x) = 8x - 6 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{4}$, pertanto lungo questa restrizione avremo un minimo in $x = \frac{3}{4}$ e due punti di massimo per $x = 0, x = 2$. ($g(0) = 7$, $g(\frac{3}{4}) = \frac{19}{4}$, $g(2) = 11$).

- $f(2,y) = h(y) = 6y^2 - 2y + 3$ con $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$. $h'(y) = 12y - 2 \geq 0 \iff y \geq \frac{1}{6}$, pertanto lungo questa restrizione avremo un minimo in $x = \frac{1}{6}$ e due punti di massimo per $x = \pm 1$. ($h(-1) = 11$, $h(\frac{1}{6}) = \frac{17}{6}$, $h(1) = 7$).

- $f(x,1) = l(x) = 4x^2 - 10x + 11$ con $l : [0,2] \to \mathbb{R}$. $l'(x) = 8x - 10 \geq 0 \iff x \geq \frac{5}{4}$, pertanto lungo questa restrizione avremo un minimo in $x = \frac{5}{4}$ e due punti di massimo per $x = 0, x = 2$. ($l(0) = 11$, $l(\frac{5}{4}) = \frac{19}{4}$, $l(2) = 7$).

- $f(0,y) = m(y) = 6y^2 + 2y + 3$ con $m : [-1,1] \to \mathbb{R}$. $m'(y) = 12y + 2 \geq 0 \iff y \geq -\frac{1}{6}$, pertanto lungo questa restrizione avremo un minimo in $x = -\frac{1}{6}$ e due punti di massimo per $x = \pm 1$. ($m(-1) = 7$, $m(-\frac{1}{6}) = \frac{17}{6}$, $m(1) = 11$).

I punti di massimo assoluto saranno pertanto i punti $(0,1), (2,-1)$, mentre il punto di minimo assoluto sarà $(1,0)$.

5 Febbraio 2024

Analisi Matematica II (Civile) Analisi Matematica II (Elettronica e Informatica) Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)

1) Calcolare il flusso del vettore $\vec{F} = (x + \sqrt{y^2z+2}, y - \sqrt{xz+3}, z)$ uscente dal cilindro $\mathbf{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1,\ z \in [-1,1]\}$. Calcolare anche il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro.

2) Verificare che l'equazione $(x+1)y^2 + \sin(xy) + 3(e^x - 1) = 0$ individua in un intorno di $(0,0)$ una funzione di una sola variabile. Studiare il comportamento di tale funzione in un intorno di 0.

3) Data la forma differenziale lineare $\omega = \Big((x+1)e^{x-2y^2} - xy\Big)dx + \Big(3y^2 - 4xye^{x-2y^2} + x\Big)dy$, calcolare $\int_\gamma \omega$ quando γ è il tratto lineare che congiunge il punto $(1,0)$ con il punto $(-1,0)$ e la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1 che da $(-1,0)$ torna in $(1,0)$.

Cenni di svolgimento

1) Risulta $\vec{F} \in C^1(\mathbf{H})$, e $\mathbf{H}$ è un dominio regolare (rispetto al piano $z=0$) di $\mathbb{R}^3$. Per calcolare il flusso allora è sufficiente applicare il teorema della divergenza. $\mathrm{div}\vec{F} = 3$ e dunque

$$\int_{Fr(\mathbf{H})} \vec{F} \cdot n_e \, dS \quad = \quad \iiint_{\mathbb{H}} 3 \, dxdydz = 3\mathrm{vol}\,(\mathbf{H}) = 6\pi.$$

Per calcolare il flusso uscente dalla superficie laterale basta sottrarre a 6π il flusso uscente dalla base inferiore e dalla base superiore. $B_{(k)} := \{(x,y,k) \in \mathbb{R}^3,\ \ x^2+y^2 \le 1\},\ k = \pm 1$. La normale uscente dalle basi sarà data da $(0,0,k)$, sempre per $k = \pm 1$. Pertanto

$$\int_{B_k} \vec{F} \cdot n_e \, dS \quad = \quad \iint_{B_k} dxdy = \mathrm{area}(B_k) = \pi, \quad k = \pm 1.$$

Il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro sarà pari a 4π.

2) Sia $f(x,y) = (x+1)y^2 + \sin(xy) + 3(e^x - 1)$. Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $(0,0) \in Z_f$. Inoltre $\nabla f(x,y) = \big(y^2 + y\cos(xy) + 3e^x, 2(x+1)y + x\cos(xy)\big)$ e $\nabla f(0,0) = \big(3,0\big)$. Per il teorema di Dini allora esiste un intorno U di $y = 0$ ed una funzione $x = x(y)$ tale che $f(x(y),y) = 0$ per ogni $y \in U$. Inoltre

$$x'(y) = -\frac{f'_y(x(y),y)}{f'_x(x(y),y)} = -\frac{2(x(y)+1)y + x(y)\cos(x(y)\cdot y)}{y^2 + y\cos(x(y)\cdot y) + 3e^{x(y)}}.$$

Pertanto $x'(0) = 0$ ($y = 0$ è un punto critico per $x = x(y)$) e $f''_{yy}(x,y) = 2(x+1) - x^2\sin(xy)$. Allora

$$\begin{aligned}
x''(y) &= -\frac{1}{[f'_x(x(y),y)]^2}\cdot\Big\{\big[f''_{yx}(x(y),y)\cdot x'(y) + f''_{yy}(x(y),y)\big]\cdot f'_x(x(y),y) + \\
&- f'_y(x(y),y)\cdot\big[f''_{xx}(x(y),y)\cdot x'(y) + f''_{xy}(x(y),y)\big]\Big\} = \\
&= -\frac{f''_{yy}(x(y),y)}{f'_x(x(y),y)} \\
x''(0) &= -\frac{2}{3} \qquad y = 0 \quad \text{punto di massimo per } x(y).
\end{aligned}$$

3) La curva γ è chiusa, generalmente regolare e può essere parametrizzata da

$$r_1(t) = (t,0), \quad 1 \geq t \geq -1; \qquad r_2(t) = (\cos t, \sin t), \quad \pi \geq t \geq 0.$$

$\omega \in C^1(\mathbb{R}^2)$, non ci sono buchi e dunque ω è esatta se e solo se ω è chiusa. Risulta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial y} &= -4y(x+1)e^{x-2y^2} - x \\
\frac{\partial Y}{\partial x} &= -4y(x+1)e^{x-2y^2} + 1.
\end{aligned}$$

La ω dunque non è esatta non essendo chiusa. Possiamo però scrivere

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \Big\{(x+1)e^{x-2y^2}dx + \Big(3y^2 - 4xye^{x-2y^2}\Big)dy\Big\} + \Big\{-xydx + xdy\Big\}.$$

Per quanto visto prima la ω_1 è esatta, dunque $\int_\gamma \omega_1 = 0$. Resta solo da calcolare

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_\gamma (-xydx + xdy).$$

Indichiamo con γ_1 la curva individuata da $r_1(t) = (t, 0)$, $1 \geq t \geq -1$ e con γ_2 quella individuata da $r_2(t) = (\cos t, \sin t)$, $\pi \geq t \geq 0$. Banalmente $\int_{\gamma_1}(-xydx + xdy) = 0$, mentre

$$\int_{\gamma_2}(-xydx + xdy) \quad = \quad \int_{\pi}^{0}(\cos t \sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \Big[\frac{\sin^3 t}{3}\Big]_{\pi}^{0} + \int_{\pi}^{0}\cos^2 t\,dt = -\frac{\pi}{2}.$$

3 Aprile 2024

Analisi Matematica II (Civile)   Analisi Matematica II (Elettronica e Informatica)   Modulo Analisi - Matematica II (Meccanica)

---

1) Sia ω la forma differenziale lineare $\omega = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx + \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy$. Dire se è esatta e in tal caso calcolare la classe delle sue primitive. Sia γ la curva che ammette la rappresentazione parametrica $(t, \cos t)$, $0 \le t \le \pi/2$; determinare $\int_\gamma \omega$.

2) Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione $f(x, y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$.

3) Calcolare la superficie laterale del paraboloide $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$ compreso tra i piani $z = 0$ e $z = 2$.

4) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + (\cos x)y = e^{-\sin x} \\ y(\pi) = \pi \end{cases}$$

Cenni di svolgimento

1) $X, Y \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\})$ e $X'_y = \dfrac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} = Y'_x$. Dunque la ω è chiusa. Siccome $X(kx, ky) = k^{-2}X(x, y)$ per ogni $k > 0$ e lo stesso vale per Y allora ω è esatta e la classe delle primitive U è data da

$$U(x, y) = -\Big(x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + y\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) + c = -\frac{x}{(x^2+y^2)} + c.$$

Allora

$$\int_\gamma \omega = U(\pi/2, 0) - U(0, 1) = -\frac{2}{\pi}.$$

2) Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, pertanto i punti di massimo e di minimo vanno cercati tra i punti stazionari.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} \dfrac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ \dfrac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x^2+y^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$
$$\iff (\pm 1, 0)$$

Osserviamo che $f(1,0) = \dfrac{1}{2} = -f(-1,0)$. ($f$ è pari rispetto alla variabile y e dispari rispetto alla x). Risulta

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-2x(3+3y^2-x^2)}{(1+x^2+y^2)^3} & \dfrac{-2y(1-3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3} \\ \dfrac{-2y(1-3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3} & \dfrac{-2x(1+x^2-3y^2)}{(1+x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad H(-1,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Pertanto il punto $(1,0)$ risulta di massimo relativo, $(-1,0)$ di minimo relativo. Infine, per determinare i punti di massimo e di minimo assoluti basta osservare che

$$-\frac{1}{2} \le \frac{x}{1+x^2+y^2} \le \frac{1}{2} \iff -1 \le \frac{2x}{1+x^2+y^2} \le 1$$
$$\begin{cases} 2x \ge -1-x^2-y^2 \\ 2x \le 1+x^2+y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} (1+x)^2+y^2 \ge 0 \\ (1-x)^2+y^2 \ge 0 \end{cases}$$

e queste due disequazioni sono verificate in $\mathbb{R}^2$, dunque i punti di massimo e di minimo relativo sono anche assoluti.

3) Il paraboloide è rappresentato in forma normale $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$ ed è definito nell'insieme dei punti del piano tali che $x^2+y^2 \le 4$. Denotiamo con $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\}$. L'insieme A in coordinate polari si può esprimere come $[0,2] \times [0,2\pi]$.

La superficie S del paraboloide è data da

$$\begin{aligned} S &= \iint_A \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^2 r\sqrt{1+r^2}\,dr \int_0^{2\pi} dt = \pi \int_0^2 2r\sqrt{1+r^2}\,dr = \\ &= \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \Big[(1+r^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{2\pi}{3}\Big(5\sqrt{5}-1\Big) \end{aligned}$$

4) L'equazione differenziale $y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}$ è del primo ordine con $\alpha(x) = -\cos x$ e $\beta(x) = e^{-\sin x}$. Risulta $\int -\cos x dx = -\sin x$ e dunque l'integrale generale della equazione differenziale è dato da

$$y(x) = e^{-\sin x}\left\{\int e^{-\sin x} e^{\sin x} dx + c\right\} = e^{-\sin x}(x+c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo il dato iniziale si ottiene $y(x) = xe^{-\sin x}$.

10 Giugno 2024 - Analisi Matematica II

Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

1) Calcolare $\int_0^{\infty}(1+2x)e^{-x}dx$ dopo aver provato che la funzione è integrabile.

2) Determinare convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)(-3)^{2+n}}(4x-12)^n.$$

3) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto per la funzione $f(x,y,z)=xyz$ soggetta ai vincoli $x+9y^2+z^2=4$ e $x\geq 0$.

4) Calcolare direttamente e facendo uso delle formule di Green $\int_C(xy^2+x^2)dx+(4x-1)dy$ quando la curva C è data dai lati del triangolo di vertici $(-3,0)\to(0,0)\to(0,3)\to(-3,0)$.

5) Un punto materiale di massa (m = 1 grammo) è attaccato ad una molla di costante elastica $k=100$ grammi/s^2. Sia $my''(t)+ky(t)=-mg$ (g è l'accelerazione di gravità) l'equazione differenziale che descrive il moto oscillatorio. Determinare l'equazione oraria $y(t)$ del punto materiale, sapendo che nell'istante iniziale $y(0)=2$ cm, $y'(0)=50$ cm/s.

Cenni di svolgimento

1) La funzione $f(x)=(1+2x)e^{-x}$ è continua in $[0,+\infty[$ e dunque integrabile alla Riemann in ogni intervallo $[0,t]$ con $t>0$, inoltre è un infinitesimo per $x\to\infty$ di ordine superiore a 2, dunque la funzione è integrabile (non basta che sia un infinitesimo, deve essere un infinitesimo "veloce")

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}(1+2x)e^{-x}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t(1+2x)e^{-x}dx\\
\int_0^t(1+2x)e^{-x}dx &= \int_0^t(1+2x)(-e^{-x})'dx = \big[-e^{-x}(1+2x)\big]_0^t + 2\int_0^t e^{-x}dx\\
&= -e^{-t}(1+2t)+1+2[-e^{-x}]_0^t = 3-3e^{-t}-2te^{-t}\\
\int_0^{\infty}(1+2x)e^{-x}dx &= \lim_{t\to\infty} 3-3e^{-t}-2te^{-t} = 3.
\end{aligned}$$

2)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)(-3)^{2+n}}(4x-12)^n$$

è una serie di potenze, applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti per determinare il raggio di convergenza.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|4x-12|^{n+1}}{((n+1)^2+1)(3)^{3+n}}\cdot\frac{(n^2+1)(3)^{2+n}}{|4x-12|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n^2}{1+(n+1)^2}\cdot\frac{|4x-12|}{3} = \frac{4|x-3|}{3}$$

Dovendo risultare $\frac{4|x-3|}{3} < 1$, il raggio sarà $r = \frac{3}{4}$ e l'insieme di convergenza assoluta è al momento $]\frac{9}{4}, \frac{15}{4}[$.

Se $x = \frac{9}{4}$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9(n^2+1)}$ che converge per il criterio del confronto asintotico (si confronta con $\frac{1}{n^2}$).

Se $x = \frac{15}{4}$ la serie diventa a segni alterni $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{9(n^2+1)}$ e converge per il criterio di Leibnitz (ma anche assolutamente). Dunque la serie converge puntualmente e assolutamente in $[\frac{9}{4}, \frac{15}{4}]$. Per Abel converge anche uniformemente in tale insieme. Resta da studiare la convergenza totale. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\sup|f_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9(n^2+1)}$ e dunque la serie converge totalmente in $[\frac{9}{4}, \frac{15}{4}]$.

3) La funzione $f(x,y,z) = xyz$ è soggetta ai vincoli $x = 4-9y^2-z^2$ e $x \geq 0$. Se non imponessimo la condizione $x \geq 0$ il vincolo non sarebbe limitato e dunque non potrebbe essere un compatto. Se invece imponiamo la condizione $x \geq 0$

allora il vincolo è contenuto nel parallelepipedo $[0,4] \times [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] \times [-2,2]$, pertanto è un insieme limitato. Denotiamo con $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-4 = 9y^2+z^2,\ 0 \leq x \leq 4\}$, posto $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $h(x,y,z) = x - 9y^2 - z^2$, risulta h continua e, per il teorema di continuità globale, $h^{-1}(\{4\}) = B$ e dunque B è chiuso. Dunque il vincolo, che è una porzione di paraboloide ellittico, è un compatto. Siccome la funzione f è continua per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti.

Osserviamo poi che se $0 < x < 4$ è fissato, allora $9y^2 + z^2 = 4 - x$ è una ellisse (di semiassi $\frac{\sqrt{4-x}}{3}, \sqrt{4-x}$) e quindi $f(x,y,z) = xyz$ assume sia valori positivi che negativi.

Scriviamo il vincolo nella forma $g(x,y,z) = x - 4 + 9y^2 + z^2 = 0$, ricordando che $0 \leq x \leq 4$. Se vogliamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dobbiamo studiare preventivamente $g(x,y,z) = 0$ & $\nabla g(x,y,z) = (0,0,0)$. Risulta $\nabla g(x,y,z) = (1, 18y, 2z) \neq (0,0,0)$ e dunque non ci sono ultieriori punti da studiare.

Sia $F(x,y,z,a) = xyz - a(x - 4 + 9y^2 + z^2)$. Applichiamo il teorema di Fermat a F.

$$\begin{cases} yz - a = 0 \\ xz - 18ay = 0 \\ xy - 2az = 0 \\ x - 4 + 9y^2 + z^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} yz = a \\ xz = 18ay \\ xy = 2az \\ x - 4 + 9y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che $a = 0$ allora, dalla prima equazione si ottiene $yz = 0$ e dunque

$$\begin{cases} a = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \text{ oppure } z = 0 \\ z = \pm 2 \text{ oppure } x = 4 \end{cases} \cup \begin{cases} a = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \text{ oppure } y = 0 \\ y = \pm\frac{2}{3} \text{ oppure } x = 4. \end{cases}$$

Possiamo eliminare direttamente i punti $(4,0,0), (0,0,\pm 2), (0, \pm\frac{2}{3}, 0)$ perché in tali punti la funzione f si annulla e, per quando detto prima, i punti di massimo e di minimo assoluti non possono trovarsi tra di essi. Si trovano gli stessi punti se si parte da $xz = 0$ oppure $xy = 0$.

Supponiamo allora $a \neq 0$. In tal caso, dalle prime tre equazioni risulterà $x, y, z \neq 0$ e quindi ricaviamo z dalla prima equazione e lo sostituiamo nella seconda:

$$z = \frac{a}{y}, \qquad x \cdot \frac{a}{y} = 18ay, \quad x = 18y^2;$$

nella terza equazione sostituiamo al posto di $a = yz$,

$$a = yz, \quad xy = 2yz^2, \quad z^2 = \frac{x}{2} = 9y^2.$$

Sostituiamo x, z nella equazione del vincolo ed otteniamo

$$18y^2 - 4 + 9y^2 + 9y^2 = 0, \quad 36y^2 = 4, \quad y = \pm\frac{1}{3}.$$

Dunque $x = 18y^2 = 2, \quad z^2 = 9y^2, \quad z = \pm 1$. Risulta

$$f(2, +\frac{1}{3}, +1) = f(2, -\frac{1}{3}, -1) = +\frac{2}{3},$$
$$f(2, -\frac{1}{3}, +1) = f(2, +\frac{1}{3}, -1) = -\frac{2}{3}.$$

Per il teorema di Weierstrass i primi due punti sono di massimo assoluto (vincolato) per f gli altri due di minimo assoluto (vincolato).

4) L'insieme $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq x + 3\}$ ha come frontiera, percorsa nel verso positivo, la curva C che può essere parametrizzata nel seguente modo:

$$\{(t, 0), -3 \leq t \leq 0\} \cup \{(0, t), 0 \leq t \leq 3\} \cup \{(-3t, 3 - 3t), 0 \leq t \leq 1\}.$$

$C_1 : \{(t, 0), -3 \leq t \leq 0\}, dx = dt, dy = 0,$ $C_2 : \{(0, t), 0 \leq t \leq 3\}$, $dx = 0, dy = dt$, $C_3 : \{(-3t, 3 - 3t), 0 \leq t \leq 1\}$, $dx = -3dt, dy = -3dt$.

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1}(xy^2+x^2)dx+(4x-1)dy &= \int_{-3}^{0} t^2dt=\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_{-3}^{0}=9\\
\int_{C_2}(xy^2+x^2)dx+(4x-1)dy &= -\int_{0}^{3} dt=-3\\
\int_{C_3}(xy^2+x^2)dx+(4x-1)dy &= \int_{0}^{1}[(-3t)(3-3t)^2+(-3t)^2](-3)dt+\\
&+ [4(-3t)-1](-3)dt=\\
&= \int_{0}^{1}(81t^3-189t^2+81t+36t+3)dt=\\
&= \int_{0}^{1}(81t^3-189t^2+117t+3)dt=\\
&= \Big[\frac{81}{4}t^4-63t^3+\frac{117}{2}t^2+3t\Big]_0^1=\frac{75}{4}\\
\int_{C}(xy^2+x^2)dx+(4x-1)dy &= \frac{99}{4}.
\end{aligned}
$$

L'insieme E è regolare rispetto all'asse delle x, le funzioni integrande sono di classe C^1, dunque

$$
\begin{aligned}
\int_{C}(xy^2+x^2)dx+(4x-1)dy &= \iint_E\Big[-\frac{\partial}{\partial y}(xy^2+x^2)+\frac{\partial}{\partial x}(4x-1)\Big]dxdy\\
&= \iint_D(-2xy+4)dxdy=\int_{-3}^{0}dx\int_{0}^{x+3}(4-2xy)dy=\\
&= \int_{-3}^{0}\Big[4y-xy^2\Big]_{y=0}^{y=3+x}dx=\int_{-3}^{0}(12-5x-6x^2-x^3)dx=\\
&= \Big[12x-\frac{5}{2}x^2-2x^3-\frac{1}{4}x^4\Big]_{x=-3}^{x=0}=\frac{99}{4}.
\end{aligned}
$$

5) Dobbiamo risolvere il seguente problema di Cauchy ($g=981\text{cm}/s^2$).

$$
\begin{cases}
y''+100y=-981\\
y(0)=2,\\
y'(0)=50,
\end{cases}
$$

Risolviamo innanzitutto l'equazione $y''+100y=-g$. L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $\alpha^2+100=0$ che ammette come soluzioni $\alpha = \pm 10i$. Pertanto l'integrale generale della equazione omogenea è dato da:

$$y(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \sin(10t).$$

Una soluzione particolare della equazione completa si ottiene da $100y = -981$, $y = -9,81$. Pertanto l'integrale generale della equazione completa è

$$y(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \sin(10t) - 9,81; \quad y'(t) = -10c_1 \sin(10t) + 10c_2 \cos(10t).$$

Se imponiamo i dati iniziali otteniamo

$$\begin{cases} y(0) = c_1 - 9,81 = 2 \\ y'(0) = 10c_2 = 50 \end{cases} \iff (c_1 = 11,81; \quad c_2 = 5.)$$

L'equazione oraria del punto materiale attaccato alla molla e soggetto alla forza peso è

$$y(t) = 11,81 \cos(10t) + 5 \sin(10t) - 9.81.$$

24 Giugno 2024 - Analisi Matematica II

Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

1) Calcolare $\iiint_E 4xy\,dxdydz$ quando E è la regione limitata dalle superfici: $z = 2x^2 + 2y^2 - 7$ e $z = 1$.

2) Dire se il campo di forze $\vec{F} = \frac{2xy}{z^3}\vec{\imath} + \left(2y - z^2 + \frac{x^2}{z^3}\right)\vec{\jmath} - \left(4z^3 + 2yz + \frac{3x^2y}{z^4}\right)\vec{k}$ è conservativo e, in caso positivo, calcolarne i potenziali.

3) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x,y) = (9x^2-1)(1+4y)$ nel rettangolo $[-2,3] \times [-1,4]$.

4) Calcolare l'area della superficie di rotazione generata dalla curva di equazioni parametriche $x(t) = 3 + 2t$, $y(t) = 9 - 3t$, $1 \le t \le 4$, ruotata intorno all'asse delle y. Disegnare la superficie.

5) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $y' = 2x\cos^2 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$ e determinarne il suo campo di esistenza.

Cenni di svolgimento

1) L'insieme E è delimitato dal paraboloide $z = 2x^2 + 2y^2 - 7$ e dal piano $z = 1$. Risulta $2x^2 + 2y^2 - 7 \le z \le 1$ e dunque $2x^2 + 2y^2 \le 8$. Pertanto $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4,\ 2x^2 + 2y^2 - 7 \le z \le 1\}$. In coordinate cilindriche $E = \{(r,t,z) :\ r \in [0,2],\ t \in [0,2\pi],\ 2r^2 - 7 \le z \le 1\}$.

$$\begin{aligned}\iiint_E 4xy\,dxdydz &= 2\int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} 2\cos t \sin t dt \int_{2r^2-7}^1 dz = \\ &= 2\int_0^2 r^3(8-2r^2)dr \int_0^{2\pi} \sin(2t)dt = 0.\end{aligned}$$

2) Siano $X = \frac{2xy}{z^3}, \quad Y = \left(2y - z^2 + \frac{x^2}{z^3}\right), \quad Z = -\left(4z^3 + 2yz + \frac{3x^2y}{z^4}\right)$ le componenti di $\vec{F}$. Supponiamo che siano definite in $A := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ (se invece $z < 0$ si procede in modo analogo). Risulta $X, Y, Z \in C^1(A)$, A è un convesso, dunque $\vec{F}$ è conservativo se e solo se è irrotazionale. Calcoliamo il rotore di $\vec{F}$.

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{2xy}{z^3} & \Big(2y - z^2 + \dfrac{x^2}{z^3}\Big) & \Big(-4z^3 - 2yz - \dfrac{3x^2y}{z^4}\Big) \end{vmatrix} = \\
&= \vec{i}\Big[\frac{\partial}{\partial y}\Big(-4z^3 - 2yz - \frac{3x^2y}{z^4}\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(2y - z^2 + \frac{x^2}{z^3}\Big)\Big] + \\
&+ \vec{j}\Big[\frac{\partial}{\partial z}\frac{2xy}{z^3} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(-4z^3 - 2yz - \frac{3x^2y}{z^4}\Big)\Big] + \\
&+ \vec{k}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(2y - z^2 + \frac{x^2}{z^3}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{2xy}{z^3}\Big] = \\
&= \vec{i}(-2z - \frac{3x^2}{z^4} + 2z + \frac{3x^2}{z^4}) + \vec{j}(-\frac{6xy}{z^4} + \frac{6xy}{z^4}) + \vec{k}(\frac{2x}{z^3} - \frac{2x}{z^3}) = (0,0,0).
\end{aligned}
$$

Calcoliamo allora la classe delle primitive a partire dal punto $(0,0,1)$.

$$
\begin{aligned}
U(x,y,z) &= \int_0^x X(t,0,1)dt + \int_0^y Y(x,t,1)dt + \int_1^z Z(x,y,t)dt + c = \\
&= \int_0^y \Big(2t - 1 + x^2\Big)dt - \int_1^z \Big(4t^3 + 2yt + \frac{3x^2y}{t^4}\Big)dt + c = \\
&= \Big[t^2 - t + x^2 t\Big]_{t=0}^{t=y} - \Big[t^4 + yt^2 - \frac{x^2y}{t^3}\Big]_{t=1}^{t=z} + c = \\
&= y^2 - y + x^2y - z^4 - yz^2 + \frac{x^2y}{z^3} + 1 + y - x^2y + c = \\
&= y^2 - z^4 - yz^2 + \frac{x^2y}{z^3} + d, \quad d \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

3) Il rettangolo $R := [-2,3] \times [-1,4]$ è un compatto, la funzione f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Per determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo interni applichiamo il teorema di Fermat.

$$
\begin{cases} (x,y) \in R^\circ \\ 18x(1+4y) = 0 \\ 4(9x^2 - 1) = 0 \end{cases}
$$

$x \neq 0$ altrimenti non si annulla f'_y, dunque $y = -\frac{1}{4}, x = \pm\frac{1}{3}$. Risulta $f(\pm\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) =$ 0 e

$$H(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 18(1+4y) & 72x \\ 72x & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(\pm\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 24 \\ \pm 24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H(\pm\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) = -576 < 0,$$

quindi i punti sono sella. I punti di max min assoluti devono allora trovarsi sulla frontiera. Le equazioni parametriche della frontiera e le ristrizioni di f a tali punti sono:

Top: $x \in [-2,3]$, $y = 4 \quad f(x,4) = 17(9x^2 - 1) = h_1(x)$;

Bottom: $x \in [-2,3]$, $y = -1 \quad f(x,-1) = -3(9x^2 - 1) = h_2(x)$;

Right: $x = 3$, $y \in [-1,4]$, $\quad f(3,y) = 80(1+4y) = g_1(y)$;

Left: $x = -2$, $y \in [-1,4]$, $\quad f(-2,y) = 35(1+4y) = g_2(y)$.

h_1 è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto. Il suo punto di minimo è raggiunto nel vertice $x = 0$, gli estremi $x = -2, x = 3$ sono di massimo relativo.
h_2 è una parabola con la concavità rivolta verso il basso. Il suo punto di massimo è raggiunto nel vertice $x = 0$, gli estremi $x = -2, x = 3$ sono di minimo relativo.
g_1, g_2 sono delle rette a coefficiente angolare positivo, dunque il punto di minimo si trova per $y = -1$, quello di massimo per $y = 4$. Riepilogando i candidati sono:

candidati max: $(-2,4), (3,4), (0,-1)$;

candidati min: $(0,4), (-2,-1), (3,-1)$.

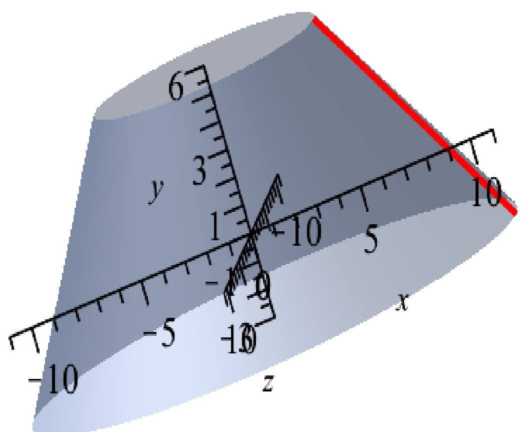
Risulta

$$f(-2,4) = 595, \qquad f(3,4) = 1360, \qquad f(0,-1) = 3$$
$$f(0,4) = -17, \qquad f(-2,-1) = -105, \qquad f(3,-1) = -240.$$

Quindi $(3,-1)$ è il punto di minimo assoluto, $(3,4)$ quello di massimo assoluto.

4) La curva C di equazioni parametriche $x(t)=3+2t,\ y(t)=9-3t,\ 1\leq t\leq 4$, è regolare e $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{13}\,dt$. Per il teorema di Pappo

$$A(S) \;=\; 2\pi\int_C x\,ds = 2\pi\sqrt{13}\int_1^4(3+2t)dt = 2\pi\sqrt{13}\Big[3t+t^2\Big]_1^4 = 48\pi\sqrt{13}.$$



5) L'equazione differenziale del primo ordine $y'=2x\cos^2 y$ è a variabili separabili. Supponiamo $\cos^2 y\neq 0$ e quindi che $f(x,y)=2x\cos^2 y$ sia definita in $\mathbb{R}\times\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

$$\frac{dy}{dx} \;=\; 2x\cos^2 y,\quad \frac{dy}{\cos^2 y}=2x\,dx,\quad \int\frac{dy}{\cos^2 y}=\int 2x\,dx$$

$$\tan y = x^2+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Se imponiamo il dato iniziale otteniamo $c=1$. Nell'intervallo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ la funzione $\tan y$ è invertibile e dunque $y(x)=\arctan(x^2+1)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

1) Data la funzione $f(x,y) = x^2 - \log(\frac{x}{y}) + y$ determinare, se esistono, massimi e minimi relativi nel suo dominio. Determinare massimi e minimi assoluti nel triangolo di vertici $(1,1),(2,1),(2,2)$.

2) Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (y^2, x, z)$ attraverso la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ 1 \le z \le 4\}$.

3) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

4) Determinare la soluzione del problema di Cauchy: $y'' - 5y' + 6y = e^x + 11e^{2x}$, $y(0) = 3/2$, $y'(0) = 1/2$.

Cenni di svolgimento

1) la funzione f è definita nell'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$ ed in tale insieme risulta di classe C^2. Essendo l'insieme D aperto, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo dovranno essere punti stazionari (Fermat). Risulta

$$\begin{cases} (x,y) \in D \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{1}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) \in D \\ (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -1) \end{cases} \iff (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1).$$

Siccome $f \in C^2(D)$ allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$.

$$H(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 < 0 \quad \text{punto sella.}$$

Quindi non ci sono punti di massimo o di minimo relativo in D.

Denotiamo con $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le x\} \subset D$. Siccome T è compatto e f è continua per il teorema di Weierstrass esisteranno massimi e minimi assoluti di f in T. Questi dovranno trovarsi sulla frontiera dell'insieme (altrimenti li avremmo individuati con Fermat).

$$g_1(x) = f(x, 1) = x^2 - \log x + 1, \quad g_1'(x) = 2x - \frac{1}{x} > 0,\ x \in [1, 2] \implies$$
$$g_1 \text{ crescente, } \min g_1(x) = f(1, 1) = 2, \quad \max g_1(x) = f(2, 1) = 5 - \log 2;$$
$$g_2(y) = f(2, y) = 4 - \log(\frac{2}{y}) + y \quad g_2'(y) = \frac{1}{y} + 1 > 0,\ y \in [1, 2] \implies$$
$$g_2 \text{ crescente, } \min g_2(y) = f(2, 1) = 5 - \log 2, \quad \max g_2(y) = f(2, 2) = 6;$$
$$g_3(x) = f(x, x) = x^2 + x, \quad g_3'(x) = 2x + 1 > 0,\ x \in [1, 2] \implies$$
$$g_3 \text{ crescente, } \min g_3(x) = f(1, 1) = 2, \quad \max g_3(x) = f(2, 2) = 6.$$

Pertanto $(1, 1)$ punto di minimo assoluto e $(2, 2)$ punto di massimo assoluto per f in T.

2) La superficie S è una porzione di paraboloide (superficie regolare). La sua normale è data da $N = (-2x, -2y, 1)$. Se indichiamo con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\text{flusso}(F) &= \int_S F \cdot n\, dS = \iint_D (y^2, x, x^2 + y^2) \cdot (-2x, -2y, 1)\, dxdy = \\
&= \iint_D (-2xy^2 - 2xy + x^2 + y^2) dxdy = \\
&= \int_1^2 r\, dr \int_0^{2\pi} (-2r^3 \cos t \sin^2 t - 2r^2 \sin t \cos t + r^2) dt = \\
&= \int_1^2 r^4\, dr \int_0^{2\pi} -2 \cos t \sin^2 t\, dt - \int_1^2 r^3\, dr \int_0^{2\pi} \sin(2t)\, dt + 2\pi \int_1^2 r^3\, dr = \\
&= \frac{15}{2}\pi.
\end{aligned}$$

3) Posto $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + n^2 x^2}$ osserviamo che è pari e a valori non negativi e che $f_n(0) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunuqe la serie non convergerà nell'origine perché il suo termine generale non è un infinitesimo e l'insieme di convergenza puntuale ed assoluta coincideranno. Se $x \neq 0$ allora $f_n(x)$ ha lo stesso comportamento asintotico di $\frac{1}{n^2}$, dunque la serie converge assolutamente e puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La serie non converge totalmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \neq 0} \frac{1}{1+n^2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Analogamente, usando il criterio di Cauchy, si prova che non ci può essere convergenza uniforme in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sia allora A un insieme tale che $0 \notin A'$, ad esempio consideriamo $A =]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, \infty[$ con $\alpha > 0$. Risulta $1+n^2x^2 \geq 1+n^2\alpha^2$ per ogni $x \in A$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in A} \frac{1}{1+n^2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2\alpha^2} < \infty.$$

Allora in A ci sarà convergenza totale e dunque uniforme.

4) L'equazione omogenea $y'' - 5y' + 6y = 0$ ha polinomio caratteristico $z^2 - 5z + 6 = 0$ che ammette come soluzioni $z = 2, z = 3$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare di $y''-5y'+6y = e^x$. Siccome 1 non è soluzione della equazione caratteristica cerchiamo una soluzione del tipo $y(x) = ae^x$. Derivando due volte e sostituendo nella equazione differenziale otteniamo $2a = 1$.

Cerchiamo una soluzione particolare di $y'' - 5y' + 6y = 11e^{2x}$. Stavolta 2 è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità 1, quindi cerchiamo una soluzione del tipo $y(x) = bxe^{2x}$. Derivando due volte e sostituendo si ottiene $b = -11$, quindi l'integrale generale è

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{2}e^x - 11xe^{2x}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $c_1 = -8$, $c_2 = 9$.

3 Settembre 2024 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ II anno ☐ altro **(Meccanica)** ☐

Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

1) Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4y$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 9$.

2) Sia Q la porzione di spazio delimitata dal basso dal cono $z^2 = x^2+y^2$ e dall'alto dalla sfera di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{2}$. Calcolare il volume di Q utilizzando le coordinate sferiche.

3) Calcolare l'area della porzione di piano delimitata da $r = a\sin(2t)$, $t \in [0, \pi/2]$, utilizzando le formule di Green.

Cenni di svolgimento

1) Il vincolo è un compatto (circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 3$), la funzione f è continua (un polinomio), dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Sia $g(x,y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$. Il gradiente del vincolo $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ si annulla solo nell'origine, che non appartiene al vincolo. Dunque il metodo dei moltiplicatori di Lagrange individua tutti i candidati di massimo e di minimo assoluto. Posto $F(x,y,\alpha) = x^2+2y^2-4y+\alpha(x^2+y^2-9)$, i punti di massimo e di minimo assoluto vincolati devono soddisfare il teorema di Fermat, applicato a F. Dunque

$$\begin{cases} 2x + 2\alpha x = 0 \\ 4y - 4 + 2\alpha y = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

La prima equazione si annulla se e solo se $x = 0$ oppure $\alpha = -1$. Se $x = 0$ allora $y = \pm 3$. Se invece $\alpha = -1$ dalla seconda equazione si ottiene $y = 2$ che sostituito nella terza dà $x = \pm\sqrt{5}$. Ci sono pertanto 4 candidati: $(0,\pm 3)$, $(\pm\sqrt{5},2)$. Risulta: $f(0,3)=6$, $f(0,-3)=30$, $f(\sqrt{5},2)=f(-\sqrt{5},2)=5$. Quindi ci saranno due punti di minimo assoluto e uno di massimo assoluto.

2) Il cono e la sfera si intersecano nei punti $x^2+y^2=1$, Inoltre $z\geq 0$. Dunque, in coordinate sferiche

$$Q := \{(r,\theta,\varphi) : 0\leq r\leq \sqrt{2},\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4},\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\}.$$

Dunque il volume di Q è dato da:

$$\begin{aligned}\iiint_Q dxdydz &= \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr\int_0^{\pi/4}\sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{2}}\cdot\Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\pi/4}\cdot 2\pi = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3}\cdot(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

3) Se indichiamo con A la porzione di piano di cui dobbiamo calcolare l'area, si ha che la curva γ di rappresentazione polare $r=a\sin(2t)$, $t\in[0,\pi/2]$ è la $\mathrm{Fr}(A)$. Avremo allora

$$\begin{aligned}x(t) &= a\sin(2t)\cos(t),\ y(t)=a\sin(2t)\sin(t),\quad t\in[0,\pi/2];\\ dx &= 2a\cos(2t)\cos(t)-a\sin(2t)\sin(t),\ dy=2a\cos(2t)\sin(t)+a\sin(2t)\cos(t).\end{aligned}$$

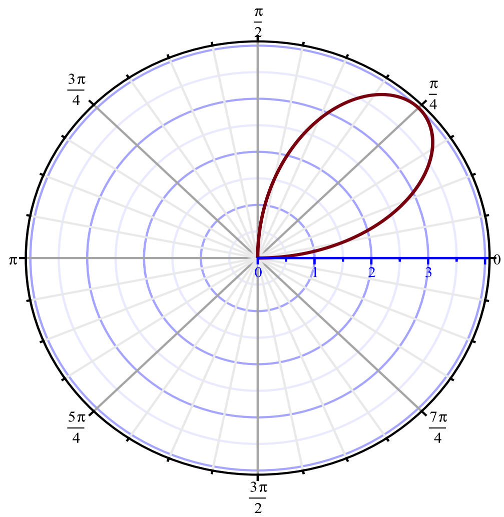
Allora

$$\begin{aligned}&xdy-ydx\\ =\ & a^2\sin(2t)\Big(2\sin(2t)\cos(2t)+\cos^2(t)\sin(2t)-2\sin(2t)\cos(2t)+\sin^2(t)\sin(2t)\Big)=\\ =\ & a^2\sin^2(2t).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\mathrm{area}(A) &= \frac{1}{2}\int_\gamma (xdy-ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2\sin^2(2t)dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2(2t)dt = \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(4t)}{2}dt = \frac{a^2}{4}\Big[t-\frac{\sin(4t)}{4}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{8}\pi.\end{aligned}$$

Maple: $a=4$, polarplot(4*sin(2*theta), theta = 0 .. Pi/2, axis[radial] = [color = "Blue"])



$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
π
0
0
1
2
3
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$

17 Settembre 2024 - Analisi Matematica II

(Elettr. e Inf.) **II anno** **altro** **(Meccanica)**

Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

1) Determinare i massimi e minimi assoluti (se esistono) della funzione $f(x,y,z) = x + y^2 - z$, soggetta ai vincoli $\varphi_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ e $\varphi_2(x,y,z) = z - x - y = 0$ motivando tutte le risposte.

2) Studiare l'esattezza della forma differenziale $\omega(x,y,z) = \sqrt{x+3}\,dx - \log y\,dy + \cos(2z)\,dz$ nella sua regione di definizione e, nel caso di esattezza, determinarne la classe delle primitive. Calcolare poi $\int_C \omega$ quando C è la circonferenza di centro $(1,2,1)$ e raggio 1 che si trova nel piano $z = 1$.

3) Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' = x^2 \log x \\ y(1) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

4) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme ed assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big[\arctan\big(\frac{x}{n}\big)\Big]^n \cdot 1_{[-n,n]}(x), \qquad \text{dove } 1_{[-n,n]}(x) = \begin{cases} 1 & -n \leq x \leq n; \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Cenni di svolgimento

1) La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e i due vincoli sono un cilindro (φ_1) pieno e un piano (φ_2). L'intersezione tra il cilindro e il piano è un compatto dunque, per il teorema di Weierstrass, esistono massimi e minimi assoluti. Sia B il disco chiuso $B := \{(x,y,x+y) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4\}$. Sia $F(x,y) = f(x,y,x+y) = y^2 - y$ e $B_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Il problema si riconduce alla ricerca dei punti di massimo e di minimo di F

ristretta a B_p. Cerchiamo innanzitutto i punti di massimo e di minimo in B_p° (aperto di B_p).

Risulta $\nabla F(x,y) = (0, 2y-1) = (0,0)$ se e solo se $(x, 1/2) \in B_p^\circ$. In tali punti tuttavia la matrice Hessiana si annulla.

La legge della funzione F è quella di una famiglia di parabole (al variare di x) con la concavità rivolta verso l'alto e con vertice nei punti $(x, 1/2)$, questi punti saranno pertanto di minimo e $F(x, 1/2) = -1/4$.

Esaminiamo ora $Fr(B_p) := \{(2\cos t, 2\sin t),\ 0 \le t \le 2\pi\}$.

Risulta $g(t) := F(2\cos t, 2\sin t) = 4\sin^2 t - 2\sin t$. Derivando si ha

$$\begin{aligned}
& g'(t) = 8\cos t \sin t - 2\cos t = 2\cos t(4\sin t - 1) \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \\
& t_1 \le t \le \frac{\pi}{2} \ \vee \ \pi - t_1 \le t \le \frac{3}{2}\pi,
\end{aligned}$$

avendo posto $t_1 = \arcsin(1/4)$. Ci saranno pertanto due punti di massimo relativo, corrispondenti a $t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3}{2}\pi$ e due punti di minimo $t = t_1, t = \pi - t_1$. Nel punto di massimo $t = \frac{3}{2}\pi$ (che sarà di massimo assoluto) la funzione f assume il valore 6. Nei punti di minimo (assoluto) la funzione assume valore $-\frac{1}{4}$. Quindi sono di minimo assoluto tutti i punti $(x, \frac{1}{2}) \in B_p$.

2) La forma differenziale lineare ω è definita in $A :=]-3, +\infty[\times]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ che è un convesso. Siccome $\omega \in C^1(A)$ allora ω è esatta se e solo se è chiusa. Banalmente

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y},$$

e pertanto la forma è chiusa e dunque esatta. Determiniamo ora la classe delle primitive a partire dal punto $P_0 = (0,1,0)$.

$$\begin{aligned}
U(x,y,z) &= \int_0^x X(t,1,0)dt + \int_1^y Y(x,t,0)dt + \int_0^z Z(x,y,t)dt + c = \\
&= \int_0^x \sqrt{t+3}dt - \int_1^y \log t dt + \int_0^z \cos(2t)dt + c = \\
&= \frac{2}{3}\Big[(t+3)^{3/2}\Big]_0^x - \Big[t\log t - t\Big]_1^y + \frac{1}{2}\Big[\sin(2t)\Big]_0^z + c = \\
&= \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} - y\log y + y + \frac{1}{2}\sin(2z) + d, \quad d \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

La circonferenza è una curva regolare chiusa immersa in A, dunque $\int_C \omega = 0$.

3) $x^2y''+xy' = x^2 \log x$ è una equazione differenziale di Eulero. Con la sostituzione $x = e^t$ diventa $y''(t) = te^{2t}$. L'integrale generale della omogenea associata è $y(t) = c_1+c_2t$. Troviamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$y_1(t) = (at + b)e^{2t}.$$

Derivando due volte e sostituendo nella equazione differenziale completa si ottiene $y_1(t) = \frac{1}{4}(t-1)e^{2t}$ e dunque l'integrale della equazione completa è:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 + c_2t + \frac{1}{4}(t-1)e^{2t}; \\ y(x) &= c_1 + c_2 \log x + \frac{x^2}{4}(\log x - 1). \end{aligned}$$

Imponendo i dati iniziali si ottiene $c_1 = c_2 = \frac{1}{4}$.

4) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $\left|\arctan(\frac{x}{n}) \cdot 1_{[-n,n]}(x)\right| \leq \arctan(1) = \frac{\pi}{4} < 1$. Pertanto $|f_n(x)| \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left| \left[\arctan(\frac{x}{n}) \right]^n \cdot 1_{[-n,n]}(x) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n < +\infty.$$

La convergenza dunque è totale e quindi anche assoluta e uniforme.

8 Gennaio 2025 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ **(Meccanica)** ☐

---

1) Determinare le soluzioni del problema di Cauchy: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2\ln x,\ y(1) = \frac{3}{2},\ y'(1) = 0.$

2) Calcolare il volume del solido $E = \{(x, y, z) : (x+1)^2 + y^2 \le z \le 2x+5\}$.

3) Calcolare l'integrale curvilineo $I = \int_{\mathscr{C}} (\sin y + y\cos x)\,dx + (x\cos y + sin x)\,dy$, quando la curva $\mathscr{C}$ è il grafico della funzione $f(x) = x\tan x$, $0 \le x \le \pi/4$.

4) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti della divergenza del campo vettoriale $G(x, y, z) = (yz, xy, y)$ soggetta ai vincoli $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y + z = 1$.

Cenni di svolgimento

1) Si tratta di una equazione lineare del secondo ordine di Eulero. Con la sostituzione $x = e^z$ si ottiene $y''(z) - 3y'(z) + 2y(z) = 2z$. L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea a coefficienti costanti è $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ che ammette come soluzioni $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Pertanto l'integrale generale della equazione omogenea è $y(z) = c_1e^z + c_2e^{2z}$. Una soluzione della equazione completa sarà $y(z) = az + b$ e dunque derivando e sostituendo si ottiene $a = 1$, $b = 3/2$. L'integrale generale della equazione completa è $y(z) = c_1e^z + c_2e^{2z} + z + 3/2$, cioè $y(x) = c_1x + c_2x^2 + \ln(x) + \frac{3}{2}$. La soluzione particolare si ottiene per $c_1 = 1$, $c_2 = -1$.

2) L'insieme E è delimitato dal paraboloide $z = (x+1)^2 + y^2$ e dal piano $z = 2x+5$. Quindi $E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ (x+1)^2 + y^2 \le z \le 2x+5\}$. Per determinare D risolviamo

$$(x+1)^2 + y^2 \le z \le 2x+5 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 \le 4$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(E) &= \iint_D (2x+5-[(x+1)^2+y^2]\,dxdy = \iint_D (4-x^2-y^2)\,dxdy = \\ &= \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 r(4-r^2)\,dr = 2\pi\int_0^2 (4r-r^3)\,dr = 8\pi.\end{aligned}$$

3) Siano $X = (\sin y + y\cos x)$, $Y = (x\cos y + \sin x)$. Risulta $X, Y \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $X'_y = \cos y + \cos x$, $Y'_x = \cos y + \cos x$. Quindi $\omega = Xdx + Ydy$ è una forma differenziale lineare chiusa definita in un convesso e dunque è esatta. Determiniamone una primitiva a partire da $(0,0)$.

$$F(x,y) = \int_0^y (x\cos t + sinx)\,dt = x\sin y + y\sin x + k, \qquad k\in\mathbb{R}.$$

Poiché ω è esatta, I non dipende dal percorso $\mathscr{C}$ e

$$I = F(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) - F(0,0) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

4) La divergenza del campo $\mathrm{div}(G) := f(x,y,z) = x$. L'insieme dei punti che costituiscono il vincolo è dato dai punti $x^2+y^2+z^2 = 1$ della sfera di centro l'origine e raggio 1, tagliata dal piano $z = 1-y$. Tale insieme è sicuramente un compatto, poiché f è continua (in realtà è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$), per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti.

Per determinare i punti del vincolo poniamo nella prima equazione $z = 1-y$ e dunque $\varphi(x,y) = x^2+y^2+(1-y)^2-1 = x^2+2y^2-2y = 0$. φ è di classe C^1 e $\nabla\varphi = (2x, 4y-2)$.

L'insieme dei punti per cui $\varphi(x,y) = 0$ e $\nabla\varphi(x,y) = (0,0)$ è vuoto e dunque i punti di massimo e di minimo assoluti vincolati si trovano tra i punti che annullano il gradiente della funzione $F(x,y,\alpha) = x + \alpha\varphi(x,y) = x + \alpha(x^2 + 2y^2 - 2y)$.

$$\begin{cases} 1+\alpha(2x) = 0 \\ \alpha(4y-2) = 0 \\ x^2+2y^2-2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Il punto di massimo assoluto sarà $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, quello di minimo assoluto $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Pertanto $\max \operatorname{div}(G) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\min \operatorname{div}(G) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20 Gennaio 2025 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ **(Meccanica)** ☐

---

1) Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni lineari del primo ordine $x'(t) + 2x(t) + y(t) = e^t, \; y'(t) - x(t) = 1$.

2) Calcolare, utilizzando il teorema di Stokes, la circuitazione del campo $\vec{F} = \left(\frac{x^2}{2} + y, 2xy + z, xy + 2yz\right)$ lungo la curva $\mathscr{C}$, percorsa in verso antiorario, intersezione tra il piano $2x + y + z = 3$ e il cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 16$. Il campo $\vec{F}$ è conservativo?

3) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+n}. \quad x \in \mathbb{R}.$$

4) Determinare, se esistono, massimi e minimi liberi della funzione

$$f(x,y) = \int_0^y (t^2 + 2tx + x^2)\, dt.$$

Cenni di svolgimento

1) Derivando la seconda equazione e sostituendo $x'(t)$ e $x(t)$ si ottiene

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^t + 2 \tag{1}$$

L'equazione caratteristica associata alla omogenea è $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ che ha due soluzioni coincidenti $\alpha = -1$ pertanto l'integrale generale della equazione omogenea di (1) è

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Una soluzione particolare di $y''(t)+2y'(t)+y(t)=2$ è ovviamente $y(t)=2$, mentre cerchiamo una funzione del tipo $y(t) = ae^t$ per determinare una soluzione particolare di $y''(t)+2y'(t)+y(t)=e^t$. Derivando e sostituendo si ottiene $a=1/4$. Pertanto l'integrale generale di (1) è

$$y(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+\frac{1}{4}e^t+2.$$

Per ricavare $x(t)$ basta utilizzare $x(t)=y'(t)-1$.

2) Sia S la porzione di superficie $z=3-2x-y$ contenuta nel cilindro $(x-1)^2+y^2 = 16$. S è una superficie di classe C^2, regolare ($n = (2,1,1)$), orientabile ed il cui bordo è proprio la curva $\mathscr{C}$. Inoltre il verso di percorrenza del bordo è concorde con il verso scelto per la normale. Poiché il campo $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ è possibile applicare il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di F.

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x^2}{2}+y & 2xy+z & xy+2yz \end{vmatrix} = (x+2z-1,-y,2y-1) \qquad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_S \text{rot}(\vec{F})\cdot n\,dS &= \iint_D (5-3x-2y,-y,2y-1)\cdot(2,1,1)dxdy = \\
&= \iint_D (9-6x-3y)dxdy = 3\iint_D (3-2x-y)dxdy = \\
&= 3\int_0^4 rdr\int_0^{2\pi}(1-2r\cos t - r\sin t)dt = \\
&= 6\pi\int_0^4 rdr = 48\pi.
\end{aligned}$$

Il campo $\vec{F}$ non è conservativo perché la curva $\mathscr{C}$ è regolare e chiusa e la circuitazione di $\vec{F}$ su $\mathscr{C}$ non si annulla.

3) Posto $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{1+n}$, f_n è pari e dunque basta studiarla per $x \geq 0$.

Se $x = 0$ la serie diverge a $+\infty$ perché $f_n(0)$ è un infinitesimo di ordine 1 e quindi si comporta come la serie $\sum_n \frac{1}{n}$.

Se $x > 0$, $f_n(x) \leq e^{-nx^2}$ e dunque la serie data converge per confronto perché e^{-nx^2} è un infinitesimo, per $n \to \infty$, di ordine superiore a 2.

Dunque la serie converge puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In tale insieme non può né convergere uniformemente, né totalmente, altrimenti si avrebbe un assurdo, per il criterio di Cauchy.

Se infatti convergesse uniformemente in tale insieme allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esisterebbe $\overline{n}$ tale che, per ogni $n \geq \overline{n}$ e per ogni p

$$\lim_{x\to 0}\left|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\right| = \left|\frac{1}{1+(n+1)} + \ldots + \frac{1}{1+(n+p)}\right| \leq \varepsilon.$$

Determiniamo un insieme $A \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in cui ci sia la convergenza uniforme. Sia A tale che $0 \notin A'$. Ad esempio prendiamo $A = [a, \infty[$ con $a > 0$. Risulta

$$\sup_{x\geq a,\, a>0} |f_n(x)| = \max_{x\geq a,\, a>0} f_n(x) = \frac{e^{-na^2}}{1+n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-na^2}}{1+n} < +\infty.$$

Pertanto la convergenza è totale, e dunque uniforme, in $[a, +\infty[$ con $a > 0$.

4) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ la funzione $g(t,x) = t^2 + 2tx + x^2$ è di classe $C^1([0,y])$, quindi $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e risulta:

$$\nabla f(x,y) = \Big(\int_0^y (2t+2x)dt, y^2 + 2xy + x^2\Big) = \Big(y^2 + 2xy, (y+x)^2\Big)$$

Quindi $\nabla f = (0,0)$ se e solo se $y = -x$ dalla seconda equazione che, sostituita nella prima, dà $x = 0$. Quindi l'unico punto critico è l'origine. In realtà ∇f è anche lui di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e quindi possiamo calcolare per la f la matrice Hessiana.

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2y & 2(y+x) \\ 2(y+x) & 2(y+x) \end{vmatrix}, \quad \det H(0,0) = 0,$$

che però non ci dà informazioni. Sappiamo che $f(0,0) = 0$, calcoliamo $f(x,x)$.

$$f(x,x) \;=\; \int_0^x g(t)dt = \Big[\frac{t^3}{3} + t^2 x + x^2 t\Big]_{t=0}^{t=x} = \frac{7}{3}x^3.$$

Allora, lungo questa restrizione, $(0,0)$ è un punto di massimo, se $x \leq 0$; mentre è un punto di minimo se $x \geq 0$, pertanto $(0,0)$ è un punto sella e la funzione f non ha né massimi, né minimi relativi.

3 Febbraio 2025 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ **(Meccanica)** ☐

---

1) Determinare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ il campo di forze

$$\vec{F} = \left(2\pi \arctan(y^2) + \sin(bx + y + a), \frac{(2\pi - a)xy}{1 + y^4} + sin(x + y)\right)$$

è conservativo e, per tali valori, calcolarne un potenziale.

2) Calcolare il flusso del vettore $\vec{G} = \left(x + z^2, y + \ln^2(1 + z^2), xy + z\right)$ uscente da $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$.

3) Determinare massimi e minimi assoluti e relativi della funzione $f(x, y) = y^3 + 4x^2y - 4y$ nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1\}$.

4) Sia $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$, con $x \in [0, 1]$. Studiarne la convergenza puntuale ed uniforme e provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \ne \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Cenni di svolgimento

1) $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Poiché $\mathbb{R}^2$ è un semplicemente connesso, allora $\vec{F}$ è conservativo se e solo se è irrotazionale. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{4\pi y}{1 + y^4} + \cos(bx + y + a) \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{(2\pi - a)y}{1 + y^4} + \cos(x + y). \end{aligned}$$

Pertanto le due derivate parziali coincidono se $b = 1$ e $a = -2\pi$. Il campo vettoriale in tal caso è

$$\vec{F} = \left(2\pi \arctan(y^2) + \sin(x + y), \frac{4\pi xy}{1 + y^4} + sin(x + y)\right).$$

Scriviamo la classe dei potenziali a partire da $(0,0)$.

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x \sin t dt + 2\pi x \int_0^y \frac{2t}{1+t^4} dt + \int_0^y \sin(x+t) dt = \\ &= 1 - \cos x + 2\pi x \arctan(y^2) - \cos(x+y) + \cos x + k = \\ &= 2\pi x \arctan(y^2) - \cos(x+y) + l, \quad l \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) E è un dominio regolare (boccia di centro l'origine e raggio 2) per cui è possibile applicare il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ per determinare il flusso di $\vec{G}$ uscente da E. Risulta $\mathrm{div}(E) = 3$ e quindi

$$\int_{Fr(E)} \vec{G} \cdot n dS = \iiint_E 3 dx dy dz = 3\mathrm{vol}(E) = 32\pi.$$

3) $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, A è un compatto (corona circolare), dunque f ammette massimi e minimi assoluti. In $A°$ dovranno annullare il gradiente di f.

$$\begin{cases} (x,y) \in A° \\ 8xy = 0 \\ 3y^2 + 4x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione se $y = 0$ allora $x = \pm 1$, ma $(\pm 1, 0) \notin A°$. Se invece $x = 0$ allora $3y^2 = 4$ e anche questa equazione non ha soluzioni in $A°$, quindi non ci sono punti di massimo o di minimo relativo nell'interno di A. Studiamo ora la f su $\mathrm{Fr}(A)$. Se $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ allora $x^2 = \frac{1}{2} - y^2$ e la funzione f assume, in tali punti, il valore $g(y) = y^3 + 4y(\frac{1}{2} - y^2) - 4y = -3y^3 - 2y$, $g : [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \to \mathbb{R}$. Poiché $g'(y) < 0$ gli unici candidati per la funzione f sarebbero $(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$. Se invece $x^2 = 1 - y^2$ allora la funzione f assume, in tali punti, il valore $g_1(y) = -3y^3$ con $g_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$. La g_1 è decrescente e dunque i punti di massimo o di minimo per la f saranno $(0, \pm 1)$. Abbiamo quindi determinato 4 candidati $(0, \pm 1)$; $(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$. Calcolando la funzione in tali punti si prova che

$$\max_A f(x,y) = f(0,-1) = 3, \qquad \min_A f(x,y) = f(0,1) = -3.$$

4) Se $x = 0, x = 1$ le f_n si annullano e quindi $f(0) = f(1) = 0$. Se invece $0 < x < 1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} nx(1-x^2)^n = 0,$$

dunque $f_n \to f \equiv 0$ e $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$.
Calcoliamo ora $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$. Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$, f_n è continua e non negativa in $[0,1]$, allora

$$\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{[0,1]} f_n(x).$$

Poiché f_n è anche derivabile, studiamo il segno della sua derivata.

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n(1-x^2)^n + n^2x(1-x^2)^{n-1}(-2x) = \\ &= (1-x^2)^{n-1}\Big(n(1-x^2) - 2x^2n^2\Big) = n(1-x^2)^{n-1}\Big(1 - x^2(1+2n)\Big) \geq 0 \\ &\iff x^2(1+2n) - 1 \leq 0 \quad \& \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Quindi il massimo è raggiunto nel punto $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(\dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}) = \infty$.
Questo ci dice che la convergenza non può essere uniforme e che le f_n non sono nemmeno equilimitate. Siccome non possiamo applicare nessuna delle condizioni sufficienti per il passaggio al limite sotto il segno di integrale di Riemann, dobbiamo calcolare direttamente $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$, con la sostituzione $w = 1 - x^2$.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int_0^1 w^n dw = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot \Big[\frac{w^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

16 Aprile 2025 - Analisi Matematica II

---

1) Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = 2^{x-y}$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 \le 9\}$.

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = -4y(t) + t \\ y'(t) = x(t) \\ x(0) = 1, \quad y(0) = -1 \end{cases}$$

3) Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$. Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva γ parametrizzato da: $r(t) = \left(2\cos t, 2\sin t, 3t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$. $\mathbf{F}$ è conservativo? Se si, determinare la classe dei potenziali. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva γ.

Cenni di svolgimento

1) L'insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ è un compatto (porzione di piano racchiusa dalla ellisse $x^2 + 9y^2 = 9$). La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e dunque in particolare è continua. Per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti in A. Non possono stare nell'interno di A perché $\nabla f = (2^{x-y}\ln 2, -2^{x-y}\ln 2) \neq (0,0)$, dunque si troveranno nella frontiera di A: $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 = 9\}$. Posto $\phi(x,y) = x^2 + 9y^2 - 9$, osserviamo che $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, ed inoltre

$$Z_\phi \cap (\nabla\phi = (0,0)) = \emptyset. \tag{2}$$

I punti di massimo e minimo assoluti in A dovranno allora annullare il gradiente di

$$F(x,y,\alpha) = 2^{x-y} + \alpha(x^2 + 9y^2 - 9).$$

$$\begin{cases} F'_x = 2^{x-y} \cdot \ln 2 + 2ax = 0 \\ F'_y = -2^{x-y} \cdot \ln 2 + 18ay = 0 \\ F'_a = x^2 + 9y^2 - 9 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a(x+9y) = 0 \\ 2^{x-y} \cdot \ln 2 + 2ax = 0 \\ x^2 + 9y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Se $a = 0$ allora dalla seconda equazione otteniamo $2^{x-y} = 0$, e quindi nessuna soluzione.

Se $x + 9y = 0$ allora dalla terza equazione $10y^2 - 1 = 0$, da cui $y = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Rimangono pertanto individuati i punti $(-\frac{9}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ e $(\frac{9}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$ che risulteranno per il teorema di Weierstrass i punti di massimo e di minimo assoluti cercati:

$$\min_A f(x,y) = f(-\frac{9}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}) = 2^{-\sqrt{10}}, \qquad \max_A f(x,y) = f(\frac{9}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}) = 2^{\sqrt{10}}.$$

Avremmo potuto risolvere il problema anche utilizzando il metodo dello Jacobiano:

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 - 9 = 0 \\ \begin{vmatrix} 2^{x-y} \cdot \ln 2 & -2^{x-y} \cdot \ln 2 \\ 2x & 18y \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 9y^2 - 9 = 0 \\ \ln 2 \cdot 2^{x-y+1}(x+9y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -9y \\ 10y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

e dunque si riottengono i punti trovati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

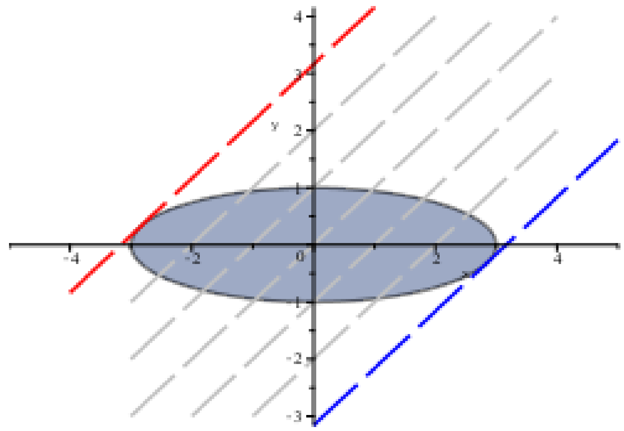
Avremmo potuto risolvere il problema con le curve di livello della funzione $g(x,y) = x - y$ rispetto al vincolo $x^2 + 9y^2 = 9$. In questo caso dobbiamo determinare le rette del fascio $x-y = c$ che hanno intersezioni con $x^2+9y^2 = 9$.

$$\begin{cases} x - y = c \\ x^2 + 9y^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = c + y \\ 10y^2 + 2cy + (c^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \Delta = 36(10 - c^2) \geq 0$$

E dunque si ottengono soluzioni per $c \in [-\sqrt{10}, +\sqrt{10}]$. Il fascio improprio di rette $x - y = c$ intersecherà dunque A per tali valori di c. I valori $x - y =$

$\pm\sqrt{10}$ che intersecano il vincolo saranno quelli che individueranno i punti di massimo e di minimo assoluto (sempre per Weierstrass).



Avremmo anche potuto infine risolvere l'esercizio esplicitando il vincolo in coordinate ellittiche: $x(t) = 3\cos t;\ y(t) = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$.
Osservando poi che la funzione $f(x, y)$ è una composizione di funzioni e la funzione 2^t è monotona crescente basterebbe determinare i punti di massimo e di minimo assoluti dell'esponente: $G(t) := g(x(t), y(t)) = x(t) - y(t) = 3\cos t - \sin t$ e dunque studiare il segno di $G'(t) = -3\sin t - \cos t = \cos t(-3\tan t - 1) \geq 0$.

2) Derivando rispetto a t la prima equazione e sostituendo la y' si ottiene

$$x''(t) + 4x(t) = 1.$$

L'integrale generale di questa equazione è

$$x(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{1}{4}.$$

Se la deriviamo otteniamo

$$x'(t) = -2c_1\sin(2t) + 2c_2\cos(2t)$$

e dunque

$$y(t) \quad = \quad = \frac{1}{4}\Big(t - x'(t)\Big) = \frac{1}{4}\cdot\Big[t + 2c_1\sin(2t) - 2c_2\cos(2t)\Big].$$

L'integrale generale del sistema è dato da:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\cos(2t)+c_2\sin(2t)+\frac{1}{4};\\ y(t) &= \frac{1}{4}\cdot\Big[t+2c_1\sin(2t)-2c_2\cos(2t)\Big]. \end{aligned}$$

La soluzione cercata è

$$\Big(\overline{x}(t),\ \overline{y}(t)\Big)=\Big(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos(2t)+2\sin(2t),\ \ \frac{t}{4}+\frac{3}{8}\sin(2t)-\cos(2t)\Big).$$

3) Il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ è dato da:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\Big[3t\cdot(-2\sin t)+2\sin t\cdot(2\cos t)+2\cos t\cdot 3\Big]dt=\\ &= \int_0^{2\pi}\Big[-6t\sin t+2\sin(2t)+6\cos t\Big]dt=6\int_0^{2\pi} t(\cos t)'\,dt=\\ &= 6\Big\{\Big[t\cos t\Big]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos t\,dt\Big\}=12\pi. \end{aligned}$$

$\mathbf{F}\in C^1(\mathbb{R}^3)$ ed inoltre $\nabla\times\mathbf{F}=(0,0,0)$. Quindi il campo è irrotazionale e definito in un semplicemente connesso, pertanto $\mathbf{F}$ è conservativo. Per calcolare i suoi potenziali basta calcolare

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_0^x X(t,0,0)dt+\int_0^y Y(x,t,0)dt+\int_0^z Z(x,y,t)dt=\\ &= \int_0^y t\,dt+x\int_0^z dt=\frac{y^2}{2}+xz+c,\quad c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la lunghezza l della curva γ.

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+9}\,dt=2\pi\sqrt{13}.$$

9 Giugno 2025 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ **(Meccanica)** ☐

---

1) Sia $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ una successione di funzioni. Quale è il campo di esistenza A della successione? Studiare la convergenza puntuale ed uniforme in A.

2) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = x$ sotto le condizioni $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{5}{2}$ e $y+z=1$.

3) Calcolare l'integrale della funzione $f(x,y) = xy$ sulla porzione di piano D individuata da $y^2 = 2x+6$ e $y = x-1$. (Disegnare D)

4) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

Cenni di svolgimento

1) Il punto $x=-1$ non è nel dominio delle funzioni con n dispari, quindi $f_n : A \to \mathbb{R}$ con $A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Studiamo la convergenza puntuale della successione. Quando $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} x^n$ dipende da x. Pertanto,

$$\begin{aligned}
|x| < 1 \qquad & \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0; \\
x = 1 \qquad & \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \frac{1}{2}; \\
|x| > 1 \qquad & \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/x^n} = 1.
\end{aligned}$$

$$f_n \to f = \begin{cases} 0 & |x| < 1; \\ 1/2 & x = 1; \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

Per la convergenza uniforme studiamo

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|.$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \left|\dfrac{x^n}{1+x^n}\right| & |x| < 1 \\ 0 & x = 1 \\ \left|\dfrac{x^n}{1+x^n} - 1\right| = \dfrac{1}{|1+x^n|} & |x| > 1. \end{cases}$$

Risulta

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| &\geq \lim_{n\to\infty} \sup_{|x|<1} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{n\to\infty} \sup_{0<x<1} \frac{x^n}{1+x^n} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \Big(\lim_{x\to 1^-} \frac{x^n}{1+x^n} \Big) = \frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Pertanto $(f_n)_n$ non converge uniformemente in A. Avremmo potuto dire direttamente che la convergenza non può essere uniforme perché le f_n sono continue in $x = 1$, mentre la funzione limite presenta una discontinuità in tale punto.

2) La funzione è definita e continua in tutto $\mathbb{R}^3$. Il vincolo è costituito dall'intersezione tra la superficie sferica di centro $(0,0,0)$ e raggio $\sqrt{5/2}$ ed il piano $y + z = 1$, per cui è una ellisse, dunque è un insieme compatto. Per il teorema di Weierstrass, la funzione f ammette allora massimo e minimo assoluti. Ricaviamo $z = 1 - y$ dal secondo vincolo e sostituiamolo nel primo vincolo: $x^2 + y^2 + (1-y)^2 = \dfrac{5}{2}$.

Consideriamo ora il nuovo problema di massimo e minimo vincolato dato da: $g(x,y) = f(x,y,1-y) = x$ soggetto al vincolo $x^2 + 2y^2 - 2y - \dfrac{3}{2} = 0$.

Si consideri la funzione lagrangiana associata:

$$L(x,y,\lambda) = g(x,y) - \lambda\left(x^2 + 2y^2 - 2y - \frac{3}{2}\right) = x - \lambda\left(x^2 + 2y^2 - 2y - \frac{3}{2}\right).$$

Osserviamo innanzitutto che

$$\{(2x, 4y-2) = (0,0)\} \bigcap \{(x,y) : x^2 + 2y^2 - 2y - \frac{3}{2} = 0\} = \emptyset$$

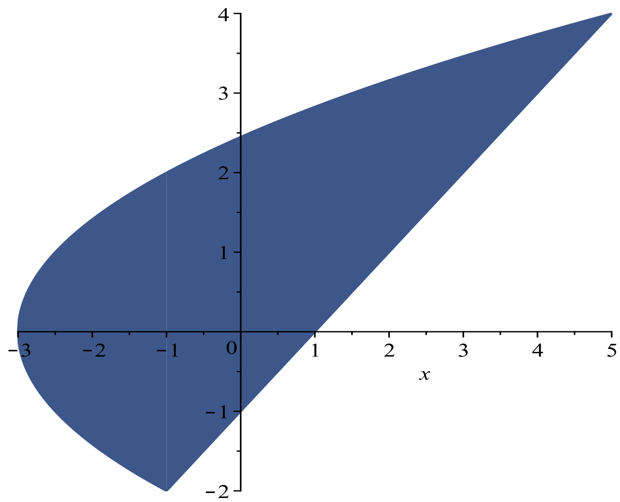
e dunque non ci sono punti aggiuntivi da considerare. Applichiamo allora il Teorema di Fermat alla funzione lagrangiana. I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial x} - 2\lambda x = 1 - 2\lambda x = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial y} - \lambda(4y-2) = -\lambda(4y-2) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + 2y^2 - 2y - \frac{3}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Dalla seconda equazione possiamo ottenere $\lambda = 0$ oppure $y = 1/2$. La soluzione $\lambda = 0$ è da escludere perché altrimenti la prima equazione non ammetterebbe soluzione. Sostituiamo allora $y = 1/2$ nella terza equazione. Si ottiene $x^2 - 2 = 0$ che ammette come soluzioni $x = \pm\sqrt{2}$. I punti critici del problema iniziale sono pertanto: $P_1 = (-\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $P_2 = (+\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Banalmente P_1 è il punto di minimo vincolato e P_2 quello di massimo vincolato.

3) Se mettiamo a sistema la parabola $y^2 = 2x + 6$, di vertice $(-3, 0)$ e con concavità rivolta verso destra, e la retta $y = x - 1$ si ottiene $x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$ che ammette come soluzioni $x = -1$ e $x = 5$ a cui corrispondono i punti del piano $(-1, -2)$, $(5, 4)$. Pertanto l'insieme D si può scrivere nella forma di insieme x-semplice:

$$D = \{(x,y) : \ -2 \le y \le 4, \ \frac{y^2}{2} - 3 \le x \le y + 1\}.$$



$$\begin{aligned} I &= \iint_D xydxdy = \int_{-2}^{4} ydy \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xdx = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{1}{8}y^5 + 2y^3 + y^2 - 4y\right)dy = \\ &= \left[-\frac{1}{48}y^6 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - 2y^2\right]_{-2}^{4} = 36. \end{aligned}$$

4) Si tratta di una equazione lineare del secondo ordine, completa, a coefficienti costanti. L'equazione omogenea $y'' - 3y' + 2y = 0$ ha equazione caratteristica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ che ha come soluzioni $\lambda = 1, \lambda = 2$. L'integrale generale della equazione omogenea è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della equazione completa utilizzando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Risulta

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix} \qquad \det W(x) = e^{3x} \neq 0$$

$$W^{-1}(x) = e^{-3x} \cdot \begin{pmatrix} 2e^{2x} & -e^{2x} \\ -e^x & e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx$$

$$
\begin{aligned}
C_1(x) &= -\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = -\arctan e^x + k_1 \\
C_2(x) &= \int \frac{1}{e^{2x}+1}dx
\end{aligned}
$$

Per calcolare $C_2(x)$ poniamo $t = e^{2x}$, $t > 0$. Allora, derivando, otteniamo: $dt = 2e^{2x}dx$, da cui: $dx = \dfrac{dt}{2t}$. Integrando per sostituzione

$$
\begin{aligned}
C_2(x(t)) &= \int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t(t+1)}dt \\
& \frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}, \qquad 1 = A(t+1) + Bt, \qquad A = 1,\ B = -1 \\
& \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \\
C_2(x(t)) &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\ln t - \ln(t+1)\right) + k_2 \\
C_2(x) &= \frac{1}{2}\big(2x - \ln(e^{2x}+1)\big) + k_2 = x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + k_2
\end{aligned}
$$

Una soluzione particolare della equazione completa è

$$
s(x) = -e^x \arctan e^x + e^{2x}\Big(x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)\Big).
$$

L’integrale generale della equazione completa è

$$
y(x) = +e^x\big(c_1 - \arctan e^x\big) + e^{2x}\Big(c_2 + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)\Big).
$$

23 Giugno 2025 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ **(Meccanica)** ☐

---

1) Determinare l'insieme di convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

2) Dato il campo vettoriale $F(x;y) := \left(2x \log y, \dfrac{x^2}{y} + 2y \log y\right)$, stabilire se il campo è conservativo nel suo dominio ed in caso affermativo determinarne un potenziale. Calcolare poi il lavoro compiuto dal campo F lungo la curva $\mathcal{C}$ parametrizzata da $r(t) := (e^t; e^{2t})$, $0 \le t \le 1$ dopo aver provato che essa è regolare.

3) Data la funzione $f(x;y) = \log(1+|xy|)$, stabilire dove risulta derivabile nel suo dominio e calcolarne le derivate parziali. Determinarne, se esiste, la derivata lungo la direzione $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nel punto $(0,0)$.

Cenni di svolgimento

1) Si tratta di una serie di funzioni a segni alterni.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+x^2} = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{n+x^2} \ge \frac{1}{(n+1)+x^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pertanto la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ per il criterio di Leibnitz.

Sempre per il criterio di Leibnitz

$$0 \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{(n+1)+x^2} \le \frac{1}{n+1}$$

pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|R_n(x)| = 0$$

e quindi la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

Per il criterio del confronto asintotico la serie data non converge assolutamente (e quindi non converge totalmente) in alcun punto di $\mathbb{R}$ perché

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n+x^2} \sim \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

Riepilogando la serie data converge uniformemente e quindi puntualmente su tutto $\mathbb{R}$, l'insieme di convergenza assoluta o totale è vuoto.

2) Il campo è di classe C^1 nel suo dominio $A = \left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$ ove risulta irrotazionale essendo verificata anche $X'_y = \dfrac{2x}{y} = Y'_x$.

Poiché la regione A risulta semplicemente connessa, ne deduciamo che il campo è conservativo in A. Per determinarne un potenziale $U(x,y)$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$U'_x = 2x\log y, \qquad U'_y = \frac{x^2}{y} + 2y\log y.$$

Dalla prima delle due condizioni abbiamo che

$$U(x;y) = \int 2x\log y\,dx = x^2\log y + c(y);$$

e dalla seconda

$$\frac{x^2}{y} + 2y\log y = U'_y = \frac{x^2}{y} + c'(y).$$

Dunque

$$c(y) = \int 2y\log y\,dy = y^2\log y - \frac{y^2}{2} + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Pertanto

$$U(x,y) = x^2\log y + y^2\log y - \frac{y^2}{2} + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Per quanto riguarda la curva $\mathcal{C}$, la rappresentazione parametrica considerata r è di classe $C^1([0,1])$; c'è iniettività: ad esempio $x(t_1) \neq x(t_2)$ per ogni $t_1 \neq t_2$ (dunque la curva è semplice), inoltre $r'(t) = (e^t, 2e^{2t}) \neq (0,0)$. Quindi la curva è regolare e $r(t)$ è una rappresentazione parametrica "buona".

Poiché F è conservativo in A e la curva $\mathcal{C}$ ha sostegno contenuto in A, allora

$$L = U(r(1)) - U(r(0)) = \frac{3}{2}e^4 + 2e^2 + \frac{1}{2}.$$

3) La funzione data risulta definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$ essendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \log(1+xy) & xy \geq 0 \\ \log(1-xy) & xy < 0 \end{cases}$$

Possiamo dire che la funzione risulta derivabile parzialmente in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x_0 y_0 \neq 0$ con

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{cases} \left(\dfrac{y_0}{1+x_0y_0}, \dfrac{x_0}{1+x_0y_0}\right) & x_0y_0 > 0 \\[2ex] \left(-\dfrac{y_0}{1-x_0y_0}, -\dfrac{x_0}{1-x_0y_0}\right) & x_0y_0 < 0. \end{cases}$$

Rimane da discutere la derivabilità nei punti degli assi cartesiani.

Nell'origine del piano si ha che la funzione risulta derivabile parzialmente infatti, essendo $f(x,0) = f(0,y) = 0$ per ogni $x,y \in \mathbb{R}$; pertanto $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

La funzione non risulta invece derivabile parzialmente nei restanti punti degli assi. Infatti, nel punto $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$ avremo che la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad x con derivata parziale nulla, mentre non risulta derivabile parzialmente rispetto ad y essendo

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x_0,h) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\log(1+|x_0 h|)}{h} = |x_0| \lim_{h\to 0^\pm} \frac{|h|}{h} = \pm|x_0|.$$

Analogalmente, nel punto $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ avremo che la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad y con derivata nulla, mentre non risulta derivabile parzialmente rispetto ad x.

La funzione ammette derivata lungo la direzione (versore) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nel punto $(0,0)$ in quanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+\frac{h^2}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{2} = 0.$$

7 Luglio 2025 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ **(Meccanica)** ☐

---

1) Sia γ la curva individuata da $r(t) = (e^{t+1}\cos(t+1), e^{t+1}\sin(t+1), e^{t+1})$, $0 \le t \le 1$. Provare che γ è regolare, calcolarne la lunghezza e scrivere la sua ascissa curvilinea. Parametrizzare la curva γ utilizzando l'ascissa curvilinea.

2) Calcolare $\displaystyle\iint_D e^{(x-1)^2+(y-1)^2}\,dxdy$ quando $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+(y-1)^2 \le 4,\ \&\ y \ge 1\right\}$.

3) Calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2}\cos(nx)\Big)\,dx.$$

Cenni di svolgimento

1) La curva γ è semplice, infatti $z(t_1) \ne z(t_2)$ quando $t_1 \ne t_2$. Inoltre $r \in C^1([0,1])$ e $z'(t) = e^{t+1} \ne 0$ per ogni $t \in [0,1]$. Risulta

$$\begin{aligned} r'(t) &= e^{t+1}\cdot\Big(\cos(t+1)-\sin(t+1),\ \sin(t+1)+\cos(t+1),\ 1\Big) \\ \|r'(t)\| &= \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)} = \sqrt{3}\cdot e^{t+1}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{3}e\int_0^t e^w\,dw = \sqrt{3}\Big(e^{t+1}-e\Big) \\ L_\gamma &= s(1) = \sqrt{3}\Big(e^2-e\Big) \end{aligned}$$

Da $s(t) = \sqrt{3}\Big(e^{t+1}-e\Big)$ si ottiene $e^{t+1} = \dfrac{s(t)}{\sqrt{3}} + e$ e $t+1 = \ln\Big(\dfrac{s(t)}{\sqrt{3}}+e\Big)$. Pertanto la parametrizzazione della curva γ rispetto all'ascissa curvilinea sarà

$$r(s) = \Big(\frac{s}{\sqrt{3}}+e\Big)\cdot\Big[\cos\Big(\ln\Big(\frac{s}{\sqrt{3}}+e\Big)\Big), \sin\Big(\ln\Big(\frac{s}{\sqrt{3}}+e\Big)\Big), 1\Big]$$

2) L'insieme D è la semicirconferenza di centro $(1,1)$ e raggio 2 che sta al di sopra della retta $y=1$. Facciamo un cambio di variabili passando a coordinate polari con polo nel centro della circonferenza: $x-1=r\cos t$, $y-1=r\sin t$. In tal caso $dxdy = rdrdt$ e l'immagine di D in coordinate polari è $[0,2]\times[0,\pi]$.

$$\begin{aligned}\iint_D e^{(x-1)^2+(y-1)^2}dxdy &= \int_0^\pi dt\int_0^2 re^{r^2}dr = \pi\int_0^2 re^{r^2}dr = \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^4 e^w dw = \frac{\pi}{2}\cdot\big(e^4-1\big).\end{aligned}$$

3) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos(nx)$ risulta convergente totalmente in $[-\pi,\pi]$ (basta prendere $L_n=\frac{4}{n^2}$). Pertanto, per il teorema di integrazione per serie,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos(nx)\Big)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi^2}{3}dx+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx =$$
$$\frac{2}{3}\pi^3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cdot\frac{2}{n}\sin(n\pi)=\frac{2}{3}\pi^3.$$

Allo stesso risultato si arrivava sfruttando il fatto che la integranda è lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x)=x^2$ che è continua e ricordando che le serie di Fourier sono sempre integrabili per serie. Pertanto

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos(nx)\Big)dx = \int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx.$$

1 Settembre 2025 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ **(Meccanica)** ☐

---

1) Siano $F(x,y) = e^{x-y} + \ln(1+xy)$ e $\gamma(t) = (1+\sin t, 1-t^2)$, $-1 \le t \le 1$. Determinare $\left(F \circ \gamma\right)'$ nel punto $t = 0$, dopo aver determinato il campo di esistenza di F ed aver provato che γ ha sostegno in tale insieme.

2) Studiare i punti critici della funzione $f(x,y) = (2x^2 + 2y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)}$.

3) Risolvere il problema di Cauchy $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 2e^{2t},\ x(0) = x'(0) = 0$.

4) Calcolare il flusso del rotore del vettore $F = (x, 0, y)$ uscente dalla superficie (orientata verso l'alto)

$$\begin{cases} x = r\sin u \cos v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r\cos u \end{cases} \qquad u \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Cenni di svolgimento

1) La funzione F definita da $F(x,y) = e^{x-y} + \ln(1+xy)$ è definita nell'insieme

$$A \;=\; \left\{(x,y) : 1+xy > 0\right\} = \left\{(0,y),\, y \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{(x,y) : x > 0 \;\&\; y > -\frac{1}{x}\right\} \cup \left\{(x,y) : x < 0 \;\&\; y < -\frac{1}{x}\right\}.$$

In particolare $A \supseteq \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ ed il sostegno di γ è contenuto nel primo quadrante, essendo $x(t) \ge 0$, $y(t) \ge 0$ per ogni $t \in [-1, 1]$.
Inoltre $\nabla F(x,y) = \left(e^{x-y} + \dfrac{y}{1+xy}, -e^{x-y} + \dfrac{x}{1+xy}\right)$.

Quindi $F \in C^1(A)$ ed è pertanto differenziabile in A. γ è derivabile e $\gamma'(t) = (\cos t, -2t)$. Si può allora applicare la regola della catena

$$\begin{aligned}
\left(F\circ\gamma\right)'(t) &= \nabla F(x(t),y(t))\cdot(x'(t),y'(t)) \\
\left(F\circ\gamma\right)'(t) &= \left(e^{x(t)-y(t)} + \frac{y(t)}{1+x(t)y(t)}, -e^{x(t)-y(t)} + \frac{x(t)}{1+x(t)y(t)}\right)\cdot(\cos t, -2t) \\
\left(F\circ\gamma\right)'(0) &= \left(1+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}\right)\cdot(1,0) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

2) la funzione f è definita in tutto $\mathbb{R}^2$ ed è ivi almeno di classe C^2. f è anche di tipo radiale, per cui conviene studiare la funzione $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definita da $g(r) = 2r^2e^{-r^2}$. Risulta $g'(r) = 4re^{-r^2}\left(1-r^2\right) \geq 0 \iff 0 \leq r \leq 1$.

In $r = 0$ la g ha un punto di minimo assoluto: $g(0) = 0 \leq g(r)$ per ogni $r > 0$. In $r = 1$ la g ha un punto di massimo per la regola del segno della derivata prima, che è anche un massimo assoluto in quanto a sinistra di 1 la g è crescente ed è decrescente per $r > 1$.

Riportando tali risultati alla funzione f risulterà $(0,0)$ punto di minimo assoluto e $\{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ sono i punti di massimo assoluto.

3) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 2e^{2t}$ è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, completa. L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ che ammette come soluzioni $\alpha = -1, \alpha = 2$. L'integrale generale della equazione omogenea è $x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}$.

Siccome $\alpha = 2$ è soluzione della equazione caratteristica, una soluzione particolare della equazione completa avrà la forma $x(t) = \alpha te^{2t}$.

Derivando due volte e sostituendo nella equazione completa si ottiene $x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + \frac{2}{3}te^{2t}$.

Imponendo ora i dati iniziali $x(0) = x'(0) = 0$ si ottiene

$$x(t) = \frac{2}{9}e^{-t} - \frac{2}{9}e^{2t} + \frac{2}{3}te^{2t}.$$

4) Il rotore di F vale: $\operatorname{rot} F = \nabla\times F = (1,0,0)$. La superficie è una porzione di sfera di centro l'origine e raggio r e pertanto il versore normale alla superficie è

data da: $n = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Il prodotto scalare tra il rot F e il versone n è dato da: $< \text{rot } F, n >= \sin u \cos v$:
Calcoliamo direttamente il flusso utilizzando l'integrale superficiale. $dS = r^2 \sin u$ e pertanto il flusso del vettore F uscente dalla superficie è:

$$\begin{aligned}
\text{flusso rot } F &= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \, du = \\
&= 2r^2 \int_0^{\pi/2} \cos v \, dv \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2u}{2} \, du = 2r^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2u) \, du \\
&= r^2\Big(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u \, du\Big) = r^2\Big(\frac{\pi}{2} - \Big[\frac{\sin 2u}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\Big) = \frac{1}{2}\pi r^2.
\end{aligned}$$

7 Gennaio 2026 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ **(Meccanica)** ☐

Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione. Esercizio 4 non per studenti di Meccanica

1) Sia $F = (x - z, x^2 + yz, -3xy^2)$ e Σ la porzione di superfice conica determinata da $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0$. Scrivere la superfice in coordinate cilindriche, determinare il flusso del rotore di F uscente da Σ sia direttamente che facendo uso del teorema di Stokes. (voto 10)

2) Calcolare il volume ed il baricentro della regione C del primo ottante, delimitata da $x = 0$, $y = 6$, $z = 0$ e dal cilindro parabolico $z = 4 - x^2$, assumendo che la densità sia σ. (voto 8)

3) sia $g(x, y) := x^2 + 8xy + 7y^2$ e $g(x, y) - 225 = 0$ una iperbole.

3a) Provare che è esplicitabile localmente in un intorno di $(x_0, y_0) \in Z_{g-225}$ come funzione $y = \varphi(x)$ e scrivere la derivata seconda della sua esplicitata. (voto 8)

3b) Determinare la distanza minima di $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ dall'origine. (voto 10)

4) In un impianto idraulico un pistone mobile regola la portata di una valvola. Il suo spostamento verticale $x(t)$, (misurato in cm) rispetto alla posizione di equilibrio, è influenzato da: una forza elastica di richiamo proporzionale allo spostamento; una forza di smorzamento viscoso proporzionale alla velocità; una pressione esterna costante dovuta alla pompa. Se il modello matematico che descrive il sistema è $x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 10$, dove il tempo t è misurato in secondi e all'istante iniziale il pistone si trova nella posizione di equilibrio e viene rilasciato con velocità iniziale nulla: $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Determinare la legge del moto $x(t)$. (voto 8)

Cenni di svolgimento

1) Ponendo $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, si ha

$$z = 2 - r, \qquad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Pertanto, una parametrizzazione di Σ è $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2 - r)$ e la normale uscente, orientata verso l'esterno, è data da:

$$n_e := \Phi_r \times \Phi_\theta = (r\cos\theta, r\sin\theta, r).$$

Risulta

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x-z & x^2+yz & -3xy^2 \end{vmatrix} = (-6xy-y,\ 3y^2-1,\ 2x).$$

Per il calcolo diretto del flusso, osserviamo che

$$(\nabla \times F)\cdot n_e = -6r^3 \sin\theta \cos^2\theta - r^2 \sin\theta\cos\theta + 3r^3 \sin^3\theta - r\sin\theta + 2r^2\cos\theta$$

Attenzione qui, non abbiamo normalizzato il vettore, ma sfruttiamo il fatto che $n_e drd\theta = \text{versore}(n_e)\, dS$. Integrando su $D = \{0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta < 2\pi\}$:

$$\iint_\Sigma (\nabla \times F)\cdot \mathbf{n}\, dS =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (-6r^3 \sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin\theta\cos\theta + 3r^3\sin\theta(1-\cos^2\theta) - r\sin\theta + 2r^2\cos\theta) drd\theta =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (-9r^3 \sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin\theta\cos\theta + 3r^3\sin\theta - r\sin\theta + 2r^2\cos\theta) drd\theta =$$
$$9\cdot\Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^2 \cdot \Big[\frac{\cos^3\theta}{3}\Big]_0^{2\pi} - \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^2 \cdot \Big[\frac{\sin^2\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} - 3\cdot\Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^2 \cdot \Big[\cos\theta\Big]_0^{2\pi} +$$
$$\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^2 \cdot \Big[\cos\theta\Big]_0^{2\pi} + 2\cdot\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^2 \cdot \Big[\sin\theta\Big]_0^{2\pi} = 0$$

Calcoliamo ora il flusso mediante il teorema di Stokes. La superficie Σ, nella sua espressione in coordinate cilindriche è regolare, di classe C^2, orientabile e con bordo $\partial\Sigma$ dato dalla circonferenza $C:\ x^2+y^2=4,\ z=0$ orientata positivamente (in verso antiorario). Una sua parametrizzazione è $\gamma(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Si ha

$$F(\gamma) = \left(2\cos\theta,\ 4\cos^2\theta,\ -24\cos\theta\sin^2\theta\right), \qquad \gamma'(\theta) = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0).$$

Quindi

$$\oint_C F\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(-4\cos\theta\sin\theta + 8\cos^3\theta\right) d\theta = 0.$$

Il risultato coincide con il calcolo diretto.

2) La regione C del primo ottante è delimitata da $x=0$, $\quad y=6$, $\quad z=0$, $\quad z=4-x^2$, cioé $0\le x\le 2$, $\quad 0\le y\le 6$, $\quad 0\le z\le 4-x^2$. Il volume V è dato da:

$$V=\int_0^2\int_0^6\int_0^{4-x^2} dz\,dy\,dx = 6\int_0^2 (4-x^2)\,dx = 32.$$

La massa del corpo sarà 32σ. Per il calcolo del baricentro, visto che il corpo è isotropo, il baricentro si troverà su un asse/piano di simmetria e dunque

$$y_G=\frac{1}{\sigma V}\iiint_C y\sigma\,dV=\frac{1}{6}\int_0^6 y\,dy=3.$$

(Osserviamo che la densità costante si può portare fuori dall'integrale e semplificare con il fattore presente nella massa). Analogamente

$$\begin{aligned}\bar{x}_g &= \frac{1}{V}\iiint_C x\,dV=\frac{6}{32}\int_0^2 x(4-x^2)\,dx=\frac{3}{4},\\ z_G &= \frac{1}{V}\iiint_C z\,dV=\frac{6}{32}\int_0^2\frac{(4-x^2)^2}{2}\,dx=\frac{8}{5}.\end{aligned}$$

Il baricentro è quindi

$$G=\left(\frac{3}{4},\,3,\,\frac{8}{5}\right).$$

3a) Denotiamo con $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+8xy+7y^2-225=0\}=Z_{g-225}$. C è un insieme non vuoto, chiuso ($C=g^{-1}(\{225\})$) ma non è compatto (è un'iperbole). $g\in C^2(\mathbb{R}^2)$ e sia $(x_0,y_0)\in Z_g$. Per poter applicare il teorema di Dini dobbiamo studiare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases}2x+8y=0,\\ 8x+14y=0,\\ x^2+8xy+7y^2-225=0\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad\begin{cases}x+4y=0,\\ 4x+7y=0,\\ x^2+8xy+7y^2-225=0.\end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ottiene $(4x+7y)-(4x+16y)=-9y=0\Rightarrow y=0$, che sostituita nella prima equazione dà $x=0$.

L'unico punto in cui $\nabla g=0$ è quindi $(0,0)$. Tuttavia $g(0,0)=-225\neq 0$, per cui $(0,0)$ non appartiene al vincolo. Pertanto $\nabla g(x,y)\neq 0$ per ogni $(x,y)\in Z_g$. Il teorema di Dini ci assicura che localmente, in un intorno di x_0

la g è esplicitabile come $y = \varphi(x)$ e

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\frac{2x+8\varphi(x)}{8x+14\varphi(x)}.\\
\varphi''(x) &= \frac{(2x+8\varphi(x))\,(8+14\varphi'(x)) - (2+8\varphi'(x))\,(8x+14\varphi(x))}{(8x+14\varphi(x))^2} =\\
&= \frac{9\big(\varphi(x)-x\varphi'(x)\big)}{(4x+7\varphi(x))^2}
\end{aligned}$$

3b) Per semplificare i calcoli minimizziamo il quadrato della distanza di un punto dell'iperbole dall'origine degli assi. Cioè dobbiamo determinare il minimo assoluto di $f(x,y) = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo $g(x,y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$.

Osserviamo che sia la funzione f che il vincolo g sono di classe almeno C^2 in tutto $\mathbb{R}^2$, inoltre il gradiente di g è $\nabla g(x,y) = (2x+8y,\ 8x+14y) \neq (0,0), \quad \forall (x,y) \in Z_g$. Abbiamo già osservato sopra che $C = Z_g$ è un insieme chiuso ma non è compatto (è un'iperbole), quindi l'esistenza del minimo assoluto deve essere motivata separatamente.

Per la ricerca dell'eventuale minimo applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e consideriamo la funzione $F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 8xy + 7y^2 - 225)$. Dovrà risultare:

$$\begin{aligned}
\nabla(x^2+y^2) &= \lambda\,\nabla(x^2+8xy+7y^2-225) \quad \text{cioè} \quad (2x,2y) = \lambda(2x+8y,\ 8x+14y)\\
\lambda &= \frac{2x}{2x+8y} = \frac{2y}{8x+14y},
\end{aligned}$$

$$16x^2+28xy = 4xy+16y^2, \quad 16x^2+24xy-16y^2=0, \quad x^2+\frac{3}{2}xy-y^2=0.$$

Risolvendo come equazione di secondo grado in x:

$$\Delta = \left(\frac{3}{2}y\right)^2 + 4y^2 = \frac{25}{4}y^2, \qquad x = \frac{1}{2}\Big(-\frac{3}{2}y \pm \frac{5}{2}y\Big), \qquad x = \frac{1}{2}y \quad \text{o} \quad x = -2y,$$

Sostituiamo ora questi valori nell'iperbole $x^2+8xy+7y^2 = 225$.

Se $x = \dfrac{1}{2}y$, allora:

$$\left(\frac{1}{2}y\right)^2 + 8\left(\frac{1}{2}y\right)y + 7y^2 = 225, \quad \frac{1}{4}y^2 + 4y^2 + 7y^2 = 225$$
$$\frac{45}{4}y^2 = 225 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 20 \qquad (x,y) = (\pm\sqrt{5}, \pm 2\sqrt{5})$$

Se invece $x = -2y$ l'equazione $4y^2 - 16y^2 + 7y^2 = -5y^2 = 225$ non ammette soluzioni.

Abbiamo determinato due punti critici $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

Ovviamente la funzione f in questi punti assume lo stesso valore e quindi basterà studiarne uno solo. Esaminiamo il punto $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$. Per il punto 3a) il vincolo g è esplicitabile come $y = \varphi(x)$. Sia $h(x) = f(x, \varphi(x)) = x^2 + \varphi(x)^2$. Ovviamente $h \in C^2$. Differenziando e usando il vincolo, otteniamo i punti critici:

$$h'(x) = 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x), \qquad h'(\sqrt{5}) = 0.$$

La derivata seconda di h è

$$h''(x) = 2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x).$$

Dall'esercizio 3a) risulta: $\varphi'(\sqrt{5}) = -\frac{1}{2}$, $\quad \varphi''(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{72}$ e quindi

$$h''(\sqrt{5}) \;=\; 2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{72} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{5}{18} > 0.$$

Quindi il punto $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ è un minimo locale vincolato. Resta da provare che è un minimo vincolato assoluto.

- Osserviamo che se $r \to \infty$ la funzione $f(x,y) = r^2 \to \infty$, quando $(x,y) \in C$ e $x^2 + y^2 = r^2$, cioè fuori da un disco sufficientemente grande, f è grande.

Quindi, per ogni $M > 0$ esiste $r_M > 0$ tale che $f(x,y) \geq M$ per ogni (x,y) tale che $\sqrt{x^2+y^2} \geq r_M$ e $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$.

Scegliamo $M > 25 = f(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ e denotiamo con r_{25} il valore corrispondente, ottenuto dalla definizione di limite, e denotiamo con K l'insieme

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 8xy + 7y^2 = 225\} \cap \overline{B}(0, r_{25}) \neq \emptyset.$$

Il punto $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) \in K$, K è un compatto, f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass f ammette minimo assoluto in K. Siccome il metodo dei moltiplicatori di Lagrange fornisce un unico candidato, quello deve essere il minimo assoluto in K. Nel complementare di K la f assume valori maggiori e quindi il punto individuato è il minimo assoluto cercato.
Per provare che il punto determinato è di minimo assoluto avremmo potuto anche osservare che f è una funzione convessa poiché la sua matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \det H_f(x,y) > 0$$

Se una funzione convessa ammette un punto critico, quel punto è sempre di minimo assoluto.

4) Consideriamo il problema di Cauchy

$$x'' + 4x' + 5x = 10, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

L'equazione omogenea è $x'' + 4x' + 5x = 0$. Scriviamo l'equazione caratteristica: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ che ammette radici complesse coniugate: $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x(t) = e^{-2t}\big(C_1 \cos t + C_2 \sin t\big).$$

Cerchiamo una soluzione particolare $x_p(t) = A$. Sostituendo nell'equazione si ottiene $A = 2$. L'integrale generale della equazione completa è

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-2t}\big(C_1 \cos t + C_2 \sin t\big) + 2. \\ x'(t) &= e^{-2t}\big[-2(C_1 \cos t + C_2 \sin t) - C_1 \sin t + C_2 \cos t\big]. \end{aligned}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$x(0) = C_1 + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = -2.$$

$$x'(0) = -2C_1 + C_2 = 0.$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$x(t) = e^{-2t}\big(-2\cos t - 4\sin t\big) + 2.$$

19 Gennaio 2026 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ **(Meccanica)** ☐

---

1) Determinare i valori massimi e minimi di $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sotto i vincoli

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2=1, \qquad z-x=0.$$

2) Sia S è la superficie del cono $z^2=3(x^2+y^2)$, limitata dai piani $z=0$ e $z=3$.

Calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dS,$$

3) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}(x+1)^n.$$

Cenni di svolgimento

1) Dal secondo vincolo ricaviamo $z=x$ che, sostituito nella funzione f e nel primo vincolo, dà:

$$f(x,y,z(x,y))=2x^2+y^2, \qquad g(x,y)=5x^2+y^2=4.$$

Risulta $\nabla g=(0,0)$ solo nell'origine, dunque $Z_g\cap\{\nabla g=(0,0)\}=\emptyset$.

$$\nabla f=\begin{pmatrix}4x\\2y\end{pmatrix}, \qquad \nabla g=\begin{pmatrix}10x\\2y\end{pmatrix}.$$

Il sistema $\nabla f=\lambda\nabla g$ fornisce:

$$\begin{cases}4x=10\lambda x,\\ 2y=2\lambda y.\end{cases} \qquad (x,y)\neq(0,0).$$

- $x \neq 0$: Dalla prima equazione: $4x = 10\lambda x \implies \lambda = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.
- $x = 0$: Allora la prima equazione è verificata per ogni λ.
- $y \neq 0$: Dalla seconda equazione: $2y = 2\lambda y \implies \lambda = 1$.
- $y = 0$: La seconda equazione è verificata automaticamente per ogni λ.

Pertanto

- Se $y = 0$ e $x \neq 0$, otteniamo $\lambda = \dfrac{2}{5}$ e dal vincolo:

  $$5x^2 + 0 = 4 \implies x^2 = \frac{4}{5} \implies x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

  Quindi i punti critici sono $(x, y) = \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$.
- Se $x = 0$ e $y \neq 0$, otteniamo $\lambda = 1$ e dal vincolo:

  $$0 + y^2 = 4 \implies y = \pm 2.$$

  Quindi i punti critici sono $(x, y) = (0, \pm 2)$.

Il vincolo $g(x, y) = 0$ è un compatto, f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass, esistono massimo e minimo assoluti. Risulta:

$$f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}, \qquad f(0, \pm 2, 0) = 4.$$

$$f_{\text{min}} = \frac{8}{5}, \qquad f_{\text{max}} = 4$$

2) In coordinate cilindriche l'equazione del cono diventa $z^2 = 3r^2$. Poiché la superficie è limitata da $z \geq 0$, si ottiene $z = \sqrt{3}\,r$. Dal vincolo $0 \leq z \leq 3$ segue $0 \leq r \leq \sqrt{3},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Una parametrizzazione della superficie conica S è

$$\Phi(r, \theta) = \left(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ \sqrt{3}\,r\right), \quad 0 \leq r \leq \sqrt{3}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Calcoliamo il dS $\quad \Phi_r = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ \sqrt{3}),\quad \Phi_\theta = (-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0)$. Il prodotto vettoriale è

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \sqrt{3} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(-\sqrt{3}r\cos\theta,\ -\sqrt{3}r\sin\theta,\ r\right).$$

Il suo modulo vale
$$\|\Phi_r \times \Phi_\theta\| = \sqrt{3r^2 + r^2} = 2r.$$

Pertanto $dS = 2r\, dr\, d\theta$.
$$\begin{aligned}\iint_S (x^2+y^2)\, dS &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \cdot 2r\, dr = \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} 2r^3\, dr = 4\pi \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{3}} = 9\pi.\end{aligned}$$

3) Il raggio di convergenza è
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}(n+1)(\log(n+1))^2 = 1.$$

Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $|x+1| < 1 \iff x \in (-2,0)$.
Per $x = -2$ la serie diventa $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$.
Per $x = 0$ la serie diventa $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\log n)^2}$. Quindi, se $x = 0$ oppure $x = -2$ la serie in valore assoluto diventa:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}.$$

Si tratta di una serie numerica a termini positivi $a_n = \dfrac{1}{n(\log n)^2}$, il cui termine generale è non crescente, quindi ha lo stesso comportamento della serie $\sum_k 2^k a_{2^k}$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \quad \sim \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k\big(\log 2^k\big)^2} = \frac{1}{\big(\log 2\big)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Quindi la serie data converge assolutamente agli estremi dell'intervallo di convergenza. Usando il teorema di Abel, la serie converge uniformemente in $[-2,0]$.

2 Febbraio 2026 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ **(Meccanica)** ☐

---

1) Sia A il campo vettoriale $A(x,y,z) := (2x+3z,\ -xz-y,\ y^2+2z)$. Calcolare il flusso uscente di A attraverso la superficie sferica S di raggio 3 e centro nel punto $C = (3,-1,2)$.

2) Studiare in $\mathbb{R}$ la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}.$$

3) Determinare massimo e minimo della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = x^3 - x^2 - y^2 + 1$ sul vincolo $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 2,\ y \ge -x\}$.

Cenni di svolgimento

1) L'equazione cartesiana della sfera è $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2 = 9$, mentre in coordinate sferiche è

$$\begin{cases} x = 3 + 3\sin\varphi\cos\theta, \\ y = -1 + 3\sin\varphi\sin\theta, \\ z = 2 + 3\cos\varphi, \end{cases} \qquad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

La superficie sferica è regolare, il campo A è di classe C^1 e quindi per il teorema della divergenza (di Gauss)

$$\int_S A \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot A\, dV,$$

dove V è il volume racchiuso da S e $\mathbf{n}$ è la normale uscente. Risulta

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial}{\partial x}(2x+3z) + \frac{\partial}{\partial y}(-xz-y) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2+2z) = 2-1+2 = 3.$$

Pertanto
$$\int_S A\cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot A\,dV = 3\iiint_V dV = 3\,\mathrm{Vol}(V) = 3\frac{4}{3}\pi(3)^3 = 108\pi.$$

2) Per ogni $x\in\mathbb{R}$, la successione $1/\log(n+x^2)\geq 0$ è decrescente in n, per cui la serie è convergente per ogni x (per il criterio di Leibniz). La stima del resto è
$$\left|\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}\right| \leq \frac{1}{\log(m+1+x^2)} \leq \frac{1}{\log(m+1)} \longrightarrow 0,$$
quindi vi è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

Ovviamente non vi è convergenza totale: si ha che
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}\right| = \frac{1}{\log n}$$
La serie $\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^{-1}$ diverge, quindi non c'è convergenza totale in $\mathbb{R}$.

3) $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, C è un compatto, quindi esistono massimi e minimi vincolati (assoluti). Dapprima cerchiamo i punti critici in C°, quindi i punti tali che
$$\nabla f(x,y) = (0,0), (x,y)\in C^\circ \qquad \begin{cases} 3x^2-2x=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(3x-2)=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x=0 \ \vee \ x=\dfrac{2}{3} \\ y=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad O=(0,0)\notin C^\circ, \qquad P=\left(\frac{2}{3},0\right)\in C^\circ$$
Valutiamo la matrice Hessiana in P per determinare la natura del punto critico:
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_f\left(\tfrac{2}{3},0\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(sella)}$$
Dunque i punti di massimo e minimo assoluto dovranno trovarsi sulla frontiera di C che risulta costituita da due curve:
$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}\,(C) &= E_1\cup E_2 \\ E_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 2,\ y=-x\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=-x,\ -1\leq x\leq 1\}. \\ E_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=2,\ y\geq -x\} \end{aligned}$$

Studiamo f sul vincolo E_1. Consideriamo quindi

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t,-t) = t^3 - 2t^2 + 1, \qquad t \in [-1,1] \\ g'(t) &= 3t^2 - 4t = t(3t-4), \quad g'(t) = 0 \iff t = 0 \vee t = \frac{4}{3} > 1. \end{aligned}$$

Il valore $t = 0 \in [-1,1]$ e fornisce il punto $(0,0)$. Notando che $g'(x) > 0$ in $[-1,0)$ e $g'(x) < 0$ in $(0,1]$ si deduce che l'origine è un massimo locale per f lungo la restrizione E_1, mentre $t = \pm 1$ sono dei minimi locali lungo la restrizione E_1. $f(0,0) = 1$, $f(1,-1) = 0$, $f(-1,1) = -2$.
Studiamo f sul vincolo E_2, utilizzando le coordinate polari.
Poniamo $x = \sqrt{2}\cos\theta, \qquad y = \sqrt{2}\sin\theta.$

$$y \geq -x \iff \sin\theta \geq -\cos\theta \iff \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Quindi

$$\begin{aligned} & f(x,y) = x^3 - x^2 - y^2 + 1, \ \& \ x^2 + y^2 = 2 \ \Rightarrow \ f(x,y) = x^3 - 2 + 1 = x^3 - 1. \\ \Rightarrow \quad & g(\theta) = \left(\sqrt{2}\cos\theta\right)^3 - 1 = 2\sqrt{2}\cos^3\theta - 1, \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]. \\ & g'(\theta) = 2\sqrt{2}\cdot 3\cos^2\theta(-\sin\theta) = -6\sqrt{2}\cos^2\theta\sin\theta. \\ & g'(\theta) = 0 \iff \sin\theta = 0 \ \vee \ \cos\theta = 0, \qquad \theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Valutiamo g nei punti critici e agli estremi dell'intervallo.

$$\begin{aligned} &\theta = -\frac{\pi}{4}: \quad f(1,-1) = g(-\frac{\pi}{4}) = -1 + 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = -1 + 1 = 0. \\ &\theta = 0: \quad f(\sqrt{2},0) = g(0) = 2\sqrt{2} - 1. \\ &\theta = \frac{\pi}{2}: \quad f(0,\sqrt{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = -1. \\ &\theta = \frac{3\pi}{4}: \quad f(-1,1) = g(\frac{3\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 1 = -1 - 1 = -2. \end{aligned}$$

Per il teorema di Weierstrass allora

$$\max_C f = 2\sqrt{2} - 1 \quad \text{in} \quad (\sqrt{2},0), \qquad \min_C f = -2 \quad \text{in} \quad (-1,1).$$

30 Marzo 2026 - Analisi Matematica II (Civile)

Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione.

1) Calcolare la massa della porzione di piano delimitata da $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=9$, quando la funzione densità è $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

2) In un circuito RLC, la corrente $i(t)$ soddisfa l'equazione $Li''(t)+Ri'(t)+\frac{1}{C}i(t)=V(t)$. Siano: la resistenza $R=2$, l'induttanza $L=1$ e la capacità $C=\frac{1}{2}$. Se la tensione applicata è $V(t)=5\cos(2t)$ e la corrente iniziale e la sua derivata iniziale sono nulle ($i(0)=0$, $i'(0)=0$), calcolare $i(t)$.

3) Si determinino i punti di massimo e minimo vincolati assoluti della funzione $f(x,y,z)=(x-y+z)^2$ soggetta al vincolo $x^2+2y^2+z^2=1$.

Cenni di svolgimento

1) La massa M di una lamina piana con densità $f(x,y)$ è definita come

$$M=\iint_D f(x,y)\,dxdy,$$

dove D è la regione del piano occupata dalla lamina.

In questo caso D è una corona circolare, cioè la regione compresa tra due circonferenze concentriche di raggi 2 e 3. D in coordinate polari è data da:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \end{cases} \qquad r\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi].$$

In coordinate polari valgono le seguenti relazioni fondamentali:

$$x^2+y^2=r^2, \qquad \sqrt{x^2+y^2}=r, \qquad dxdy=r\,dr\,d\theta.$$

$$
\begin{aligned}
M &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_2^3 r\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_2^3 r^2\,dr\,d\theta. = \\
&= 2\pi\int_2^3 r^2\,dr = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_2^3 = 2\pi\frac{27-8}{3} = \frac{38}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

2) Sostituendo i valori:

$$
i''(t)+2i'(t)+2i(t)=5\cos(2t), \qquad i(0)=0,\ i'(0)=0.
$$

L'equazione omogenea associata è $i''(t)+2i'(t)+2i(t)=0$. L'equazione caratteristica è $r^2+2r+2=0$. Le radici sono

$$
r=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=-1\pm i.
$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$
i_h(t)=e^{-t}(A\cos t+B\sin t),
$$

dove A e B sono costanti da determinare.

Il termine noto è $5\cos(2t)$, quindi proviamo una soluzione particolare del tipo $i_p(t)=\alpha\cos(2t)+\beta\sin(2t)$.

Calcoliamo le derivate:

$$
\frac{di_p}{dt}=-2\alpha\sin 2t+2\beta\cos 2t, \qquad \frac{d^2 i_p}{dt^2}=-4\alpha\cos 2t-4\beta\sin 2t.
$$

Sostituendo nell'equazione differenziale:

$$
(-4\alpha\cos 2t-4\beta\sin 2t)+2(-2\alpha\sin 2t+2\beta\cos 2t)+2(\alpha\cos 2t+\beta\sin 2t)=5\cos 2t.
$$

Raggruppando i termini:

$$
(-4\alpha+4\beta+2\alpha)\cos 2t+(-4\beta-4\alpha+2\beta)\sin 2t=5\cos 2t.
$$

Dunque

$$
\begin{cases}
(-4\alpha+4\beta+2\alpha)=-2\alpha+4\beta=5,\\
(-4\beta-4\alpha+2\beta)=-2\beta-4\alpha=0.
\end{cases}
$$

Dalla seconda equazione: $-4\alpha - 2\beta = 0 \implies 2\beta = -4\alpha \implies \beta = -2\alpha$.
Sostituendo nella prima: $-2\alpha + 4(-2\alpha) = -2\alpha - 8\alpha = -10\alpha = 5 \implies \alpha = -\frac{1}{2}$.
Quindi $\beta = -2(-\frac{1}{2}) = 1$ e una soluzione particolare è data da:

$$i_p(t) = -\frac{1}{2}\cos 2t + \sin 2t.$$

L'integrale generale dell'equazione completa è

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t) - \frac{1}{2}\cos 2t + \sin 2t.$$

Determiniamo ora la soluzione del problema di Cauchy, associato alle condizioni iniziali: $i(0) = 0$, $i'(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
i(0) &= e^0(A\cdot 1 + B\cdot 0) - \frac{1}{2}\cdot 1 + 0 = A - \frac{1}{2} = 0 \implies A = \frac{1}{2}.\\
i'(t) &= \frac{d}{dt}[e^{-t}(A\cos t + B\sin t)] + \frac{d}{dt}(-\frac{1}{2}\cos 2t + \sin 2t) =\\
&= e^{-t}[-A\cos t - B\sin t + (-A\sin t + B\cos t)] + \sin 2t + 2\cos 2t =\\
&= = e^{-t}[(-A+B)\cos t + (-B-A)\sin t] + \sin 2t + 2\cos 2t\\
i'(0) &= (-A+B) + 2 = 0 \implies -\frac{1}{2} + B + 2 = 0 \implies B = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

La soluzione cercata è

$$i(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{2}\cos t - \frac{3}{2}\sin t\right) - \frac{1}{2}\cos 2t + \sin 2t$$

3) Possiamo osservare che $f(x,y,z) = (x-y+z)^2$ e $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$ sono funzioni di classe almeno $C^2(\mathbb{R}^3)$. Inoltre $f(x,y,z) \geq 0$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ne segue che i punti

$$\left\{(x,y,z) : z = -x + y \quad \& \quad x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0\right\}$$

sono di minimo assoluto per f. La prima è l'equazione di un piano, la seconda quella di un ellissoide. Quindi i minimi assoluti si troveranno nei punti dell'ellisse che si ottiene intersecando le due figure.
L'ellissoide è un compatto, f è continua e dunque per il Teorema di Weierstrass ammetterà anche massimi assoluti vincolati.

Osserviamo che $Z_g \cap \nabla g = \emptyset$. Infatti $\nabla g = \big(2x, 4y, 4z\big) = (0,0,0)$ solo nell'origine e $(0,0,0) \notin Z_g$.
Costruiamo la Lagrangiana

$$L(x,y,z,a) = (x-y+z)^2 + a\big(x^2+2y^2+2z^2-1\big)$$

e applichiamo a lei il Teorema di Fermat. Risulta

$$\begin{aligned} L'_x &= 2(x-y+z)+2ax = 0 \\ L'_y &= -2(x-y+z)+4ay = 0 \\ L'_z &= 2(x-y+z)+4az = 0 \\ L'_a &= x^2+2y^2+2z^2-1 = 0. \end{aligned}$$

Ricaviamo $2(x-y+z)$ dalle prime 3 equazioni. Eguagliando i termini si ottiene

$$2ax = -4ay, \quad 2ax = 4az.$$

Se $a = 0$ si riottengono i punti di minimo trovati precedentemente; se $a \neq 0$ allora $y = -x/2$, $z = x/2$, che sostituiti nel vincolo forniscono

$$\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\Big), \quad \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\Big).$$

La funzione in questi due punti assume il valore $\frac{1}{2}$ che è quindi il massimo assoluto vincolato cercato.

1) Calcolare il seguente integrale curvilineo facendo uso del Teorema di Stokes:

$$\int_{+\partial\Sigma} (2z^2 - x)dx + (z+x)dy + ydz$$

dove $\Sigma = \{(x,y,z) : 2z = 1 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

La superficie Σ è una porzione di paraboloide che è C^2, regolare, orientata e con bordo. Il bordo è dato da $(\cos t, \sin t, 0)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$. La forma differenziale $(2z^2 - x)dx + (z+x)dy + ydz$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, ma non è esatta. Infatti, posto $F = ((2z^2 - x), z + x, y)$, risulta:

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z^2 - x & z + x & y \end{vmatrix} = 4z\vec{j} + \vec{k} = (0, 4z, 1).$$

$n = (x, y, 1)$, $\|n\| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $dS = \|n\| dxdy$ e dunque

$$\begin{aligned}
\int_{+\partial\Sigma} (2z^2 - x)dx + (z+x)dy + ydz &= \int_\Sigma \operatorname{rot}(F) \cdot \frac{n}{\|n\|} dS = \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (4zy + 1)\, dxdy = \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} [2y(1 - x^2 - y^2) + 1]\, dxdy = \\
&= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 [2r(1 - r^2)\sin t + 1] r dr = \pi.
\end{aligned}$$

2) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = x^2 e^{yz}$ nell'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

A è un compatto, $f \in C(A)$ e dunque tali punti esistono per il teorema di Weierstrass. I punti del tipo: $(0, y, z)$ con $y^2 + z^2 \le 1$ sono tutti punti di minimo assoluto per la funzione f che in tali punti assume valore nullo. Risulta poi $f \in C^\infty(A^\circ)$ e dunque possiamo studiare i punti interni di A con il teorema di Fermat.

$$\begin{cases} (x,y,z) \in A^\circ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{yz} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 ze^{yz} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = x^2 ye^{yz} \end{cases} = (0,0,0) \Longleftrightarrow x = 0, y^2 + z^2 < 1.$$

Questi punti li abbiamo già studiati con la regola del segno. Cerchiamo allora i punti di massimo e di minimo assoluti sulla frontiera di A: $\mathrm{Fr}(A) = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Osserviamo intanto che non ci sono punti del vincolo in cui il gradiente del vincolo si annulla, perché $(0,0,0)$ non sta nel vincolo. Sia $G(x,y,z,\alpha) = x^2 e^{yz} - \alpha(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Risulta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x} = 2xe^{yz} - 2\alpha x \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} = x^2 ze^{yz} - 2\alpha y \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} = x^2 ye^{yz} - 2\alpha z \\ \dfrac{\partial G}{\partial \alpha} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} = (0,0,0,0)$$

Dalla prima equazione otteniamo $x = 0$ oppure $e^{yz} = \alpha$. Se $x = 0$ allora dalla quarta equazione $(y = \cos t, z = \sin t)$ e dunque dalle altre due equazioni risulta $\alpha = 0$. I punti stazionari di G sarebbero $(0, \cos t, \sin t, 0)$. (Le terne $(0, \cos t, \sin t)$ le abbiamo già studiate, sono di minimo assoluto per f).

Se invece $\alpha = e^{yz}$ allora $\alpha \neq 0$ e dunque dalla seconda equazione se $z = 0$ allora $y = 0$ e dunque $x = \pm 1$, se invece imponiamo $y = 0$ dalla terza equazione otteniamo ancora $z = 0, x = \pm 1$.

Nei punti $(\pm 1, 0, 0)$ la funzione assume il valore 1. Per il teorema di Weierstrass questi sono i punti di massimo assoluto per f. Riepilogando i punti di minimo assoluto sono i punti $(0, y, z)$ con $y^2 + z^2 \leq 1$, quelli di massimo assoluto sono $(\pm 1, 0, 0)$.

3) Calcolare il seguente integrale curvilineo facendo uso delle formule di Green

$$\frac{8}{3}\cdot\int_C -x^2y^3dx + ye^ydy$$

dove $C = +Fr(A)$, con $A = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. Il campo vettoriale $F = (-x^2y^3, ye^y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, ma non è conservativo perché non è irrotazionale. L'integrale dunque dipende dal percorso scelto.

$$\begin{aligned}
\frac{8}{3}\cdot\int_C -x^2y^3dx + ye^ydy &= \frac{8}{3}\cdot\iint_A \frac{\partial(ye^y)}{\partial x} - \frac{\partial(-x^2y^3)}{\partial y}dxdy = \\
&= \frac{8}{3}\cdot\iint_A 3x^2y^2dxdy = \\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^2 t dt\int_1^2 r^5dr = \\
&= 4B(\frac{3}{2},\frac{3}{2})\int_1^2 r^5dr = \left(\text{ oppure } 8\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt\left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2\right) \\
&= 4\frac{\Gamma^2(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}\cdot\frac{21}{2} = 2\frac{\pi}{4}\cdot\frac{21}{2} = \frac{21}{4}\pi.
\end{aligned}$$

4) Esercizio. Dire se esistono il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ nell'insieme $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$. In caso affermativo, determinarli.

Il dominio D di f è un triangolo di $\mathbb{R}^3$; ogni punto di D è punto di frontiera. Essendo f continua e definita su un compatto, f ammette massimo e minimo.

Sia E l'insieme dei punti di massimo o di minimo per f.

Sia $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y<1,\ x>0,\ y>0\}$. Su D si ha $(x,y,z) = (x,y,1-x-y)$ e $(x,y)\in T$; si ha quindi

$$g(x,y) := f(x,y,1-x-y) = x^2+y^2+(1-x-y)^2, \quad g : T \to \mathbb{R},$$

Risulta allora

$$g(x,y) = 2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1.$$

Se $(x, y, z) \in E$, allora (x, y) è un estremante per g. Consideriamo g su $T°$.
Per ogni $(x, y) \in T°$ si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x + 2y - 2, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y + 2x - 2.$$

Si ha

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 4x + 2y - 2 = 0 \\ 4y + 2x - 2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Consideriamo g sulla frontiera di T. Posto

$S_1 = \{(x, 0),\ 0 \le x \le 1\}, \quad S_2 = \{(0, y),\ 0 \le y \le 1\}, \quad S_3 = \{(x, 1-x),\ 0 \le x \le 1\};$

si ha $\mathrm{Fr}(T) = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.
Su S_1 si ha $g(x, 0) = 2x^2 - 2x + 1$. Si ottiene $g'(x) = 4x - 2$

e quindi

$$x = \frac{1}{2}.$$

Analogamente su S_2:

$$g(0,y) = 2y^2 - 2y + 1.$$

Su S_3:

$$g(x, 1-x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

Si ha:

$$f(0,0,1) = f(0,1,0) = f(1,0,0) = 1$$

e

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Quindi

$$\max(f) = 1$$

e

$$\min(f) = \frac{1}{3}.$$

8 Giugno 2026 - Analisi Matematica II

(Civile) ☐ **(Elettr. e Inf.)** ☐ **(Meccanica)** ☐ **BES/DSA** ☐

Nome: ____________________ Cognome ______________________________ Matr. ___________

Le risposte non motivate non saranno prese in considerazione. Svolgere 3 esercizi su 4. L'ultimo esercizio è rivolto agli Studenti dei CdS Civile e Ambientale e Ingegneria Informatica ed Elettronica

1) Calcolare il seguente integrale curvilineo facendo uso del Teorema di Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma^+} (z^2+y)dx + zdy + ydz$$

dove $\Sigma = \{(x,y,z) : z = 1 - x^2 - y^2,\ x^2+y^2 \le 1\}$.

2) Sia $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale $V(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$ e γ la curva individuata da: $(\cos t, \sin t, -\cos t - \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Dire se V è conservativo, se si calcolare un potenziale di V e l'integrale di V lungo la curva γ.

3) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = z^2 e^{xy}$ nell'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

4) Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{ty^2}{y^2+4}, \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Inoltre si determini il valore $\alpha > 0$ per cui $\dfrac{y(t)}{t^\alpha}$ tende a un numero finito e non nullo per $t \to +\infty$.

Svolgimento

1) La forma differenziale $(z^2+y)dx+zdy+ydz$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, ma non è esatta. Infatti, posto $F=((z^2+y),z,y)$, risulta:

$$\mathrm{rot}F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2+y & z & y \end{vmatrix} = 2z\vec{j}-\vec{k}=(0,2z,-1).$$

$n=(2x,2y,1)$ e dunque

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma^+}(z^2+y)dx+zdy+ydz &= \int_\Sigma \mathrm{rot}F\cdot\frac{n}{\|n\|}dS= \\ &= \iint_{\{x^2+y^2\}}[4y(1-x^2-y^2)-1]dxdy= \\ &= \int_0^{2\pi}dt\int_0^1[4r(1-r^2)\sin t-1]rdr=-\pi. \end{aligned}$$

2) Risulta $V\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e

$$\mathrm{rot}V = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (0,0,0).$$

Ne segue che il campo è irrotazionale e dunque conservativo (visto che è definito in un convesso). Calcoliamo ora un potenziale di V. Se U è un potenziale dovrà risultare:

$$U(x,y,z)=\int_0^x 0dt+\int_0^y xdt+\int_0^z(x+y)dt \quad = \quad xy+xz+yz+c.$$

Siccome la curva γ è chiusa: $(x=\cos t, y=\sin t, z=-\cos t-\sin t, 0\le t\le 2\pi)$ ne segue che l'integrale cercato è nullo.

3) A è un compatto, $f\in C(A)$ e dunque tali punti esistono per il teorema di Weierstrass. I punti del tipo: $(x,y,0)$ con $x^2+y^2\le 1$ sono tutti punti di minimo assoluto per la funzione f che in tali punti assume valore nullo. Risulta poi $f\in C^\infty(A°)$ e dunque possiamo studiare i punti interni di A con il teorema di Fermat.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz^2 e^{xy} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz^2 e^{xy} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2ze^{xy} \end{cases} = (0,0,0) \Longleftrightarrow z = 0, x^2 + y^2 < 1.$$

Questi punti li abbiamo già studiati con la regola del segno.

Cerchiamo allora i punti di massimo e di minimo assoluti sulla frontiera di A: $\mathrm{Fr}(A) = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Sia $G(x,y,z,\alpha) = z^2 e^{xy} - \alpha(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Risulta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x} = yz^2 e^{xy} - 2\alpha x \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} = xz^2 e^{xy} - 2\alpha y \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} = 2ze^{xy} - 2\alpha z \\ \dfrac{\partial G}{\partial \alpha} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{cases} = (0,0,0,0)$$

Dalla terza equazione otteniamo $z = 0$ oppure $e^{xy} = \alpha$.

Se $z = 0$ allora dalla quarta equazione $(x = \cos t, y = \sin t)$ e dunque dalle prime due equazioni risulta $\alpha = 0$. I punti stazionari di G sarebbero $(\cos t, \sin t, 0, 0)$. (Le terne $(\cos t, \sin t, 0)$ le abbiamo già studiate, sono di minimo assoluto per f).

Se invece $\alpha = e^{xy}$ allora $\alpha \neq 0$ e dunque dalla prima equazione se $y = 0$ allora $x = 0$ e dunque $z = \pm 1$, se invece imponiamo $x = 0$ dalla seconda equazione otteniamo ancora $y = 0, z = \pm 1$. Nei punti $(0,0,\pm 1)$ la funzione assume il valore 1.

Per il teorema di Weierstrass questi sono i punti di massimo assoluto per f.

Riepilogando i punti di minimo assoluto sono i punti $(x,y,0)$ con $x^2 + y^2 \leq 1$, quelli di massimo assoluto sono $(0,0,\pm 1)$.

4) Si tratta di un'equazione non lineare del primo ordine a variabili separabili.

Integrando si ottiene subito

$$\int \left(\frac{y^2+4}{y^2}\right) dy = \int t\,dt + C$$

da cui

$$\int \left(1+\frac{4}{y^2}\right) dy = \frac{t^2}{2} + C$$

quindi imponendo il dato di Cauchy, si ha immediatamente $C = 0.$ Dunque si ha

$$\frac{y^2-4}{y} = \frac{t^2}{2}$$

Il numeratore può essere visto come un'equazione di secondo grado in y. Quindi risolvendo si ha

$$y(t) = \frac{\frac{t^2}{2} \pm \sqrt{\frac{t^4}{4}+16}}{2} = \frac{t^2 \pm \sqrt{t^4+64}}{4}.$$

Siccome il dato di Cauchy è incompatibile con la scelta del segno meno (si avrebbe $y(0) = -2$) la soluzione richiesta del problema di Cauchy proposto è

$$y(t) = \frac{t^2 + \sqrt{t^4+64}}{4}.$$

Ora, siccome $\sqrt{t^4+64} \sim t^2$ per $t \to +\infty$, si ha che $y(t) \sim \dfrac{t^2}{2}$ quindi il valore di α richiesto è $\alpha = 2$.