

I Esonero 24 marzo 2023

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{4} + \frac{x^3 + y^3}{3}$$

nel quadrato di vertici $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, 0)$. Cosa si può dire dei massimi e minimi relativi di f nel suo campo di esistenza \mathbb{R}^2 ?

Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^3\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{3}\right) + y^3\left(\frac{y}{4} + \frac{1}{3}\right)$$

nel quadrato di vertici $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, 0)$. Cosa si può dire dei massimi e minimi relativi di f nel suo campo di esistenza \mathbb{R}^2 ?

Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^3\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{2}\right) + y^3\left(\frac{y}{2} + \frac{2}{3}\right)$$

nel quadrato di vertici $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, 0)$. Cosa si può dire dei massimi e minimi relativi di f nel suo campo di esistenza \mathbb{R}^2 ?

2) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della

$$f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{4} + \frac{x^3 - y^3}{3}$$

nel quadrato di vertici $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, 0)$. Cosa si può dire dei massimi e minimi relativi di f nel suo campo di esistenza \mathbb{R}^2 ?

Svolgimento

1) Sia Q il quadrato di vertici $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(-1, 0)$. Siccome Q è un compatto ed f è continua, il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di

punti di massimo e di minimo assoluti. Iniziamo a cercarli in Q° . Siccome $f \in C^2(Q^\circ)$ i punti di massimo e di minimo vanno cercati fra quelli che annullano il gradiente. Le derivate parziali di f sono date da

$$\{\nabla f(x, y) = (x^3 + x^2, y^3 + y^2) = (0, 0), \quad (x, y) \in Q^\circ\} = \emptyset.$$

I punti di massimo e di minimo si troveranno allora sulla frontiera di Q .

- Primo tratto $x = 0, -1 \leq y \leq 0$: risulta $f(0, y) = \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} := g_0(y)$. Risulta $g'_0(y) = y^2(y + 1)$, quindi g_0 è non decrescente, pertanto $y = -1$ punto di minimo e $y = 0$ punto di massimo per g_0 .
- tratto $x = -1, -1 \leq y \leq 0$: risulta $f(-1, y) = -\frac{1}{12} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} := g_{-1}(y)$. Risulta $g'_{-1}(y) = y^2(y + 1)$, quindi g_{-1} è non decrescente, pertanto $y = -1$ punto di minimo e $y = 0$ punto di massimo per g_{-1} .
- tratto $y = 0, -1 \leq x \leq 0$: risulta $f(x, 0) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} := h_0(x)$. Risulta $h'_0(x) = x^2(x + 1)$, quindi h_0 è non decrescente, pertanto $x = -1$ punto di minimo e $x = 0$ punto di massimo per h_0 .
- tratto $y = -1, -1 \leq x \leq 0$: risulta $f(x, -1) = -\frac{1}{12} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} := h_{-1}(x)$. Risulta $h'_{-1}(x) = x^2(x + 1)$, quindi h_{-1} è non decrescente, pertanto $x = -1$ punto di minimo e $x = 0$ punto di massimo per h_{-1} .

In base alle risultanze allora, per il teorema di Weierstrass,

$$\min_{(x,y) \in Q} f(x, y) = f(-1, -1) = -\frac{1}{6}, \quad \max_{(x,y) \in Q} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Studiamo ora i punti di massimo e di minimo relativo in \mathbb{R}^2 . I punti che annullano il gradiente sono $(0, 0), (-1, 0), (0, -1), (-1, -1)$. Possiamo immediatamente dire, visto i risultati precedenti, che $(-1, 0), (0, -1)$ sono punti sella perché la funzione f presenta comportamenti diversi su due restrizioni che passano per quei punti e sono parallele agli assi coordinati. Restano da esaminare $(0, 0)$ e $(-1, 1)$. Risulta

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2x & 0 \\ 0 & 3y^2 + 2y \end{pmatrix}$$

e dunque $\det H(-1, -1) = 1, f''_{xx}(-1, -1) = 1$. Il punto $(-1, -1)$ è dunque punto di minimo relativo, in $(0, 0)$ il determinante della matrice Hessiana si annulla e serve un supplemento di indagine. Abbiamo già due restrizioni che passano per l'origine per le quali l'origine è un punto di massimo. Se consideriamo la restrizione $(x, -x)$ allora $f(x, -x) = \frac{x^4}{2}$ che ha un minimo in $x = 0$, pertanto $(0, 0)$ è un punto sella.

2) Sia Q il quadrato di vertici $(-1, -1), (0, -1), (0, 0), (-1, 0)$. Siccome Q è un compatto ed f è continua, il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di punti di massimo e di minimo assoluti. Iniziamo a cercarli in Q° . Siccome $f \in C^2(Q^\circ)$ i punti di massimo e di minimo vanno cercati fra quelli che annullano il gradiente. Le derivate parziali di f sono date da

$$\{\nabla f(x, y) = (x^3 + x^2, -y^3 - y^2) = (0, 0), \quad (x, y) \in Q^\circ\} = \emptyset.$$

I punti di massimo e di minimo si troveranno allora sulla frontiera di Q .

- Primo tratto $x = 0, -1 \leq y \leq 0$: risulta $f(0, y) = -\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} := g_0(y)$. Risulta $g'_0(y) = -y^2(y + 1)$, quindi g_0 è non crescente, pertanto $y = -1$ punto di massimo e $y = 0$ punto di minimo per g_0 .
- tratto $x = -1, -1 \leq y \leq 0$: risulta $f(-1, y) = -\frac{1}{12} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} := g_{-1}(y)$. Risulta $g'_{-1}(y) = -y^2(y + 1)$, quindi g_{-1} è non crescente, pertanto $y = -1$ punto di massimo e $y = 0$ punto di minimo per g_{-1} .
- tratto $y = 0, -1 \leq x \leq 0$: risulta $f(x, 0) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} := h_0(x)$. Risulta $h'_0(x) = x^2(x + 1)$, quindi h_0 è non decrescente, pertanto $x = -1$ punto di minimo e $x = 0$ punto di massimo per h_0 .
- tratto $y = -1, -1 \leq x \leq 0$: risulta $f(x, -1) = \frac{1}{12} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} := h_{-1}(x)$. Risulta $h'_{-1}(x) = x^2(x + 1)$, quindi h_{-1} è non decrescente, pertanto $x = -1$ punto di minimo e $x = 0$ punto di massimo per h_{-1} .

In base alle risultanze allora, per il teorema di Weierstrass,

$$\min_{(x,y) \in Q} f(x, y) = f(-1, 0) = -\frac{1}{12}, \quad \max_{(x,y) \in Q} f(x, y) = f(0, -1) = \frac{1}{12}.$$

Studiamo ora i punti di massimo e di minimo relativo in \mathbb{R}^2 . I punti che annullano il gradiente sono $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, -1)$. Possiamo immediatamente dire, visto i risultati precedenti, che $(0, 0)$, $(-1, -1)$ sono punti sella perché la funzione f presenta comportamenti diversi su due restrizioni che passano per quei punti e sono parallele agli assi coordinati. Restano da esaminare $(0, -1)$ e $(-1, 0)$. Risulta

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2x & 0 \\ 0 & -3y^2 - 2y \end{pmatrix}$$

e dunque $\det H(0, -1) = \det H(-1, 0) = 0$. Nei punti $(0, -1)$ e $(-1, 0)$, il determinante della matrice Hessiana si annulla e serve un supplemento di indagine. Per quanto riguarda $(0, -1)$, considerando la restrizione $(x, -1)$, risulta $f(x, -1)$ crescente per $x > -1$ e pertanto $(0, -1)$ è un punto di crescita locale. D'altra parte, sulla restrizione $(0, y)$, la funzione $f(0, y)$ presenta un massimo in $y = -1$. Concludiamo quindi che $(0, -1)$ è di sella.

Passando a esaminare $(-1, 0)$, risulta $f(-1, y)$ decrescente per $y > -1$ e pertanto $(-1, 0)$ è un punto di decrescenza locale. D'altra parte, sulla restrizione $(x, 0)$, la funzione $f(x, 0)$ presenta un minimo in $x = -1$. Concludiamo quindi che $(-1, 0)$ è di sella

II Esonero 28 aprile 2023

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Sia

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x}, 2x^2 \leq y \leq 3x^2\}.$$

Calcolare $I = \iint_D \frac{x^2}{y} e^{xy} dx dy$. **(11 punti)**

2) Calcolare

$$\int_c y^2 ds, \quad r(t) = (t, e^t), \quad 0 \leq t \leq \log 2. \quad \text{(8 punti)}$$

3) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3 - xy\}. \quad \text{(11 punti)}$$

Svolgimento

1) Dalle condizioni imposte su D risulta che esso si trova nel primo quadrante con $x > 0$. Dalla disuguaglianza $\frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x}$ otteniamo $\frac{1}{2} \leq xy \leq 1$. Dall'altra $2 \leq \frac{y}{x^2} \leq 3$. Utilizziamo allora la sostituzione $xy = u$, $\frac{y}{x^2} = v$. Risulta

$$\begin{cases} x = \left(\frac{u}{v}\right)^{1/3} \\ y = (u^2 v)^{1/3} \end{cases} \quad (u, v) \in [1/2, 1] \times [2, 3].$$

La trasformazione è sicuramente biiettiva e di classe $C^1([1/2, 1] \times [2, 3])$ (quindi le derivate parziali sono uniformemente continue per il teorema di

Heine), inoltre

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3\left(\frac{u}{v}\right)^{2/3}v} & -\frac{u}{3\left(\frac{u}{v}\right)^{2/3}v^2} \\ \frac{2uv}{3(u^2v)^{2/3}} & \frac{u^2}{3(u^2v)^{2/3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^2}{\left(\frac{u}{v}\right)^{2/3}v(u^2v)^{2/3}} = \frac{1}{3v} > 0$$

$$\forall (u, v) \in [1/2, 1] \times [2, 3].$$

Tutte le ipotesi del teorema di integrazione per sostituzione sono soddisfatte.

Dunque

$$I = \iint_D \frac{x^2}{y} e^{xy} dx dy = \frac{1}{3} \int_{1/2}^1 e^u du \int_2^3 \frac{1}{v^2} dv = \frac{1}{3} \cdot (e - \sqrt{e}) \cdot [-v^{-1}]_2^3 = \frac{1}{18} \cdot (e - \sqrt{e}).$$

2) La funzione $f(x, y) = y^2$ è continua in tutto \mathbb{R}^2 . Quindi $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$. La curva è inoltre regolare perché è semplice e la sua rappresentazione r è di classe C^1 ; inoltre $x'(t) = 1 \neq 0$ per ogni $t \in [0, \log 2]$. Risulta $ds = \sqrt{1 + e^{2t}} dt$ e dunque

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 ds = \int_0^{\log 2} e^{2t} \sqrt{1 + e^{2t}} dt = \left[\frac{1}{3} (1 + e^{2t})^{3/2} \right]_0^{\log 2} = \frac{5^{3/2} - 2^{3/2}}{3}$$

3) La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ inoltre $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ solo nell'origine. Siccome $(0, 0) \in A$ e $f(x, y) \geq 0$ sempre, allora l'origine sarà di minimo assoluto per f su A . Proviamo che l'insieme A è un compatto. Innanzitutto

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq 3 - xy &\iff x^2 + y^2 + xy \leq 3 \iff \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 3 \\ \implies y^2 \leq 4 \quad (|y| \leq 2) \quad \&\quad \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 \leq 3 \implies (|y| \leq 2) \quad \&\quad |x| \leq \sqrt{3} + 1. \end{aligned}$$

Quindi l'insieme A è limitato perché racchiuso in un rettangolo. Inoltre, posto $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ risulta $A = g^{-1}([0, 3])$ e dunque A è chiuso per il criterio di continuità globale. Il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza dei punti di massimo e di minimo assoluto in A . Il minimo assoluto è stato già trovato, cerchiamo il massimo assoluto sulla frontiera di A . Poniamo $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$.

Cerchiamo i candidati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e poniamo $F(x, y, a) = x^2 + y^2 + a(x^2 + y^2 + xy - 3)$.

Innanzitutto il sistema $\nabla \varphi(x, y) = (2x + y, 2y + x) = (0, 0) \quad \&\quad \varphi(x, y) = 0$ non

ha soluzioni. I candidati quindi saranno soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + a(2x + y) = 0 \\ 2y + a(2y + x) = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \iff a \neq 0 \ \& \ x \neq 0, y \neq 0$$

$$\begin{cases} 2xy + a(2x + y)y = 0 \\ 2yx + a(2y + x)x = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a(2x + y)y = a(2y + x)x \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y^2 = x^2 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm x \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \iff$$

$$(1, 1) \quad (-1, -1) \quad (\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \quad (-\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

Risulta $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$, $f((\sqrt{3}, -\sqrt{3})) = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6$ quindi i punti di massimo assoluto sono $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \quad (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Esonero 29 maggio 2023

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

- 1)** Sia S la superficie ottenuta dalla rotazione di un angolo piatto attorno all'asse z della curva $z = 2 - x$, $x \in [2, 4]$ e orientata in modo che la normale abbia terza componente positiva. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da $F(x, y, z) = (x^2y, xy^2, z)$. Il flusso di F attraverso S è pari a

- 0
- $-\frac{20}{3}\pi$
- $\frac{\pi}{3}$
- $\frac{\pi}{6}$
- $\frac{\pi^2}{12}$

- 2)** Data la superficie cartesiana S definita dalla funzione $f(x, y) = x^2y - 4x - y^2$ trovare il versore ν normale ad essa nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.

- $\nu = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$
- $\nu = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
- $\nu = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- $\nu = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

- 3)** Data la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 5y^2\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 10xy\right)dy.$$

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$ dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (\cos(\pi t) + t^2, 1 + t^2)$$

- $-3 - \sqrt{2}$
- $-3 + \sqrt{2}$
- $-2 - \sqrt{5}$
- $-2 + \sqrt{5}$

Svolgimento

1) Parametriamo la superficie S (la metà di un tronco di cono) :

$$\begin{cases} x = u \cos t \\ y = u \sin t \\ z = 2 - u \end{cases} \quad (u, t) \in [2, 4] \times [0, \pi].$$

Calcoliamo la sua normale

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t & \sin t & -1 \\ -u \sin t & u \cos t & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(u \cos t) + \vec{j}(u \sin t) + \vec{k}u.$$

$$F|_S = (u^3 \cos^2 t \sin t, u^3 \cos t \sin^2 t, 2 - u)$$

$$F|_S \cdot (L, M, N) = (u^3 \cos^2 t \sin t, u^3 \cos t \sin^2 t, 2 - u) \cdot (-u \cos t, u \sin t, u) =$$

$$= u^4 \cos t \sin t + 2u - u^2$$

$$\int_S F \cdot (L, M, N) du dt = \int_0^\pi dt \int_2^4 (u^4 \cos t \sin t + 2u - u^2) du$$

$$= \int_0^\pi dt \left[\frac{u^5}{5} \sin t \cos t + u^2 - \frac{u^3}{3} \right]_2^4 =$$

$$= \left[\frac{u^5}{5} \right]_2^4 \cdot \int_0^\pi \sin t \cos t dt + \pi \cdot \left[u^2 - \frac{u^3}{3} \right]_2^4 = -\frac{20}{3} \pi.$$

2) Risulta

$$n = (-f'_x, -f'_y, 1) = (4 - 2xy, 2y - x^2, 1)$$

$$\text{se } (x, y) = (1, 1) \implies n = (2, 1, 1), \quad \|n\| = \sqrt{6}$$

$$v = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

3)

$$\omega = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 5y^2 \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 10xy \right) dy.$$

Le componenti sono di classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$. Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 5y^2 \right) &= -\frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}^{-2} \cdot 2y + 10y \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 10xy \right) &= -\frac{y}{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}^{-2} \cdot 2x + 10y \end{aligned}$$

e dunque la ω è chiusa. Siccome non è definita in un semplicemente connesso, per provare la sua esattezza utilizziamo la CNES che utilizza le curve generalmente regolari chiuse con sostegno nel campo di esistenza. Grazie alle formule di Green e alla condizione sufficiente sulle componenti semplicemente connesse basta calcolare un integrale curvilineo su una singola curva chiusa che circonda l'origine (buco). Sia \mathcal{C} definita da $(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \omega &= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\cos t}{1} + 5 \sin^2 t \right) (-\sin t) + \left(\frac{\sin t}{1} + 10 \sin t \cos t \right) (\cos t) \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\sin t \cos t - 5 \sin^3 t + \sin t \cos t + 10 \sin t \cos^2 t \right] dt = 0. \end{aligned}$$

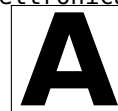
Dunque ω è esatta e una primitiva può essere determinata ad esempio a partire da $(1, 0)$ nel semipiano delle x positive.

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2}} dt + \int_0^y \left(\frac{t}{\sqrt{x^2 + t^2}} + 10xt \right) dt = \\ &= (x - 1) + \sqrt{x^2 + y^2} - x + 5xy^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + 5xy^2 - 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che il gradiente di U coincide con le componenti di ω su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Siccome la curva γ congiunge i punti $(1, 1)$ e $(0, 2)$ allora

$$\int_{\gamma} \omega = U(0, 2) - U(1, 1) = 1 - \sqrt{2} - 4 = -3 - \sqrt{2}.$$

**Esonero 27 Ottobre 2023**iscritto al secondo anno di corso SI NOBES/DSA Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

- 1) Sia p il numero delle lettere del proprio nome. Calcolare, se esiste, il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x^2} dx$$

(punteggio 9)

- 2) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n \sqrt[3]{x}}{1 + n^2 x^2} \text{ nella semiretta } [1, +\infty[.$$

(punteggio 9)

- 3) Sviluppare, in serie di soli coseni, la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 4x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

La serie di Fourier ottenuta converge uniformemente? A chi? Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

(punteggio 12)

Svolgimento

- 1)** Supponiamo che $p = 2k$ con $k \geq 2$. La funzione $f(x) = x^{2k}e^{-x^2}$ è una funzione continua, dunque integrabile in ogni intervallo del tipo $[0, a]$ con $a > 0$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2k}e^{-x^2} = 0$$

ed è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a qualunque potenza intera $n \in \mathbb{N}$ dell'infinitesimo principale $\frac{1}{x}$; in particolare è un infinitesimo di ordine superiore a 2 e quindi la funzione risulta integrabile in $[0, \infty[$. Calcoliamo ora l'integrale $\int x^{2k}e^{-x^2} dx$ con la sostituzione $x^2 = y$, $xdx = \frac{1}{2}dy$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{2k}e^{-x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a x^{2k}e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{a^2} y^{\frac{2k-1}{2}} e^{-y} dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\frac{2k+1}{2}-1} e^{-y} dy = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(p-1)!!}{2^{p/2}}. \end{aligned}$$

Supponiamo che $p = 2k + 1$ con $k \geq 2$. La funzione $f(x) = x^{2k+1}e^{-x^2}$ è una funzione continua, dunque integrabile in ogni intervallo del tipo $[0, a]$ con $a > 0$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2k+1}e^{-x^2} = 0$$

ed è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a qualunque potenza intera $n \in \mathbb{N}$ dell'infinitesimo principale $\frac{1}{x}$; in particolare è un infinitesimo di ordine superiore a 2 e quindi la funzione risulta integrabile in $[0, \infty[$. Calcoliamo ora l'integrale $\int x^{2k+1}e^{-x^2} dx$ con la sostituzione $x^2 = y$, $xdx = \frac{1}{2}dy$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{2k+1}e^{-x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a x^{2k+1}e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{a^2} y^k e^{-y} dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{(k+1)-1} e^{-y} dy = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(k+1) = \frac{1}{2} k!. \end{aligned}$$

- 2)** $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{n \sqrt[3]{x}}{1 + n^2 x^2} = 0$ per ogni $x \geq 1$. Pertanto la convergenza è puntuale alla funzione identicamente nulla. Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{n \sqrt[3]{x}}{1 + n^2 x^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{n \sqrt[3]{x}}{n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{x^{-5/3}}{n}$$

La funzione $x^{-5/3}$ è decrescente in $[1, +\infty[$ e dunque il suo massimo è realizzato per $x = 1$. Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

pertanto la successione converge uniformemente.

3) Sia $\tilde{f}(x)$ la funzione definita come

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 2 - 4x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4x + 2 & -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\tilde{f} \in C([-1, 1])$, tutti i suoi punti interni sono di derivabilità ad eccezione dei punti $x = 0, \pm \frac{1}{2}$ in cui la funzione ha comunque derivate destra e sinistra limitate. Possiamo renderla periodica di periodo $T = 2$. Pertanto la funzione è sviluppabile in serie di Fourier e la sua somma coincide con \tilde{f} . Risulta

$$a_0 = 2 \int_0^{1/2} (2 - 4x) dx = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^{1/2} (2 - 4x) \cos(n\pi x) dx = 4 \int_0^{1/2} \cos(n\pi x) dx - 8 \int_0^{1/2} x \cos(n\pi x) dx = \\ &= 4 \left[\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]_0^{1/2} - 8 \int_0^{1/2} x \left(\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right)' dx = \\ &= \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 8 \left\{ \left[x \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) dx \right\} = \\ &= \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{8}{n^2 \pi^2} \left[\cos(n\pi x) \right]_0^{1/2} = \frac{8}{n^2 \pi^2} (1 - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)) \end{aligned}$$

$$b_n = 0.$$

Ricordando che

$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k & n = 2k \\ 0 & n = 2k + 1, \end{cases}$$

si ha

$$a_n = \frac{8}{n^2 \pi^2} (1 - \cos(n \frac{\pi}{2})) = \begin{cases} \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} & n = 2k+1 \\ \frac{8}{4k^2 \pi^2} (1 - (-1)^k) & n = 2k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k, k \text{ pari} \\ \frac{4}{k^2 \pi^2} & n = 2k, k \text{ dispari} . \end{cases}$$

Per il teorema di convergenza puntuale la somma della serie di Fourier coincide con la funzione f in $[0, 1]$ e dunque

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x) + \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos((2k)\pi x).$$

In particolare, per $x = 0$, risulta

$$\tilde{f}(0) = 2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left[2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right]$$

e dunque, osservando che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Esonero 27 Ottobre 2023**iscritto al secondo anno di corso SI NOBES/DSA Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

- 1) Sia p il numero delle lettere del proprio nome. Calcolare, se esiste, il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x^2} dx$$

(punteggio 9)

- 2) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n \sqrt[3]{x}}{2 + n^2 x^2} \text{ nella semiretta } [1, +\infty[.$$

(punteggio 9)

- 3) Sviluppare, in serie di soli coseni, la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4x - 2 & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

La serie di Fourier ottenuta converge uniformemente? A chi? Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

(punteggio 12)

Svolgimento

1) vedi esercizio 1 compito A.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{n \sqrt[3]{x}}{2 + n^2 x^2} = 0$ per ogni $x \geq 1$. Pertanto la convergenza è puntuale alla funzione identicamente nulla. Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{n \sqrt[3]{x}}{2 + n^2 x^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{n \sqrt[3]{x}}{n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{x^{-5/3}}{n}$$

La funzione $x^{-5/3}$ è decrescente in $[1, +\infty[$ e dunque il suo massimo è realizzato per $x = 1$. Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

pertanto la successione converge uniformemente.

3) Sia $\tilde{f}(x)$ la funzione definita come

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -4x - 2 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 4x - 2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$\tilde{f} \in C([-1, 1])$, tutti i suoi punti interni sono di derivabilità ad eccezione dei punti $x = \pm \frac{1}{2}$ in cui la funzione ha comunque derivata destra e sinistra limitate. Possiamo renderla periodica di periodo $T = 2$.

Pertanto la funzione è sviluppabile in serie di Fourier e la sua somma coincide con \tilde{f} . Risulta

$$a_0 = 2 \int_{1/2}^1 (4x - 2) dx = 1$$

$$a_n = 2 \int_{1/2}^1 (4x - 2) \cos(n\pi x) dx = 8 \int_{1/2}^1 x \cos(n\pi x) dx - 4 \int_{1/2}^1 \cos(n\pi x) dx =$$

$$= 8 \int_{1/2}^1 x \left(\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right)' dx - 4 \left[\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]_{1/2}^1 =$$

$$= 8 \left\{ \left[x \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) dx \right\} + \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{n^2 \pi^2} \left[\cos(n\pi x) \right]_{1/2}^1 = \frac{8}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right))$$

$$b_n = 0.$$

Si ha

$$a_n = \frac{8}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - \cos(n \frac{\pi}{2})) = \begin{cases} -\frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} & n = 2k+1 \\ \frac{2}{k^2 \pi^2} (1 - (-1)^k) & n = 2k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k, k \text{ pari} \\ \frac{4}{k^2 \pi^2} & n = 2k, k \text{ dispari} . \end{cases}$$

Per il teorema di convergenza puntuale la somma della serie di Fourier coincide con la funzione f in $[0, 1]$ e dunque

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x) + \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos((2k)\pi x).$$

In particolare per $x = 0$ risulta

$$f(0) = 0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left[2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right],$$

e dunque, osservando che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Esonero 27 Ottobre 2023**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

- 1)** Sia p il numero delle lettere del proprio nome. Calcolare, se esiste, il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x^2} dx$$

(punteggio 9)

- 2)** Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n\sqrt[3]{x}-1}{1+n^2x^2}$ nella semiretta $[1, +\infty[$.

(punteggio 9)

- 3)** Sviluppare, in serie di soli coseni, la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ 4x + 2 & -\frac{1}{2} < x \leq 0. \end{cases}$$

La serie di Fourier ottenuta converge uniformemente? A chi? Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

(punteggio 12)

Svolgimento

1) vedi esercizio 1 compito A.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{n\sqrt[3]{x} - 1}{1 + n^2x^2} = 0$ per ogni $x \geq 1$. Pertanto la convergenza è puntuale alla funzione identicamente nulla. Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{n\sqrt[3]{x} - 1}{1 + n^2x^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{n\sqrt[3]{x}}{n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{x^{-5/3}}{n}$$

La funzione $x^{-5/3}$ è decrescente in $[1, +\infty[$ e dunque il suo massimo è realizzato per $x = 1$. Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

pertanto la successione converge uniformemente.

3) Sia $\tilde{f}(x)$ la funzione periodica di periodo $T = 2$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 4x + 2 & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ 2 - 4x & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Lo sviluppo della sua serie di Fourier è quello dell'esercizio 3 del compito A.

**Esonero 27 Ottobre 2023**iscritto al secondo anno di corso SI NOBES/DSA

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

- 1)** Sia p il numero delle lettere del proprio nome. Calcolare, se esiste, il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x^2} dx$$

(punteggio 9)

- 2)** Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n \sqrt[4]{x}}{2 + n^2 x^2} \text{ nella semiretta } [1, +\infty[.$$

(punteggio 9)

- 3)** Sviluppare, in serie di soli coseni, la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} -4x - 2 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} < x \leq 0. \end{cases}$$

La serie di Fourier ottenuta converge uniformemente? A chi? Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

(punteggio 12)

Svolgimento

1) vedi esercizio 1 compito A.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{n\sqrt[4]{x}}{2+n^2x^2} = 0$ per ogni $x \geq 1$. Pertanto la convergenza è puntuale alla funzione identicamente nulla. Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{n\sqrt[4]{x}}{2+n^2x^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{n\sqrt[4]{x}}{n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \frac{x^{-7/4}}{n}$$

La funzione $x^{-7/4}$ è decrescente in $[1, +\infty[$ e dunque il suo massimo è realizzato per $x = 1$. Pertanto

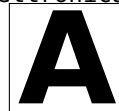
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

pertanto la successione converge uniformemente.

3) Sia $\tilde{f}(x)$ la funzione periodica di periodo $T = 2$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -4x - 2 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 4x - 2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Lo sviluppo della sua serie di Fourier è quello dell'esercizio 3 del compito B.



Esonero 24 Novembre 2023

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

1) Data la funzione

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 6xy - e^{3x} \ln(1 + z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

indicare quali affermazioni sono vere:

- (a)** il punto $(0, 0, 0)$ è un punto di sella per la funzione f ;
- (b)** il punto $(-2, -2, 0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione f ;
- (c)** il punto $(-2, -2, 0)$ è un punto di massimo relativo per la funzione f ;
- (d)** nessuna delle precedenti.

2) Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 7y(t) + t \\ y'(t) = -2x(t) - 5y(t) + e^t \end{cases}$$

Svolgimento

1) Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Annullando il gradiente della funzione, ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = 3x^2 + 6y - 3e^{3x} \ln(1 + z^2) = 0 \\ f'_y(x, y, z) = 3y^2 + 6x = 0 \\ f'_z(x, y, z) = -e^{3x} \frac{2z}{1+z^2} = 0 \end{cases}$$

otteniamo che i punti critici sono $(0, 0, 0)$ e $(-2, -2, 0)$.

Siccome $n > 2$, per determinare la natura dei punti dobbiamo studiare il segno degli autovalori della matrice Hessiana. Le derivate seconde sono:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y, z) &= 6x - 9e^{3x} \ln(1 + z^2), \\ f''_{xy}(x, y, z) &= 6 = f''_{yx}(x, y, z), \\ f''_{xz}(x, y, z) &= -3e^{3x} \frac{2z}{1 + z^2} = f''_{zx}(x, y, z), \\ f''_{yy}(x, y, z) &= 6y, \\ f''_{yz}(x, y, z) &= 0 = f''_{zy}(x, y, z), \\ f''_{zz}(x, y, z) &= -e^{3x} \frac{2 - 2z^2}{(1 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

Riguardo al punto $(0, 0, 0)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \det(H(0, 0, 0) - \lambda I) &= \begin{vmatrix} f''_{xx}(0, 0, 0) - \lambda & f''_{xy}(0, 0, 0) & f''_{xz}(0, 0, 0) \\ f''_{yx}(0, 0, 0) & f''_{yy}(0, 0, 0) - \lambda & f''_{yz}(0, 0, 0) \\ f''_{zx}(0, 0, 0) & f''_{zy}(0, 0, 0) & f''_{zz}(0, 0, 0) - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 6 & 0 \\ 6 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(\lambda^2 - 36). \end{aligned}$$

Ponendo $\det(H(0, 0, 0) - \lambda I) = 0$ si ha che

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2,3} = \pm 6,$$

e dunque la forma quadratica è indefinita. Il punto $(0, 0, 0)$ è pertanto di sella per la funzione.

Passiamo ora a studiare il punto $(-2, -2, 0)$. Per esso abbiamo

$$\det(H(-2, -2, 0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(-2, -2, 0) - \lambda & f''_{xy}(-2, -2, 0) & f''_{xz}(-2, -2, 0) \\ f''_{yx}(-2, -2, 0) & f''_{yy}(-2, -2, 0) - \lambda & f''_{yz}(-2, -2, 0) \\ f''_{zx}(-2, -2, 0) & f''_{zy}(-2, -2, 0) & f''_{zz}(-2, -2, 0) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -12 - \lambda & 6 & 0 \\ 6 & -12 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2e^{-6} - \lambda \end{vmatrix} = (-2e^{-6} - \lambda)(\lambda^2 + 24\lambda + 108).$$

Ponendo $\det(H(-2, -2, 0) - \lambda I) = 0$ e applicando la regola di Cartesio all'equazione $\lambda^2 + 24\lambda + 108 = 0$, deduciamo che

$$\lambda_1 = -2e^{-6} < 0, \quad \lambda_{2,3} < 0,$$

e dunque la forma quadratica è definita negativa. Il punto $(-2, -2, 0)$ è pertanto di massimo relativo per la funzione.

2) Se deriviamo la prima equazione rispetto a t e sostituiamo al posto di $y'(t)$ la seconda equazione e al posto di $7y(t) = x'(t) - 4x(t) - t$, otteniamo

$$\begin{aligned} x''(t) &= 4x'(t) + 7y'(t) + 1 = 4x'(t) - 14x(t) - 35y(t) + 7e^t + 1 \\ &= 4x'(t) - 14x(t) - 5x'(t) + 20x(t) + 5t + 7e^t + 1 \end{aligned}$$

e dunque otteniamo l'equazioni lineari del secondo ordine completa

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 5t + 1 + 7e^t.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea $z^2 + z - 6 = 0$ ha come soluzioni $z = -3, z = 2$ e dunque l'integrale generale della omogenea è dato da

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare di $x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 5t + 1$ $\rightarrow x_1(t) = -\frac{5}{6}t - \frac{11}{36}$.

Determiniamo una soluzione particolare di $x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 7e^t \rightarrow x_2(t) = -\frac{7}{4}e^t$. Pertanto risulta

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - \frac{5}{6}t - \frac{11}{36} - \frac{7}{4}e^t$$

$$x'(t) = -3c_1 e^{-3t} + 2c_2 e^{2t} - \frac{5}{6} - \frac{7}{4}e^t$$

$$y(t) = \frac{1}{7}(x'(t) - 4x(t) - t) = -c_1 e^{-3t} - \frac{2}{7}c_2 e^{2t} + \frac{1}{3}t + \frac{1}{18} + \frac{3}{4}e^t.$$



Esonero 24 Novembre 2023

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

1) Data la funzione

$$f(x, y, z) = 3x^3 + 3y^3 + xy + e^{2x} \arctan(3z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

indicare quali affermazioni sono vere:

- (a) il punto $(0, 0, 0)$ è un punto di sella per la funzione f ;
- (b) il punto $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione f ;
- (c) il punto $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0)$ è un punto di massimo relativo per la funzione f ;
- (d) il punto $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0)$ è di sella per la funzione f .

2) Risolvere il seguente di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + 3t \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) + 2e^t \end{cases}$$

Svolgimento

1) Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Annullando il gradiente della funzione, ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = 9x^2 + y + 2e^{2x} \arctan(3z^2) = 0 \\ f'_y(x, y, z) = 9y^2 + x = 0 \\ f'_z(x, y, z) = e^{2x} \frac{6z}{1+9z^4} = 0 \end{cases}$$

otteniamo che i punti critici sono $(0, 0, 0)$ e $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0)$.

Siccome $n > 2$, per determinare la natura dei punti dobbiamo studiare il segno degli autovalori della matrice Hessiana. Le derivate seconde sono:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y, z) &= 18x + 4e^{2x} \arctan(3z^2), \\ f''_{xy}(x, y, z) &= 1 = f''_{yx}(x, y, z), \\ f''_{xz}(x, y, z) &= 2e^{2x} \frac{6z}{1 + 9z^4} = f''_{zx}(x, y, z), \\ f''_{yy}(x, y, z) &= 18y, \\ f''_{yz}(x, y, z) &= 0 = f''_{zy}(x, y, z), \\ f''_{zz}(x, y, z) &= e^{2x} \frac{6 - 162z^4}{(1 + 9z^4)^2}. \end{aligned}$$

Riguardo al punto $(0, 0, 0)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \det(H(0, 0, 0) - \lambda I) &= \begin{vmatrix} f''_{xx}(0, 0, 0) - \lambda & f''_{xy}(0, 0, 0) & f''_{xz}(0, 0, 0) \\ f''_{yx}(0, 0, 0) & f''_{yy}(0, 0, 0) - \lambda & f''_{yz}(0, 0, 0) \\ f''_{zx}(0, 0, 0) & f''_{zy}(0, 0, 0) & f''_{zz}(0, 0, 0) - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(\lambda^2 - 1). \end{aligned}$$

Ponendo $\det(H(0, 0, 0) - \lambda I) = 0$ si ha che

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_{2,3} = \pm 1,$$

e dunque la forma quadratica è indefinita. Il punto $(0, 0, 0)$ è pertanto di sella per la funzione.

Passiamo ora a studiare il punto $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0)$. Per esso abbiamo

$$\det\left(H\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right) - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} f''_{xx}\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right) - \lambda & f''_{xy}\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right) & f''_{xz}\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right) \\ f''_{yx}\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right) & f''_{yy}\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right) - \lambda & f''_{yz}\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right) \\ f''_{zx}\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right) & f''_{zy}\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right) & f''_{zz}\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6e^{-\frac{2}{9}} - \lambda \end{vmatrix} = (6e^{-\frac{2}{9}} - \lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 3).$$

Ponendo $\det\left(H\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0\right) - \lambda I\right) = 0$ e applicando la regola di Cartesio all'equazione $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, deduciamo che

$$\lambda_1 = 6e^{-\frac{2}{9}} > 0, \quad \lambda_{2,3} < 0,$$

e dunque la forma quadratica è indefinita. Il punto $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 0)$ è pertanto di sella per la funzione.

2) Se deriviamo la prima equazione rispetto a t e sostituiamo al posto di $y'(t)$ la seconda equazione e al posto di $y(t) = x'(t) - x(t) - 3t$, otteniamo

$$\begin{aligned} x''(t) &= x'(t) + y'(t) + 3 = x'(t) + 2x(t) - y(t) + 2e^t + 3 \\ &= x'(t) + 2x(t) - x'(t) + x(t) + 3t + 2e^t + 3 \end{aligned}$$

e dunque otteniamo l'equazioni lineari del secondo ordine completa

$$x''(t) - 3x(t) = 3t + 3 + 2e^t.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea $z^2 - 3 = 0$ ha come soluzioni $z = -\sqrt{3}, z = \sqrt{3}$ e dunque l'integrale generale della omogenea è dato da

$$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{3}t} + c_2 e^{\sqrt{3}t}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare di $x''(t) - 3x(t) = 3t + 3 \rightarrow x_1(t) = -t - 1$.

Determiniamo una soluzione particolare di $x''(t) - 3x(t) = 2e^t \rightarrow x_2(t) = -e^t$. Pertanto risulta

$$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{3}t} + c_2 e^{\sqrt{3}t} - t - 1 - e^t$$

$$x'(t) = -\sqrt{3}c_1 e^{-\sqrt{3}t} + \sqrt{3}c_2 e^{\sqrt{3}t} - 1 - e^t$$

$$y(t) = x'(t) - x(t) - 3t = (-\sqrt{3} - 1)c_1 e^{-\sqrt{3}t} + (\sqrt{3} - 1)c_2 e^{\sqrt{3}t} - 2t.$$

**Esonero 24 Novembre 2023**

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

1) Data la funzione

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xy + e^x \arctan(z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

indicare quali affermazioni sono vere:

- (a)** il punto $(0, 0, 0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione f ;
- (b)** il punto $(1, 1, 0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione f ;
- (c)** il punto $(0, 0, 0)$ è un punto di sella per la funzione f ;
- (d)** il punto $(1, 1, 0)$ è un punto di massimo relativo per la funzione f .

2) Risolvere il seguente di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 2t \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + \sin t \end{cases}$$

Svolgimento

1) Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Annullando il gradiente della funzione, ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = 3x^2 - 3y + e^x \arctan(z^2) = 0 \\ f'_y(x, y, z) = 3y^2 - 3x = 0 \\ f'_z(x, y, z) = e^x \frac{2z}{1+z^4} = 0 \end{cases}$$

otteniamo che i punti critici sono $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 0)$.

Siccome $n > 2$, per determinare la natura dei punti dobbiamo studiare il segno degli autovalori della matrice Hessiana. Le derivate seconde sono:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y, z) &= 6x + e^x \arctan(z^2), \\ f''_{xy}(x, y, z) &= -3 = f''_{yx}(x, y, z), \\ f''_{xz}(x, y, z) &= e^x \frac{2z}{1+z^4} = f''_{zx}(x, y, z), \\ f''_{yy}(x, y, z) &= 6y, \\ f''_{yz}(x, y, z) &= 0 = f''_{zy}(x, y, z), \\ f''_{zz}(x, y, z) &= e^x \frac{2-6z^4}{(1+z^4)^2}. \end{aligned}$$

Riguardo al punto $(0, 0, 0)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \det(H(0, 0, 0) - \lambda I) &= \begin{vmatrix} f''_{xx}(0, 0, 0) - \lambda & f''_{xy}(0, 0, 0) & f''_{xz}(0, 0, 0) \\ f''_{yx}(0, 0, 0) & f''_{yy}(0, 0, 0) - \lambda & f''_{yz}(0, 0, 0) \\ f''_{zx}(0, 0, 0) & f''_{zy}(0, 0, 0) & f''_{zz}(0, 0, 0) - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ -3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 9). \end{aligned}$$

Ponendo $\det(H(0, 0, 0) - \lambda I) = 0$ si ha che

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \pm 3,$$

e dunque la forma quadratica è indefinita. Il punto $(0, 0, 0)$ è pertanto di sella per la funzione.

Passiamo ora a studiare il punto $(1, 1, 0)$. Per esso abbiamo

$$\det(H(1, 1, 0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(1, 1, 0) - \lambda & f''_{xy}(1, 1, 0) & f''_{xz}(1, 1, 0) \\ f''_{yx}(1, 1, 0) & f''_{yy}(1, 1, 0) - \lambda & f''_{yz}(1, 1, 0) \\ f''_{zx}(1, 1, 0) & f''_{zy}(1, 1, 0) & f''_{zz}(1, 1, 0) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2e - \lambda \end{vmatrix} = (2e - \lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27).$$

Ponendo $\det(H(1, 1, 0) - \lambda I) = 0$ e applicando la regola di Cartesio all'equazione $\lambda^2 - 12\lambda + 27 = 0$, deduciamo che

$$\lambda_1 = 2e > 0, \quad \lambda_{2,3} > 0,$$

e dunque la forma quadratica è definita positiva. Il punto $(1, 1, 0)$ è pertanto di minimo relativo per la funzione.

2) Se deriviamo la prima equazione rispetto a t e sostituiamo al posto di $y'(t)$ la seconda equazione e al posto di $2y(t) = x'(t) - x(t) - 2t$, otteniamo

$$\begin{aligned} x''(t) &= x'(t) + 2y'(t) + 2 = x'(t) + 4x(t) + 2y(t) + 2 \sin t + 2 \\ &= x'(t) + 4x(t) + x'(t) - x(t) - 2t + 2 \sin t + 2 \end{aligned}$$

e dunque otteniamo l'equazione lineare del secondo ordine completa

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = -2t + 2 + 2 \sin t.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea $z^2 - 2z - 3 = 0$ ha come soluzioni $z = 3$, $z = -1$ e dunque l'integrale generale della omogenea è dato da

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare di $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = -2t + 2$ → $x_1(t) = \frac{2}{3}t - \frac{10}{9}$.

Determiniamo una soluzione particolare di $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 2 \sin t \rightarrow$
 $x_2(t) = \frac{1}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sin t$. Pertanto risulta

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{2}{3}t - \frac{10}{9} + \frac{1}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sin t$$

$$x'(t) = -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{3t} + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \sin t - \frac{2}{5} \cos t$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(x'(t) - x(t) - 2t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{10} \sin t - \frac{3}{10} \cos t - \frac{4}{3}t + \frac{8}{9}$$



Esonero 24 Novembre 2023

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

1) Data la funzione

$$f(x, y, z) = 2x^3 + 2y^3 + xy - e^{-x} \ln(1 + 2z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

indicare quali affermazioni sono vere:

- (a) il punto $(0, 0, 0)$ è un punto di sella per la funzione f ;
- (b) il punto $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$ è un punto di massimo relativo per la funzione f ;
- (c) il punto $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione f ;
- (d) il punto $(0, 0, 0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione f ;

2) Risolvere il seguente di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 4y(t) + t \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) + \cos(2t) \end{cases}$$

Svolgimento

1) Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Annullando il gradiente della funzione, ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = 6x^2 + y + e^{-x} \ln(1 + 2z^2) = 0 \\ f'_y(x, y, z) = 6y^2 + x = 0 \\ f'_z(x, y, z) = -e^{-x} \frac{4z}{1+2z^2} = 0 \end{cases}$$

otteniamo che i punti critici sono $(0, 0, 0)$ e $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$.

Siccome $n > 2$, per determinare la natura dei punti dobbiamo studiare il segno degli autovalori della matrice Hessiana. Le derivate seconde sono:

$$f''_{xx}(x, y, z) = 12x - e^{-x} \ln(1 + 2z^2),$$

$$f''_{xy}(x, y, z) = 1 = f''_{yx}(x, y, z),$$

$$f''_{xz}(x, y, z) = e^{-x} \frac{4z}{1 + 2z^2} = f''_{zx}(x, y, z),$$

$$f''_{yy}(x, y, z) = 12y,$$

$$f''_{yz}(x, y, z) = 0 = f''_{zy}(x, y, z),$$

$$f''_{zz}(x, y, z) = -e^{-x} \frac{4 - 8z^2}{(1 + 2z^2)^2}.$$

Riguardo al punto $(0, 0, 0)$, otteniamo

$$\det(H(0, 0, 0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(0, 0, 0) - \lambda & f''_{xy}(0, 0, 0) & f''_{xz}(0, 0, 0) \\ f''_{yx}(0, 0, 0) & f''_{yy}(0, 0, 0) - \lambda & f''_{yz}(0, 0, 0) \\ f''_{zx}(0, 0, 0) & f''_{zy}(0, 0, 0) & f''_{zz}(0, 0, 0) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (-4 - \lambda)(\lambda^2 - 1).$$

Ponendo $\det(H(0, 0, 0) - \lambda I) = 0$ si ha che

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_{2,3} = \pm 1,$$

e dunque la forma quadratica è indefinita. Il punto $(0, 0, 0)$ è pertanto di sella per la funzione.

Passiamo ora a studiare il punto $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$. Per esso abbiamo

$$\det\left(H\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} f''_{xx}\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) - \lambda & f''_{xy}\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) & f''_{xz}\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) \\ f''_{yx}\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) & f''_{yy}\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) - \lambda & f''_{yz}\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) \\ f''_{zx}\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) & f''_{zy}\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) & f''_{zz}\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4e^{\frac{1}{6}} - \lambda \end{vmatrix} = (-4e^{\frac{1}{6}} - \lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 3).$$

Ponendo $\det\left(H\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0\right) - \lambda I\right) = 0$ e applicando la regola di Cartesio al polinomio $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, deduciamo che

$$\lambda_1 = -4e^{\frac{1}{6}} < 0, \quad \lambda_{2,3} < 0,$$

e dunque la forma quadratica è definita negativa. Il punto $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$ è pertanto di massimo relativo per la funzione.

2) Se deriviamo la prima equazione rispetto a t e sostituiamo al posto di $y'(t)$ la seconda equazione e al posto di $4y(t) = x'(t) + x(t) - t$, otteniamo

$$\begin{aligned} x''(t) &= -x'(t) + 4y'(t) + 1 = -x'(t) - 4x(t) + 12y(t) + 4 \cos(2t)t + 1 \\ &= 2x'(t) - x(t) - 3t + 1 + 4 \cos(2t) \end{aligned}$$

e dunque otteniamo l'equazioni lineari del secondo ordine completa

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = -3t + 1 + 4 \cos(2t).$$

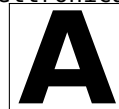
L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea $z^2 - 2z + 1 = 0$ ha come soluzioni $z = 1$ con molteplicità 2 e dunque l'integrale generale della omogenea è dato da

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare di $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = -3t + 1 \rightarrow x_1(t) = -3t - 5$.

Determiniamo una soluzione particolare di $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 4 \cos(2t) \rightarrow x_2(t) = -\frac{12}{25} \cos(2t) - \frac{16}{25} \sin(2t)$. Pertanto risulta

$$\begin{aligned}
 x(t) &= c_1 e^t + c_2 t e^t - 3t - 5 - \frac{12}{25} \cos(2t) - \frac{16}{25} \sin(2t) \\
 x'(t) &= c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t - 3 + \frac{24}{25} \sin(2t) - \frac{32}{25} \cos(2t) \\
 y(t) &= \frac{1}{4} (x'(t) + x(t) - t) = \frac{1}{2} c_1 e^t + \frac{1}{4} c_2 e^t + \frac{1}{2} c_2 t e^t - t - 2 + \frac{2}{25} \sin(2t) - \frac{11}{25} \cos(2t).
 \end{aligned}$$

**Esonero 19 Dicembre 2023**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

- 1)** Data la forma differenziale lineare $\omega = \left(\frac{xy^2}{1+x^2y^2} + y\right)dx + \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2} + 3\right)dy$ calcolare, $\int_{\gamma} \omega$, quando γ è la porzione di ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$.
- 2)** Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x| - 1)^2, |x| \leq 1\}$, scrivere le equazioni parametriche della sua frontiera e calcolare l'ascissa x_G del baricentro quando la densità è pari a $f(x, y) = |x| + x$.
- 3)** Sia Σ la superficie parametrizzata da $S(u, v) = (u + v, u - v, u^2v)$, $(u, v) \in [-2, 2]^2$. Dopo aver provato che S è regolare, determinare il vettore normale nel punto $S(0, 1)$.

Svolgimento

- 1)** La forma differenziale ω è data dalla somma di

$$\bar{\omega} = \left(\frac{xy^2}{1+x^2y^2}\right)dx + \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2} + 3\right)dy,$$

che è esatta, e della forma ydx . Facciamo vedere che $\bar{\omega}$ è chiusa. Posto $X = \frac{xy^2}{1+x^2y^2}$ e $Y = \frac{x^2y}{1+x^2y^2} + 3$, si ha che $X, Y \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{2xy}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Pertanto, essendo il dominio un insieme convesso, possiamo concludere che $\bar{\omega}$ è esatta. Determiniamo ora una primitiva U . Deve risultare $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{xy^2}{1+x^2y^2}$ da cui

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2y^2) + h(y),$$

con $h \in C^1(\mathbb{R})$. Inoltre deve anche risultare

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2y}{1+x^2y^2} + h'(y) = \frac{x^2y}{1+x^2y^2} + 3 \iff h(y) = 3y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pertanto la classe delle primitive della forma differenziale $\bar{\omega}$ è data da $U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2y^2) + 3y + c$, $c \in \mathbb{R}$. L'integrale curvilineo pertanto non dipende dal percorso ma solo dagli estremi della curva e dal verso di percorrenza e dunque

$$\int_{\gamma} \bar{\omega} = U(-2, 0) - U(2, 0) = 0.$$

Per quanto riguarda invece $\int_{\gamma} ydx$, questo integrale va calcolato direttamente. Una rappresentazione parametrica della semi-ellisse è data da $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Dunque

$$\int_{\gamma} y dx = \int_0^{\pi} \sin t (-2 \sin t) dt = -2 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = -\left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi} = -\pi.$$

In definitiva quindi

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \bar{\omega} + \int_{\gamma} y dx = -\pi.$$

2) Osservando che

$$|y| \leq (|x| - 1)^2 \iff -(|x| - 1)^2 \leq y \leq (|x| - 1)^2,$$

l'insieme D può essere scritto come

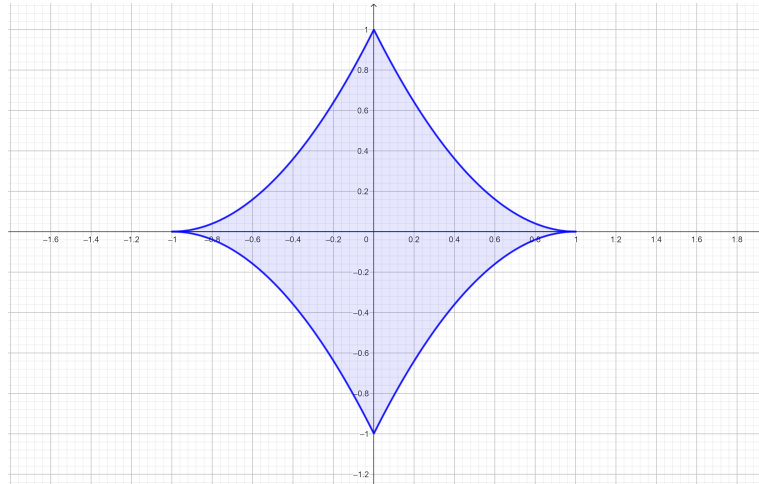
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -x^2 + 2|x| - 1 \leq y \leq x^2 - 2|x| + 1\}.$$

Risulta allora

$$-x^2 - 2x - 1 \leq y \leq x^2 + 2x + 1, \quad \text{se } -1 \leq x < 0$$

$$-x^2 + 2x - 1 \leq y \leq x^2 - 2x + 1, \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1.$$

L'insieme D richiesto è rappresentato dalla regione colorata nella seguente figura. Pertanto $Fr D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, ove



$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 - 2t + 1 & 1 \geq t \geq 0; \end{cases} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 + 2t + 1 & 0 \geq t \geq -1; \end{cases}$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t^2 - 2t - 1 & -1 \leq t \leq 0; \end{cases} \quad \gamma_4 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t^2 + 2t - 1 & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Calcoliamo la massa dell'insieme D

$$m(D) = \iint_D (|x| + x) \, dx dy = 2 \iint_{\tilde{D}} x \, dx dy$$

ove $\tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -(x-1)^2 \leq y \leq (x-1)^2\}$.

Dal teorema di riduzione si ha

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\tilde{D}} x \, dx dy &= 2 \int_0^1 x \, dx \int_{-(x-1)^2}^{(x-1)^2} dy = 4 \int_0^1 x(x^2 - 2x + 1) \, dx \\ &= 4 \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) \, dx = 4 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Risulta allora che le coordinate del baricentro sono

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m(D)} \iint_D x(|x| + x) \, dx dy = 6 \iint_{\tilde{D}} x^2 \, dx dy = 6 \int_0^1 x^2 \, dx \int_{-(x-1)^2}^{(x-1)^2} dy \\ &= 12 \int_0^1 x^2(x^2 - 2x + 1) \, dx = 12 \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) \, dx = 12 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{5}, \\ y_G &= \frac{1}{m(D)} \iint_D y(|x| + x) \, dx dy = 6 \iint_{\tilde{D}} xy \, dx dy = 6 \int_0^1 x \, dx \int_{-(x-1)^2}^{(x-1)^2} y \, dy \\ &= 6 \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-(x-1)^2}^{(x-1)^2} dx = 0. \end{aligned}$$

3) La parametrizzazione di Σ è

$$r : [-2, 2]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(u, v) = \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 v \end{cases} \quad r \in C^1([-2, 2]^2).$$

La matrice Jacobiana di Σ è

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2uv \\ 1 & -1 & u^2 \end{bmatrix}, \quad (u, v) \in [-2, 2]^2$$

e ha rango 2, in quanto risulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \quad (u, v) \in [-2, 2]^2.$$

Pertanto, possiamo concludere che la superficie è regolare.

Il vettore normale è

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2uv \\ 1 & -1 & u^2 \end{vmatrix} = (u^2 + 2uv)\vec{i} + (2uv - u^2)\vec{j} + (-2)\vec{k}, \quad (u, v) \in [-2, 2]^2$$

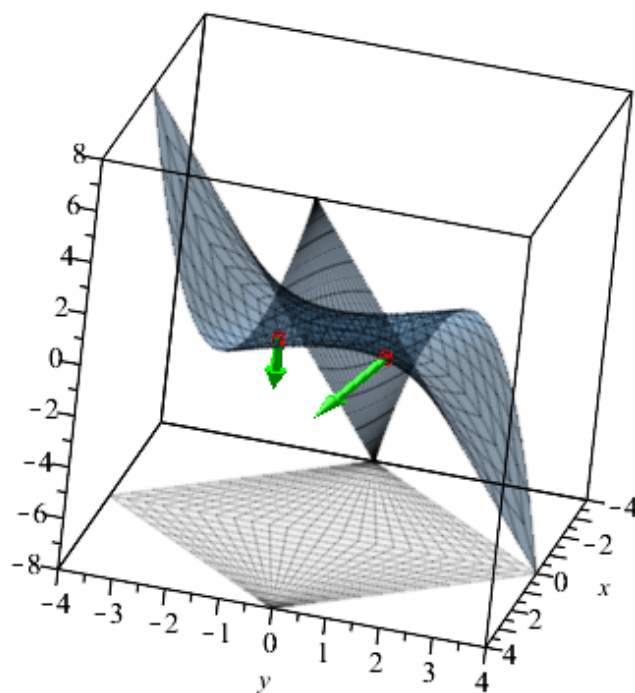
da cui

$$\left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right) (0, 1) = (0, 0, -2).$$

Al fine di dare una rappresentazione grafica della superficie Σ , osserviamo che

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 v \end{cases}, (u, v) \in [-2, 2]^2 \iff \begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \\ z = \frac{(x+y)^2}{4} \cdot \frac{x-y}{2} \end{cases}, (x, y) \in R,$$

ovvero la superficie Σ coincide con il grafico della funzione $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{4} \cdot \frac{x-y}{2}$, definita in $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \leq 4, |x-y| \leq 4\}$ e rappresentata in Figura 1.



**Esonero 19 Dicembre 2023**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

- 1)** Data la forma differenziale lineare $\omega = \left(\frac{xy^2}{1+x^2y^2}\right)dx + \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2} + 3 + x\right)dy$ calcolare, $\int_{\gamma} \omega$, quando γ è la porzione di ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$.
- 2)** Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x| - 1)^2, |x| \leq 1\}$, scrivere le equazioni parametriche della sua frontiera e calcolare l'ordinata y_G del baricentro quando la densità è pari a $f(x, y) = |x| + x$.
- 3)** Sia Σ la superficie parametrizzata da $S(u, v) = (u - v, u + v, u^2v)$, $(u, v) \in [-2, 2]^2$. Dopo aver provato che S è regolare, determinare il vettore normale nel punto $S(0, 1)$.

Svolgimento

- 1)** La forma differenziale ω è data dalla somma di

$$\tilde{\omega} = \left(\frac{xy^2}{1+x^2y^2}\right)dx + \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2} + 3\right)dy,$$

che è esatta (vedi esercizio 1A), e della forma $x dy$. Esattamente come in 1A $\int_{\gamma} \bar{\omega} = 0$. Per quanto riguarda invece $\int_{\gamma} x dy$, questo integrale va calcolato direttamente. Una rappresentazione parametrica della semi-ellisse è data da $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Dunque

$$\int_{\gamma} x dy = \int_0^{\pi} 2 \cos t (\cos t) dt = 2 \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi} = \pi.$$

In definitiva quindi

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \bar{\omega} + \int_{\gamma} x dy = \pi.$$

2) Vedi esercizio 2A.

3) La parametrizzazione di Σ è

$$r : [-2, 2]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(u, v) = \begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \\ z = u^2 v \end{cases}, \quad r \in C^1([-2, 2]^2).$$

La matrice Jacobiana di Σ è

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2uv \\ -1 & 1 & u^2 \end{bmatrix}, \quad (u, v) \in [-2, 2]^2$$

e ha rango 2, in quanto risulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad (u, v) \in [-2, 2]^2.$$

Pertanto, possiamo concludere che la superficie è regolare. Il vettore normale è

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2uv \\ -1 & 1 & u^2 \end{vmatrix} = (u^2 - 2uv)\vec{i} + (-u^2 - 2uv)\vec{j} + 2\vec{k}, \quad (u, v) \in [-2, 2]^2,$$

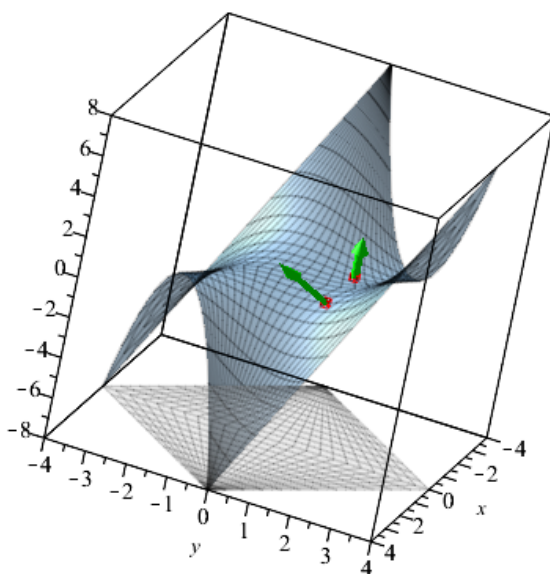
da cui

$$\left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right)(0, 1) = (0, 0, 2).$$

Al fine di dare una rappresentazione grafica della superficie Σ , osserviamo che

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \\ z = u^2 v \end{cases}, (u, v) \in [-2, 2]^2 \iff \begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{y-x}{2} \\ z = \frac{(y-x)(x+y)^2}{8} \end{cases}, (x, y) \in R,$$

ovvero la superficie Σ coincide con il grafico della funzione $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{4} \cdot \frac{y-x}{2}$, definita in $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \leq 4, |y-x| \leq 4\}$ e rappresentata in Figura 2.



**Esonero 19 Dicembre 2023**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

- 1)** Data la forma differenziale lineare $\omega = \left(\frac{xy^2}{1+x^2y^2} + y\right)dx + \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2} + 3\right)dy$ calcolare, $\int_{\gamma} \omega$, quando γ è la porzione di ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$.
- 2)** Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x|-1)^2, |x| \leq 1\}$, scrivere le equazioni parametriche della sua frontiera e calcolare l'ascissa x_G del baricentro quando la densità è pari a $f(x, y) = |x| + x$.
- 3)** Sia Σ la superficie parametrizzata da $S(u, v) = (u + v, u - v, u^2v)$, $(u, v) \in [-2, 2]^2$. Dopo aver provato che S è regolare, determinare il vettore normale nel punto $S(1, 0)$.
-

Svolgimento

1) Vedi esercizio 1A.

2) Vedi esercizio 2A.

3) Per la prima parte dell'esercizio, si veda esercizio 3A. Il vettore normale nel punto richiesto è in questo caso

$$\left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right) (1, 0) = (1, -1, -2),$$

vedi anche Figura 1.

**Esonero 19 Dicembre 2023**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

- 1)** Data la forma differenziale lineare $\omega = \left(\frac{xy^2}{1+x^2y^2}\right)dx + \left(\frac{x^2y}{1+x^2y^2} + 3 + x\right)dy$ calcolare, $\int_{\gamma} \omega$, quando γ è la porzione di ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$.
- 2)** Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x| - 1)^2, |x| \leq 1\}$, scrivere le equazioni parametriche della sua frontiera e calcolare l'ordinata y_G del baricentro quando la densità è pari a $f(x, y) = |x| + x$.
- 3)** Sia Σ la superficie parametrizzata da $S(u, v) = (u - v, u + v, u^2v)$, $(u, v) \in [-2, 2]^2$. Dopo aver provato che S è regolare, determinare il vettore normale nel punto $S(1, 0)$.

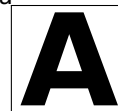
Svolgimento

1) Vedi esercizio 1B.**2)** Vedi esercizio 2A.

3) Per la prima parte dell'esercizio, si veda esercizio 3B. Il vettore normale nel punto richiesto è in questo caso

$$\left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right) (1, 0) = (1, -1, 2),$$

vedi anche Figura 2.

**Esonero 26 Marzo 2024**Civile Meccanica BES/DSA Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

1) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x, y, z) = z^2(z - 3) + (x - 1)^2 - \cos y$.

[punti 12]

2) Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $F(x, y) = \frac{xy^4}{x^2 + y^6}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $F(0, 0) = 0$.

Siano $x(t) = t^3$, $y(t) = t$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

α) F ammette gradiente nell'origine V F

β) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$ V F

γ) $G(t) := F(x(t), y(t))$ è derivabile nell'origine e $G'(0) = \nabla F(0, 0) \cdot (x'(0), y'(0))$

 V F

δ) F è differenziabile in $(0, 0)$ V F

ε) F è continua in $(0, 0)$ V F

(Selezionare le risposte esatte e motivarle)

[12 punti]

3) Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti di f nell'insieme $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$.

[punti 6]**Svolgimento**

1) Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ quindi i punti di massimo o di minimo relativo devono annullare il gradiente di f .

$$\begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ \sin y = 0 \\ 3z(z-2) = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (1, k\pi, 0); (x, y, z) = (1, k\pi, 2) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Calcoliamo ora le derivate seconde

$$f''_{xx}(x, y, z) = 2, \quad f''_{xy}(x, y, z) = 0 = f''_{yx}(x, y, z), \quad f''_{xz}(x, y, z) = 0 = f''_{zx}(x, y, z)$$

$$f''_{yy}(x, y, z) = \cos y, \quad f''_{yz}(x, y, z) = 0 = f''_{zy}(x, y, z), \quad f''_{zz}(x, y, z) = 6z - 6.$$

$$H(x, y, z) - \lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6(z-1) - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(H(1, k\pi, 0) - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)((-1)^k - \lambda)(-6 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = (-1)^k, \lambda_3 = -6 \quad (1, k\pi, 0) \text{ punti sella per ogni } k \in \mathbb{Z}$$

$$\det(H(1, k\pi, 2) - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)((-1)^k - \lambda)(6 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = (-1)^k, \lambda_3 = 6$$

$$k = 2n \quad (1, 2n\pi, 2) \text{ punti di minimo relativo per ogni } n \in \mathbb{Z}$$

$$k = 2n + 1 \quad (1, (2n + 1)\pi, 2) \text{ punti sella per ogni } n \in \mathbb{Z}$$

2) F ammette gradiente nell'origine, infatti

$$\forall h \neq 0 \quad \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad \forall k \neq 0 \quad \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0$$

$$\implies \nabla F(0, 0) = (0, 0)$$

Per studiare la derivabilità di G osserviamo che

$$G(t) = F(t^3, t) = \begin{cases} \frac{t^7}{2t^6} = \frac{t}{2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Dunque

$$G'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t) - G(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t/2}{t} = \frac{1}{2} \neq \nabla F(0, 0) \cdot (0, 1) = 0.$$

Ne deriva che F non è differenziabile in $(0, 0)$.

Per studiare la continuità di F in $(0, 0)$ portiamo innanzitutto gli esponenti a denominatore allo stesso valore. Poniamo allora $x = t^3$, $y = w$. Dobbiamo allora calcolare

$$\lim_{(t,w) \rightarrow (0,0)} \frac{t^3 w^4}{t^6 + w^6}.$$

Passiamo a coordinate polari $t = r \cos \theta$, $w = r \sin \theta$ e consideriamo il valore assoluto della funzione.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^7 |\cos^3 \theta \sin^4 \theta|}{r^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{(\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)}.$$

Sia $g(\theta) = \cos^6 \theta + \sin^6 \theta$. Proviamo che il suo minimo assoluto è strettamente positivo.

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= -6 \cos^5 \theta \sin \theta + 6 \sin^5 \theta \cos \theta = 6 \sin \theta \cos \theta (\sin^4 \theta - \cos^4 \theta) = \\ &= 6 \sin \theta \cos \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = 6 \sin \theta \cos \theta (2 \sin^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

Se risolviamo $g'(\theta) \geq 0$ otteniamo che i punti di minimo assoluto sono raggiunti nei punti $x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$. Allora $g(\theta) \geq g(\pi/4) = 1/4$ e dunque

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^7 |\cos^3 \theta \sin^4 \theta|}{r^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{(\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \leq \lim_{r \rightarrow 0} 4r = 0,$$

uniformemente in θ . Pertanto F è continua in $(0, 0)$.

- 3)** L'insieme B è un compatto (è la circonferenza di centro l'origine e raggio 3). La funzione f è continua in B e quindi per il teorema di Weierstrass esistono

massimi e minimi assoluti. Sia $g(y) = 3 + y^2 - 1 = 2 + y^2$; $g : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione g ha un minimo assoluto in $y = 0$ e due massimi assoluti per $y = \pm 3$. Allora la funzione f ammetterà minimo assoluto in $(\pm 3, 0)$ e massimo assoluto in $(0, \pm 3)$.

Metodo alternativo: $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$, B è un compatto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Determiniamo i candidati con il metodo dello Jacobiano:

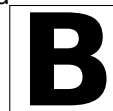
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y \\ 2x & 2y \end{array} \right| = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 9 \\ -4xy = 0 \end{array} \right. \iff (\pm 3, 0), (0, \pm 3)$$

che sono esattamente i candidati individuati con il primo metodo.

Se vogliamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange osserviamo che $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$, $Z_g \cap (\nabla g = (0, 0)) = \emptyset$. Posto $F(x, y, a) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1 + a(x^2 + y^2 - 9)$ risulta $\nabla F = (0, 0, 0)$ se e solo se

$$\left\{ \begin{array}{l} x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2a \right) = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y + 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y + 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2a = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y + 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array} \right.$$

Dal primo sistema si ottiene $(0, \pm 3)$ dal secondo $(\pm 3, 0)$.

**Esonero 26 Marzo 2024**Civile Meccanica BES/DSA Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

1) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x, y, z) = y^2(y - 3) + (x - 1)^2 - \cos z$.

[punti 12]

2) Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $F(x, y) = \frac{x^4 y}{x^6 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $F(0, 0) = 0$.

Siano $x(t) = t$, $y(t) = t^3$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

α) F ammette gradiente nell'origine

β) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$

γ) $G(t) := F(x(t), y(t))$ è derivabile nell'origine e $G'(0) = \nabla F(0, 0) \cdot (x'(0), y'(0))$

δ) F è differenziabile in $(0, 0)$

ε) F è continua in $(0, 0)$

(Selezionare le risposte esatte e motivarle)

[12 punti]

3) Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 2x^2 + 1$. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti di f nell'insieme $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$.

[punti 6]**Svolgimento**

1) Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ quindi i punti di massimo o di minimo relativo devono annullare il gradiente di f .

$$\begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ 3y(y-2) = 0 \\ \sin z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (1, 0, k\pi); (x, y, z) = (1, 2, k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Calcoliamo ora le derivate seconde

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y, z) &= 2, & f''_{xy}(x, y, z) &= 0 = f''_{yx}(x, y, z), & f''_{xz}(x, y, z) &= 0 = f''_{zx}(x, y, z) \\ f''_{yy}(x, y, z) &= 6y - 6, & f''_{yz}(x, y, z) &= 0 = f''_{zy}(x, y, z), & f''_{zz}(x, y, z) &= \cos z. \end{aligned}$$

$$H(x, y, z) - \lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6(y-1) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cos z - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(H(1, 0, k\pi) - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -6 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-6 - \lambda)((-1)^k - \lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = (-1)^k$ $(1, 0, k\pi)$ punti sella per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\det(H(1, 2, k\pi) - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(6 - \lambda)((-1)^k - \lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = (-1)^k$

$k = 2n$ $(1, 2, 2n\pi)$ punti di minimo relativo per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$k = 2n + 1$ $(1, 2, (2n + 1)\pi)$ punti sella per ogni $n \in \mathbb{Z}$

2) F ammette gradiente nell'origine, infatti

$$\begin{aligned} \forall h \neq 0 \quad \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} &= 0, & \forall k \neq 0 \quad \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} &= 0 \\ \implies \nabla F(0, 0) &= (0, 0) \end{aligned}$$

Per studiare la derivabilità di G osserviamo che

$$G(t) = F(t, t^3) = \begin{cases} \frac{t^7}{2t^6} = \frac{t}{2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Dunque

$$G'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t) - G(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t/2}{t} = \frac{1}{2} \neq \nabla F(0, 0) \cdot (1, 0) = 0.$$

Ne deriva che F non è differenziabile in $(0, 0)$.

Per studiare la continuità di F in $(0, 0)$ portiamo innanzitutto gli esponenti a denominatore allo stesso valore. Poniamo allora $x = w$, $y = t^3$. Dobbiamo allora calcolare

$$\lim_{(w,t) \rightarrow (0,0)} \frac{w^4 t^3}{w^6 + t^6}.$$

Passiamo a coordinate polari $w = r \cos \theta$, $t = r \sin \theta$ e consideriamo il valore assoluto della funzione.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^7 |\cos^4 \theta \sin^3 \theta|}{r^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{(\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)}.$$

Sia $g(\theta) = \cos^6 \theta + \sin^6 \theta$. Proviamo che il suo minimo assoluto è strettamente positivo.

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= -6 \cos^5 \theta \sin \theta + 6 \sin^5 \theta \cos \theta = 6 \sin \theta \cos \theta (\sin^4 \theta - \cos^4 \theta) = \\ &= 6 \sin \theta \cos \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = 6 \sin \theta \cos \theta (2 \sin^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

Se risolviamo $g'(\theta) \geq 0$ otteniamo che i punti di minimo assoluto sono raggiunti nei punti $x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$. Allora $g(\theta) \geq g(\pi/4) = 1/4$ e dunque

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^7 |\cos^4 \theta \sin^3 \theta|}{r^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{(\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \leq \lim_{r \rightarrow 0} 4r = 0,$$

uniformemente in θ . Pertanto F è continua in $(0, 0)$.

- 3)** L'insieme B è un compatto (è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2). La funzione f è continua in B e quindi per il teorema di Weierstrass esistono

massimi e minimi assoluti. Sia $g(x) = 2 + 2x^2 + 1 = 3 + 2x^2$; $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$.
 La funzione g ha un minimo assoluto in $x = 0$ e due massimi assoluti per $x = \pm 2$. Allora la funzione f ammetterà minimo assoluto in $(0, \pm 2)$ e massimo assoluto in $(\pm 2, 0)$.

Metodo alternativo: $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$, B è un compatto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Determiniamo i candidati con il metodo dello Jacobiano:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \left| \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4x}{2x} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 8xy = 0 \end{cases} \iff (0, \pm 2), (\pm 2, 0)$$

che sono esattamente i candidati individuati con il primo metodo.

Se vogliamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange osserviamo che $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$, $Z_g \cap (\nabla g = (0, 0)) = \emptyset$. Posto $F(x, y, a) = \sqrt{x^2 + y^2} + 2x^2 + 1 + a(x^2 + y^2 - 4)$ risulta $\nabla F = (0, 0, 0)$ se e solo se

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4x + 2ax = 0 \\ y\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2a\right) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4x + 2ax = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4x + 2ax = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2a = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Dal primo sistema si ottiene $(\pm 2, 0)$ dal secondo $(0, \pm 2)$.

**Esonero 26 Marzo 2024**Civile Meccanica BES/DSA Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

1) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x, y, z) = x^2(x - 3) + (z - 1)^2 - \cos y$.

[punti 12]

2) Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $F(x, y) = \frac{xy^4}{x^2 + y^6}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $F(0, 0) = 0$.

Siano $x(t) = t^3$, $y(t) = t$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

α) F è continua in $(0, 0)$ V F

β) F ammette gradiente nell'origine V F

γ) $\nabla F(0, 0) = (1, 0)$ V F

δ) F è differenziabile in $(0, 0)$ V F

ε) $G(t) := F(x(t), y(t))$ è derivabile nell'origine e $G'(0) = \nabla F(0, 0) \cdot (x'(0), y'(0))$

 V F

(Selezionare le risposte esatte e motivarle)

[12 punti]

3) Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - 1$. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti di f nell'insieme $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 16\}$.

[punti 6]**Svolgimento**

1) Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ quindi i punti di massimo o di minimo relativo devono annullare il gradiente di f .

$$\begin{cases} 3x(x-2) = 0 \\ \sin y = 0 \\ 2(z-1) = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (0, k\pi, 1); (x, y, z) = (2, k\pi, 1) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Calcoliamo ora le derivate seconde

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y, z) &= 6x - 6, & f''_{xy}(x, y, z) &= 0 = f''_{yx}(x, y, z), & f''_{xz}(x, y, z) &= 0 = f''_{zx}(x, y, z) \\ f''_{yy}(x, y, z) &= \cos y, & f''_{yz}(x, y, z) &= 0 = f''_{zy}(x, y, z), & f''_{zz}(x, y, z) &= 2. \end{aligned}$$

$$H(x, y, z) - \lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 6(x-1) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(H(0, k\pi, 1) - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -6 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (-6 - \lambda)((-1)^k - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

$\lambda_1 = -6, \lambda_2 = (-1)^k, \lambda_3 = 2$ $(0, k\pi, 1)$ punti sella per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\det(H(2, k\pi, 1) - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)((-1)^k - \lambda)(2 - \lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = (-1)^k, \lambda_3 = 2$

$k = 2n$ $(2, 2n\pi, 1)$ punti di minimo relativo per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$k = 2n + 1$ $(2, (2n + 1)\pi, 1)$ punti sella per ogni $n \in \mathbb{Z}$

2) Vedi esercizio 2 Compito A.

3) L'insieme B è un compatto (è la circonferenza di centro l'origine e raggio 4).

La funzione f è continua in B e quindi per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Sia $g(x) = 4 + x^2 - 1 = 3 + x^2; g: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione g ha un minimo assoluto in $x = 0$ e due massimi assoluti per $x =$

± 4 . Allora la funzione f ammetterà minimo assoluto in $(0, \pm 4)$ e massimo assoluto in $(\pm 4, 0)$.

Metodo alternativo: $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$, B è un compatto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti.

Determiniamo i candidati con il metodo dello Jacobiano:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 4xy = 0 \end{cases} \iff (\pm 4, 0), (0, \pm 4)$$

che sono esattamente i candidati individuati con il primo metodo.

Se vogliamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange osserviamo che $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$, $Z_g \cap (\nabla g = (0, 0)) = \emptyset$. Posto $F(x, y, a) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - 1 + a(x^2 + y^2 - 16)$ risulta $\nabla F = (0, 0, 0)$ se e solo se

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x + 2ax = 0 \\ y\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2a\right) = 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x + 2ax = 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2a = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x + 2ax = 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

Dal primo sistema si ottiene $(\pm 4, 0)$ dal secondo $(0, \pm 4)$.

**Esonero 26 Marzo 2024**Civile Meccanica BES/DSA

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

1) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x, y, z) = x^2(x - 3) + (y - 1)^2 - \cos z$.

[punti 12]

2) Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $F(x, y) = \frac{x^4 y}{x^6 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $F(0, 0) = 0$.

Siano $x(t) = t$, $y(t) = t^3$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

α) F è continua in $(0, 0)$

 V F

β) F ammette gradiente nell'origine

 V F

γ) $\nabla F(0, 0) = (0, 1)$

 V F

δ) $G(t) := F(x(t), y(t))$ è derivabile nell'origine e $G'(0) = \nabla F(0, 0) \cdot (x'(0), y'(0))$

 V F

ε) F è differenziabile in $(0, 0)$

 V F

(Selezionare le risposte esatte e motivarle)

[12 punti]

3) Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 2x^2 + 1$. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti di f nell'insieme $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$.

[punti 6]

Svolgimento

1) Risulta $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ quindi i punti di massimo o di minimo relativo devono annullare il gradiente di f .

$$\begin{cases} 3x(x-2) = 0 \\ 2(y-1) = 0 \\ \sin z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (0, 1, k\pi); (x, y, z) = (2, 1, k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Calcoliamo ora le derivate seconde

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y, z) &= 6(x-1), & f''_{xy}(x, y, z) &= 0 = f''_{yx}(x, y, z), & f''_{xz}(x, y, z) &= 0 = f''_{zx}(x, y, z) \\ f''_{yy}(x, y, z) &= 2, & f''_{yz}(x, y, z) &= 0 = f''_{zy}(x, y, z), & f''_{zz}(x, y, z) &= \cos z. \end{aligned}$$

$$H(x, y, z) - \lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 6(x-1) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cos z - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(H(0, 1, k\pi) - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -6 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k - \lambda \end{vmatrix} = (-6 - \lambda)(2 - \lambda)((-1)^k - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -6, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = (-1)^k \quad (0, 1, k\pi) \text{ punti sella per ogni } k \in \mathbb{Z}$$

$$\det(H(2, 1, k\pi) - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(2 - \lambda)((-1)^k - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = (-1)^k$$

$$k = 2n \quad (2, 1, 2n\pi) \text{ punti di minimo relativo per ogni } n \in \mathbb{Z}$$

$$k = 2n + 1 \quad (2, 1, (2n + 1)\pi) \text{ punti sella per ogni } n \in \mathbb{Z}$$

2) Vedi esercizio 2 Compito B.

3) L'insieme B è un compatto (è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2).

La funzione f è continua in B e quindi per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Sia $g(x) = 2 + 2x^2 + 1 = 3 + 2x^2$; $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$.

La funzione g ha un minimo assoluto in $x = 0$ e due massimi assoluti per $x =$

± 2 . Allora la funzione f ammetterà minimo assoluto in $(0, \pm 2)$ e massimo assoluto in $(\pm 2, 0)$.

Metodo alternativo: $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$, B è un compatto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti.

Determiniamo i candidati con il metodo dello Jacobiano:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4 \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4x & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 2x & 2y \end{array} \right| = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4 \\ 8xy = 0 \end{array} \right. \iff (0, \pm 2), (\pm 2, 0)$$

che sono esattamente i candidati individuati con il primo metodo.

Se vogliamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange osserviamo che $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$, $Z_g \cap (\nabla g = (0, 0)) = \emptyset$. Posto $F(x, y, a) = \sqrt{x^2 + y^2} + 2x^2 + 1 + a(x^2 + y^2 - 4)$ risulta $\nabla F = (0, 0, 0)$ se e solo se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4x + 2ax = 0 \\ y\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2a\right) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4x + 2ax = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4x + 2ax = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2a = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{array} \right.$$

Dal primo sistema si ottiene $(\pm 2, 0)$ dal secondo $(0, \pm 2)$.

**Esonero 3 Maggio 2024**Civile

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y'' - 4xy' + 4y = \sqrt{x} \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

2) Determinare il baricentro della lamina piana D , di densità costante uguale a 1, delimitata da $x = 0$, $y = \pm 1$, e $x^2 + y^2 \leq 2x$ quando $x \in [1, 2]$.

3) Determinare l'integrale generale del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 4x(t) - y(t) \end{cases}$$

Svolgimento

1) $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$ è una equazione equidimensionale di Eulero del secondo ordine. Visto che il dato iniziale è calcolato in $x = 1$ poniamo $x = e^z$ e dunque l'equazione diventa

$$(1) \quad y''(z) - y'(z) - 4y'(z) + 4y(z) = e^{z/2},$$

questa ultima è una equazione differenziale lineare del secondo ordine, completa, a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $\alpha^2 - 5\alpha + 4 = 0$ che ammette come soluzioni $\alpha = 1$, $\alpha = 4$. Dunque l'integrale della equazione omogenea (in z) è dato da $y(z) = c_1 e^z +$

$c_2 e^{4z}$. Determiniamo ora una soluzione particolare della equazione completa, della forma $h(z) = a e^{z/2}$. Risulta $\frac{a}{4} - \frac{5a}{2} + 4a = 1 \iff a = \frac{4}{7}$. Pertanto l'integrale generale di (1) è

$$y(z) = c_1 e^z + c_2 e^{4z} + \frac{4}{7} e^{z/2}.$$

Deriviamola rispetto a z

$$y'(z) = c_1 e^z + 4c_2 e^{4z} + \frac{2}{7} e^{z/2}.$$

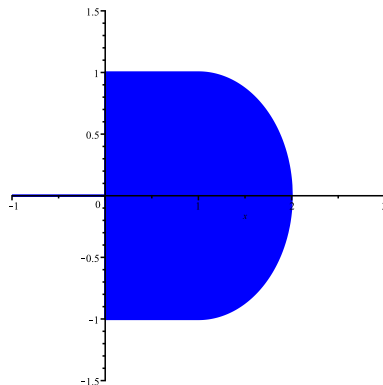
Per determinare la soluzione particolare osserviamo che, se $x = 1$ allora $z = 0$ e quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + \frac{4}{7} = 1 \\ y'(0) = c_1 + 4c_2 + \frac{2}{7} = 0 \end{cases} \iff c_1 = \frac{2}{3}, c_2 = -\frac{5}{21}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è allora

$$y(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{21}x^4 + \frac{4}{7}\sqrt{x}.$$

- 2)** L'insieme D è composto dal rettangolo $[0, 1] \times [-1, 1]$ e dalla semicirconferenza destra di centro $C(1, 0)$ e raggio 1 ed è rappresentato in figura da:



La massa di D sarà pari a $2 + \frac{\pi}{2}$ e, per simmetria, dovrà risultare $y_G = 0$. Basterà allora calcolare x_G . Denotiamo con D_1 il rettangolo $[0, 1] \times [-1, 1]$

e con D_2 la semicirconferenza destra.

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2}{4+\pi} \iint_D x dx dy = \frac{2}{4+\pi} \left\{ \iint_{D_1} x dx dy + \iint_{D_2} x dx dy \right\} \\ &= \frac{2}{4+\pi} \left\{ \int_0^1 x dx \int_{-1}^1 dy + \iint_{D_2} x dx dy \right\} = \frac{2}{4+\pi} \left\{ 1 + \iint_{D_2} x dx dy \right\} \end{aligned}$$

Per calcolare il secondo integrale utilizziamo le coordinate polari nella forma:

$x = 1 + r \cos t, y = r \sin t$ con $r \in [0, 1]$, e $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Pertanto

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2}{4+\pi} \left\{ 1 + \int_0^1 r dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + r \cos t) dt \right\} = \\ &= \frac{2}{4+\pi} \left\{ 1 + \int_0^1 r dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt + \int_0^1 r^2 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt \right\} = \\ &= \frac{2}{4+\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} + \left(\int_0^1 r^2 dr \right) \cdot \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt \right) \right\} = \\ &= \frac{2}{4+\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2 \right\} \end{aligned}$$

- 3)** Dalla prima equazione $y(t) = x'(t) - 2x(t)$. Derivando la prima equazione rispetto a t e sostituendo $y(t), y'(t)$ si ottiene $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 0$ che ha come equazione caratteristica $\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$ (soluzioni $\alpha = 3, \alpha = -2$). L'integrale generale è allora

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}, & x'(t) &= 3c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-2t} \\ y(t) &= x'(t) - 2x(t) = c_1 e^{3t} - 4c_2 e^{-2t}. \end{aligned}$$



Esonero 3 Maggio 2024

Meccanica

Svolgere i seguenti esercizi, **motivando adeguatamente i risultati**.

1) Disegnare l'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 \geq y^2 + z^2, x \geq 0\}$.

Riscrivere l'insieme A nella forma: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D, \alpha(y, z) \leq x \leq \beta(y, z)\}$ e in coordinate cilindriche (con y e z polari)

2) Calcolare, sia in coordinate cartesiane che cilindriche,

$$\iiint_A x(y^2 + z^2) dx dy dz.$$

3) Utilizzando le formule di Green, calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{(1-x)(1+y^2)}{1+x^2} dx + y dy$$

quando γ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$ percorso in verso antiorario

Svolgimento

1) Da $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x^2 \geq y^2 + z^2$, $x \geq 0$ si ottiene

$$y^2 + z^2 \leq x^2 \leq 1 - y^2 - z^2 \quad \& \quad x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2}$$

$$y^2 + z^2 \leq 1 - y^2 - z^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + z^2 \leq \frac{1}{2}$$

Pertanto, se denotiamo con $D = \{(y, z) : y^2 + z^2 \leq \frac{1}{2}\}$, si ha:

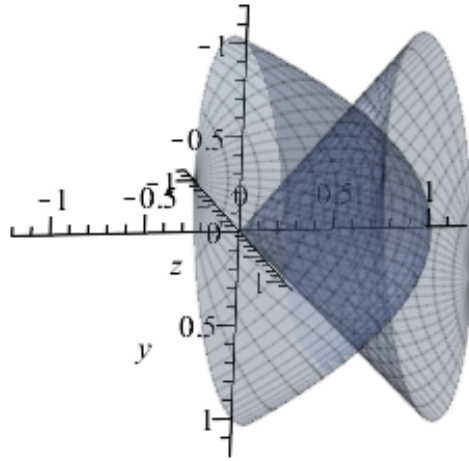
$$A \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D, \sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2}\}.$$

Per scrivere l'insieme A in coordinate cilindriche poniamo

$$\begin{cases} x = x \\ y = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$$

per quanto visto sopra $0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, mentre $\rho \leq x \leq \sqrt{1-\rho^2}$, quindi

$$A \rightarrow E = \{(x, \rho, \theta) : \rho \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta \in [0, 2\pi], \rho \leq x \leq \sqrt{1-\rho^2}\}.$$



2) Utilizzando il punto precedente si ha:

$$\begin{aligned} \iiint_A x(y^2 + z^2) dx dy dz &= \iint_D (y^2 + z^2) dy dz \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} x dx = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (y^2 + z^2) [x^2]_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (y^2 + z^2)(1 - 2y^2 - 2z^2) dy dz \end{aligned}$$

A questo punto calcoliamo l'integrale doppio in coordinate polari ($y = r \cos t, z = r \sin t$) e dunque:

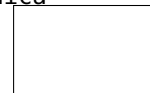
$$\begin{aligned} \iiint_A x(y^2 + z^2) dx dy dz &= \frac{1}{2} \iint_D (y^2 + z^2)(1 - 2y^2 - 2z^2) dy dz = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} r^3(1 - 2r^2) dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{2}/2} (r^3 - 2r^5) dr = \frac{\pi}{48}. \end{aligned}$$

In coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} \iiint_A x(y^2 + z^2) dx dy dz &= \iiint_E x\rho^3 dx d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}/2} \rho^3 d\rho \int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}} x dx = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}/2} \rho^3(1 - 2\rho^2) d\rho = \frac{\pi}{48}. \end{aligned}$$

- 3)** Sia T il triangolo $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x\}$. T è un dominio regolare rispetto all'asse x e $+Fr(T) = \gamma$ percorsa in verso antiorario. Le funzioni integrande sono di classe $C^1(T)$ pertanto

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{(1-x)(1+y^2)}{1+x^2} dx + y dy &= \iint_T \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(1-x)(1+y^2)}{1+x^2} \right) + \frac{\partial y}{\partial x} \right] dx dy = \\ &= \iint_T \frac{(x-1)2y}{1+x^2} dx dy = \int_0^1 \frac{(x-1)}{1+x^2} dx \int_0^{2-2x} 2y dy = \\ &= \int_0^1 \frac{4(x-1)^3}{1+x^2} dx = 4 \int_0^1 \left\{ x - 3 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \right\} dx = \\ &= 4 \left[\frac{x^2}{2} - 3x + \log(x^2+1) + 2 \arctan x \right]_0^1 = 2\pi + 4 \log 2 - 10. \end{aligned}$$

**Esonero 28 Maggio 2024**

1) L'integrale della forma differenziale

$$\omega = (e^y + ye^x)dx + [(x + 1)e^y + e^x]dy$$

lungo un arco di circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio r , orientata in verso antiorario, è:

- uguale a zero;
- uguale a 2π ;
- dipende dagli estremi dell'arco di circonferenza;
- non dipende da r .

2a) Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Scrivere le equazioni della sua frontiera e calcolare il flusso del campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ uscente da $Fr(D)$.

2b) Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}$. Scrivere le equazioni della sua frontiera e calcolare il flusso del campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ uscente da $Fr(D)$.

3) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$ è:

- convergente uniformemente in \mathbb{R} , ma non totalmente in \mathbb{R} ;
- convergente puntualmente in \mathbb{R} , ma non uniformemente in \mathbb{R} ;
- convergente puntualmente in $(0, +\infty)$, ma non uniformemente in $(0, +\infty)$;
- convergente totalmente in \mathbb{R} ;
- nessuna delle altre risposte è corretta.

Svolgimento

1) La forma differenziale lineare ω è di classe C^1 in tutto \mathbb{R}^2 . Siccome \mathbb{R}^2 non ha buchi allora, in questo caso, ω è chiusa se e solo se è esatta. Risulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(e^y + ye^x) &= e^y + e^x \\ \frac{\partial}{\partial x}[(x+1)e^y + e^x] &= e^y + e^x.\end{aligned}$$

Determiniamo la classe delle primitive di ω .

$$\begin{aligned}U(x, y) &= \int (e^y + ye^x) dx = xe^y + ye^x + f(y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(xe^y + ye^x + f(y)) &= xe^y + e^x + f'(y) = [(x+1)e^y + e^x] \iff f'(y) = e^y \\ U(x, y) &= xe^y + ye^x + e^y + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Sia ora $\gamma = (x(t), y(t)) = (r \cos t, r \sin t)$, $a \leq t \leq b$ con $0 < a < b < 2\pi$. Si ha

$$\int_{\gamma} \omega = U(r \cos b, r \sin b) - U(r \cos a, r \sin a),$$

pertanto dipende dagli estremi dell'arco di circonferenza.

2a) L'insieme D è la semisfera (piena) contenuta nell'emisfero boreale ed è un dominio regolare. La sua frontiera è costituita da:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

La funzione $F \in C^1(D)$ e quindi si può applicare il teorema della divergenza e poi passare a coordinate sferiche:

$$\begin{aligned}\int_{Fr(D)} F \cdot n_e dS &= \iiint_D \nabla \cdot F dx dy dz = 3 \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{6}{5} \pi.\end{aligned}$$

2b) L'insieme D è la semisfera (piena) contenuta nell'emisfero australe ed è un dominio regolare. La sua frontiera è costituita da:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

La funzione $F \in C^1(D)$ e quindi si può applicare il teorema della divergenza e poi passare a coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \int_{Fr(D)} F \cdot n_e dS &= \iiint_D \nabla \cdot F dx dy dz = 3 \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= 3 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{6}{5}\pi. \end{aligned}$$

3) Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$. g è una funzione dispari e risulta:

$$g'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0 \iff |x| \leq 1.$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$$

e dunque

$$|g(x)| \leq g(1) = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Poniamo allora $L_n = \frac{1}{2^n}$. La serie data risulta convergente totalmente su tutto \mathbb{R} .



Esonero 4 Novembre 2024

iscritto al secondo anno di corso

SI

NO

BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi. **L'esercizio 1 va risolto motivando adeguatamente i passaggi e i risultati.**

1) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = x + z$ nell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 = 2\}$. **[16 punti]**

2) L'integrale generalizzato $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \log^2 x}$:

(a) converge a 1;

(b) diverge perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \log^2 x} = +\infty$;

(c) converge a 0;

(d) non esiste, perché la funzione $f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}$ non è definita in $x = 0$.

(Selezionare la risposta esatta

[5 punti])

3) Il coefficiente b_2 nello sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \cos(2x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

vale

(a) π ;

(b) nessuno dei valori è corretto;

(c) $\frac{1}{2}$;

(d) 0.

(Selezionare la risposta esatta

[5 punti])

4) Sia $f(x, y) = y^4 e^{3x}$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, -1)$ è massima nella direzione:

(a) $\mathbf{u} = (3, -4)$;

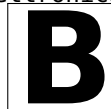
(b) $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$;

(c) $\mathbf{u} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$;

(d) nessuna delle altre risposte è corretta.

(Selezionare la risposta esatta

[4 punti])

**Esonero 4 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi. **L'esercizio 1 va risolto motivando adeguatamente i passaggi e i risultati.**

1) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = x - y$ nell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 = 2\}$. **[16 punti]**

2) L'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + 4x^2}$:

(a) diverge;

(b) converge a $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 4x^2}$;(c) converge a $\frac{\pi}{4}$;(d) converge a $\frac{\pi}{2}$.

(Selezionare la risposta esatta)

[5 punti]

3) La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ha periodo $T = 2$. Il coefficiente a_3 vale

1) $-\frac{2}{9\pi^2}$;

2) 0;

3) $-\frac{2}{3\pi^2}$;

4) nessuna delle risposte precedenti è esatta.

(Selezionare la risposta esatta)

[5 punti]

4) Sia $f(x, y) = e^{2x} \sin y$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial u} \left(0, \frac{\pi}{6} \right)$ è massima nella direzione:

(a) $u = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$;

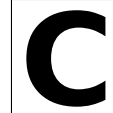
(b) $u = \left(-\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{2\sqrt{7}}{7} \right)$;

(c) $u = \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7} \right)$;

(d) nessuna delle altre risposte è corretta.

(Selezionare la risposta esatta)

[4 punti]

**Esonero 4 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi. **L'esercizio 1 va risolto motivando adeguatamente i passaggi e i risultati.**

1) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = y + z$ nell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 = 2\}$. **[16 punti]**

2) L'integrale generalizzato $\int_0^1 \log x \, dx$:

(a) diverge perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$;

(b) converge a -1 ;

(c) converge a 1 ;

(d) è uguale al valore del seguente limite: $\lim_{b \rightarrow 0^+} (\log b - b)$.

(Selezionare la risposta esatta

[5 punti])

3) Il coefficiente b_1 nello sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

vale

(a) $-\frac{1}{2}$;

(b) 1 ;

(c) $\frac{1}{2}$;

(d) nessuno dei valori è corretto.

(Selezionare la risposta esatta

[5 punti])

4) Sia $f(x, y) = y^4 e^{3x}$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial u}(0, -1)$ è nulla nella direzione:

(a) $u = (3, -4)$;

(b) $u = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$;

(c) $u = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$;

(d) nessuna delle altre risposte è corretta.

(Selezionare la risposta esatta)

[4 punti]

**Esonero 4 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi. **L'esercizio 1 va risolto motivando adeguatamente i passaggi e i risultati.**

1) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = x + z$ nell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 2\}$. **[16 punti]**

2) L'integrale generalizzato $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$:

(a) diverge;

(b) converge a $-\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$;(c) non esiste, perché la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ non è definita in $x = -1$;(d) converge a $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

(Selezionare la risposta esatta)

[5 punti]

3) La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ha periodo $T = 2$. Il coefficiente b_4 vale

1) $-\frac{1}{4\pi}$;2) $\frac{1}{4\pi}$;3) $\frac{1}{16\pi^2}$;

4) nessuna delle risposte precedenti è esatta.

(Selezionare la risposta esatta)

[5 punti]

4) Sia $f(x, y) = e^{2x} \sin y$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \left(0, \frac{\pi}{6} \right)$ è nulla nella direzione:

(a) $\mathbf{u} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$;

(b) $\mathbf{u} = \left(-\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{2\sqrt{7}}{7} \right)$;

(c) $\mathbf{u} = \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7} \right)$;

(d) nessuna delle altre risposte è corretta.

(Selezionare la risposta esatta)

[4 punti]

**Esonero 4 Novembre 2024**iscritto al secondo anno di corso SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi. **L'esercizio 1 va risolto motivando adeguatamente i passaggi e i risultati.**

1) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = x - y$ nell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 2\}$. **[16 punti]**

2) L'integrale generalizzato $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \log^2 x}$:

- (a) non esiste, perché la funzione $f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}$ non è definita in $x = 0$;
 (b) converge a 0;
 (c) diverge perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \log^2 x} = +\infty$;
 (d) converge a 1.

(Selezionare la risposta esatta)

[5 punti]

3) Il coefficiente a_2 nello sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \cos(2x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

vale

- (a) nessuno dei valori è corretto;
 (b) $\frac{1}{2}$;
 (c) $\frac{\pi}{2}$;
 (d) 1.

(Selezionare la risposta esatta)

[5 punti]

4) Sia $f(x, y) = y^4 e^{3x}$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, -1)$ è nulla nella direzione:

(a) $\nu = (3, -4)$;

(b) $\nu = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$;

(c) $\nu = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$;

(d) nessuna delle altre risposte è corretta.

(Selezionare la risposta esatta)

[4 punti]

**Esonero 4 Novembre 2024**iscritto al secondo anno di corso SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi. **L'esercizio 1 va risolto motivando adeguatamente i passaggi e i risultati.**

1) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = y + 2z$ nell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 2\}$. **[16 punti]**

2) L'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + 4x^2}$:

(a) converge a $\frac{\pi}{2}$;

(b) converge a $\frac{\pi}{4}$;

(c) converge a $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 4x^2}$;

(d) diverge. (Selezionare la risposta esatta **[5 punti]**)

3) La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ha periodo $T = 2$. Il coefficiente a_3 vale

1) 0;

2) $-\frac{2}{9\pi^2}$;

3) $-\frac{2}{3\pi^2}$;

4) nessuna delle risposte precedenti è esatta.

(Selezionare la risposta esatta

[5 punti])

4) Sia $f(x, y) = e^{2x} \sin y$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \left(0, \frac{\pi}{6} \right)$ è nulla nella direzione:

(a) $\mathbf{u} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$;

(b) $\mathbf{u} = \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7} \right)$;

(c) $\mathbf{u} = \left(-\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{2\sqrt{7}}{7} \right)$;

(d) nessuna delle altre risposte è corretta.

(Selezionare la risposta esatta)

[4 punti]

**Esonero 4 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi. **L'esercizio 1 va risolto motivando adeguatamente i passaggi e i risultati.**

1) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = x + z$ nell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, y^2 + z^2 = 1\}$. **[16 punti]**

2) L'integrale generalizzato $\int_0^1 \log x \, dx$:

(a) è uguale al valore del seguente limite: $\lim_{b \rightarrow 0^+} (\log b - b)$;

(b) converge a $+1$;

(c) converge a -1 ;

(d) diverge perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$.

(Selezionare la risposta esatta)

[5 punti]

3) Il coefficiente a_1 nello sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

vale

(a) 0;

(b) $\frac{1}{2}$;

(c) nessuno dei valori è corretto;

(d) $\frac{\pi}{2}$.

(Selezionare la risposta esatta

[5 punti])

4) Sia $f(x, y) = y^4 e^{3x}$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial u}(0, -1)$ è massima nella direzione:

(a) $u = (3, -4)$;

(b) $u = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$;

(c) $u = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$;

(d) nessuna delle altre risposte è corretta.

(Selezionare la risposta esatta

[4 punti])

**Esonero 4 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi. **L'esercizio 1 va risolto motivando adeguatamente i passaggi e i risultati.**

1) Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = x - y$ nell'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, y^2 + z^2 = 1\}$. **[16 punti]**

2) L'integrale generalizzato $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$:

(a) converge a $-\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$;

(b) diverge;

(c) converge a $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$;

(d) non esiste, perché la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ non è definita in $x = -1$.

(Selezionare la risposta esatta)

[5 punti]

3) La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ha periodo $T = 2$. Il coefficiente b_4 vale

1) $+\frac{1}{4\pi}$;

2) $-\frac{1}{4\pi}$;

3) $\frac{1}{16\pi^2}$;

4) nessuna delle risposte precedenti è esatta.

(Selezionare la risposta esatta)

[5 punti]

4) Sia $f(x, y) = e^{2x} \sin y$. La derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial u} \left(0, \frac{\pi}{6} \right)$ è massima nella direzione:

(a) $u = \left(-\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{2\sqrt{7}}{7} \right)$;

(b) $u = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$;

(c) $u = \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7} \right)$;

(d) nessuna delle altre risposte è corretta.

(Selezionare la risposta esatta)

[4 punti]

Svolgimento

1A) L'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ è un compatto, infatti è limitato: $A \subset [-1, 1] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e posto $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2$, g_1 e g_2 sono continue e $A = g_1^{-1}(1) \cap g_2^{-1}(2)$ e dunque è un chiuso perché inversa immagine di chiusi.

La funzione f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti.

Per determinare questi punti osserviamo che $f \in C^1(A)$, $A^\circ = \emptyset$ e quindi non ci sono punti interni in cui applicare il teorema di Fermat. (tutti i punti sono di frontiera) Inoltre, posto

$$\phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad \phi_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2 = 0,$$

$$F(x, y, z, a, b) = f(x, y, z) + a\phi_1(x, y, z) + b\phi_2(x, y, z),$$

i punti di massimo e di minimo assoluti devono soddisfare uno dei due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} \leq 1 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = 2 \\ F'_x(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_y(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_z(x, y, z, a, b) = 0 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

Risulta

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} \leq 1 \iff xy = 0, \quad xz = 0, \quad yz = 0.$$

$$\begin{array}{l} x = 0 \xrightarrow{\phi_1=0} y = \pm 1 \xrightarrow{\phi_2=0} z = \pm 1 \quad (\implies yz \neq 0) \\ y = 0 \xrightarrow{\phi_1=0} x = \pm 1 \xrightarrow{\phi_2=0} z = \pm \sqrt{2} \quad (\implies xz \neq 0) \\ z = 0 \xrightarrow{\phi_2=0} y = \pm \sqrt{2} \xrightarrow{\phi_1=0} x \in \emptyset \end{array}$$

Quindi il primo sistema non ammette soluzioni. Andiamo a determinare quelle del secondo sistema (moltiplicatori di Lagrange).

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A \\ 1 + 2ax = 0 \\ 2ay + 2by = 0 \\ 1 + 2bz = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A, a \neq 0, b \neq 0 \\ x = -\frac{1}{2a} \\ y(a + b) = 0 \\ z = -\frac{1}{2b} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{array} \right.$$

Se $y = 0$ allora $x = \pm 1, z = \pm \sqrt{2}$.

Se $a + b = 0$ allora $z = -x$ e quindi non ci sono soluzioni comuni ai due vincoli. Rimangono pertanto individuati 4 punti $(\pm 1, 0, \pm \sqrt{2})$. Per studiarne la natura utilizziamo Weierstrass. Se calcoliamo i valori di f in questi punti osserviamo che $f(1, 0, \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$ è il massimo assoluto, $f(-1, 0, -\sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2}$ è il minimo assoluto.

1B) L'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ è un compatto, infatti è limitato: $A \subset [-1, 1] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e posto $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2$, g_1 e g_2 sono continue e $A = g_1^{-1}(1) \cap g_2^{-1}(2)$ e dunque è un chiuso perché inversa immagine di chiusi.

La funzione f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti.

Per determinare questi punti osserviamo che $f \in C^1(A)$, $A^\circ = \emptyset$ e quindi non ci sono punti interni in cui applicare il teorema di Fermat. (tutti i punti sono di frontiera) Inoltre, posto

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 1 = 0, & \phi_2(x, y, z) &= y^2 + z^2 - 2 = 0, \\ F(x, y, z, a, b) &= f(x, y, z) + a\phi_1(x, y, z) + b\phi_2(x, y, z), \end{aligned}$$

i punti di massimo e di minimo assoluti devono soddisfare uno dei due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} \leq 1 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = 2 \\ F'_x(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_y(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_z(x, y, z, a, b) = 0 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

Risulta

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} \leq 1 \iff xy = 0, \quad xz = 0, \quad yz = 0.$$

$$\begin{array}{l} x = 0 \xrightarrow{\phi_1=0} y = \pm 1 \xrightarrow{\phi_2=0} z = \pm 1 \quad (\implies yz \neq 0) \\ y = 0 \xrightarrow{\phi_1=0} x = \pm 1 \xrightarrow{\phi_2=0} z = \pm \sqrt{2} \quad (\implies xz \neq 0) \\ z = 0 \xrightarrow{\phi_2=0} y = \pm \sqrt{2} \xrightarrow{\phi_1=0} x \in \emptyset \end{array}$$

Quindi il primo sistema non ammette soluzioni. Andiamo a determinare quelle del secondo sistema (moltiplicatori di Lagrange).

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A \\ 1 + 2ax = 0 \\ -1 + 2ay + 2bz = 0 \\ 2bz = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A, a \neq 0, b = 0 \\ x = -\frac{1}{2a} \\ y = \frac{1}{2a} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{array} \right.$$

Se $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ allora $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}, z = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$. Se $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ allora $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, z = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Se $z = 0$ allora $x^2 + 1 = 0$ e quindi il sistema non ammette soluzioni.

Rimangono pertanto individuati 4 punti $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{6}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{6}}{2})$. Per

studiarne la natura utilizziamo Weierstrass. Se calcoliamo i valori di f in questi punti osserviamo che $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{2}) = \sqrt{2}$ è il massimo assoluto, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{2}) = -\sqrt{2}$ è il minimo assoluto.

1C) L'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ è un compatto, infatti è limitato: $A \subset [-1, 1] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e posto $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2$, g_1 e g_2 sono continue e $A = g_1^{-1}(1) \cap g_2^{-1}(2)$ e dunque è un chiuso perché inversa immagine di chiusi.

La funzione f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti.

Per determinare questi punti osserviamo che $f \in C^1(A)$, $A^\circ = \emptyset$ e quindi non ci sono punti interni in cui applicare il teorema di Fermat. (tutti i punti sono di frontiera) Inoltre, posto

$$\phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad \phi_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2 = 0,$$

$$F(x, y, z, a, b) = f(x, y, z) + a\phi_1(x, y, z) + b\phi_2(x, y, z),$$

i punti di massimo e di minimo assoluti devono soddisfare uno dei due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} \leq 1 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = 2 \\ F'_x(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_y(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_z(x, y, z, a, b) = 0 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

Risulta

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{array} \right) \leq 1 \iff xy = 0, \quad xz = 0, \quad yz = 0.$$

$$\begin{aligned}
 x = 0 & \stackrel{\phi_1=0}{\implies} y = \pm 1 \stackrel{\phi_2=0}{\implies} z = \pm 1 \quad (\implies yz \neq 0) \\
 y = 0 & \stackrel{\phi_1=0}{\implies} x = \pm 1 \stackrel{\phi_2=0}{\implies} z = \pm \sqrt{2} \quad (\implies xz \neq 0) \\
 z = 0 & \stackrel{\phi_2=0}{\implies} y = \pm \sqrt{2} \stackrel{\phi_1=0}{\implies} x \in \emptyset
 \end{aligned}$$

Quindi il primo sistema non ammette soluzioni. Andiamo a determinare quelle del secondo sistema (moltiplicatori di Lagrange).

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A \\ 2ax = 0 \\ 1 + 2ay + 2by = 0 \\ 1 + 2bz = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A, a = 0, b \neq 0 \\ y = -\frac{1}{2b} \\ z = -\frac{1}{2b} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{array} \right.$$

Se $b = \frac{1}{2}$ allora $x = 0, y = -1, z = -1$. Se $b = -\frac{1}{2}$ allora $x = 0, y = 1, z = 1$.

Se $x = 0$ allora $y = \pm 1, z = \pm 1$.

Rimangono pertanto individuati 4 punti $(0, \pm 1, \pm 1)$. Per studiarne la natura utilizziamo Weierstrass. Se calcoliamo i valori di f in questi punti osserviamo che $f(0, 1, 1) = 2$ è il massimo assoluto, $f(0, -1, -1) = -2$ è il minimo assoluto.

1D) L'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ è un compatto, infatti è limitato: $A \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-1, 1]$ e posto $g_1(x, y, z) = x^2 + z^2$ e $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2$, g_1 e g_2 sono continue e $A = g_1^{-1}(1) \cap g_2^{-1}(2)$ e dunque è un chiuso perché inversa immagine di chiusi.

La funzione f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti.

Per determinare questi punti osserviamo che $f \in C^1(A)$, $A^\circ = \emptyset$ e quindi non ci sono punti interni in cui applicare il teorema di Fermat. (tutti i punti sono di

frontiera) Inoltre, posto

$$\phi_1(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1 = 0, \quad \phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0,$$

$$F(x, y, z, a, b) = f(x, y, z) + a\phi_1(x, y, z) + b\phi_2(x, y, z),$$

i punti di massimo e di minimo assoluti devono soddisfare uno dei due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} \leq 1 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = 2 \\ F'_x(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_y(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_z(x, y, z, a, b) = 0 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

Risulta

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{array} \right) \leq 1 \iff xy = 0, \quad xz = 0, \quad yz = 0.$$

$$\begin{array}{l} x = 0 \xrightarrow{\phi_1=0} z = \pm 1 \xrightarrow{\phi_2=0} y = \pm\sqrt{2} \quad (\implies yz \neq 0) \\ y = 0 \xrightarrow{\phi_2=0} x = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{\phi_1=0} z \in \emptyset \\ z = 0 \xrightarrow{\phi_1=0} x = \pm 1 \xrightarrow{\phi_2=0} y = \pm 1 \quad (\implies xy \neq 0). \end{array}$$

Quindi il primo sistema non ammette soluzioni. Andiamo a determinare quelle del secondo sistema (moltiplicatori di Lagrange).

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A \\ 1 + 2ax + 2bx = 0 \\ 2by = 0 \\ 1 + 2az = 0 \\ x^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A, a \neq 0, b = 0 \\ x = -\frac{1}{2a} \\ z = -\frac{1}{2a} \\ x^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right.$$

Se $b = 0$ allora $x = z = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ oppure $x = z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Se $y = 0$ allora $z^2 + 1 = 0$ e quindi il sistema non ammette soluzioni.

Rimangono pertanto individuati 4 punti $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Per studiarne la natura utilizziamo Weierstrass. Se calcoliamo i valori di f in questi punti osserviamo che $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$ è il massimo assoluto, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$ è il minimo assoluto.

1E) L'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ è un compatto, infatti è limitato: $A \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-1, 1]$ e posto $g_1(x, y, z) = x^2 + z^2$ e $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2$, g_1 e g_2 sono continue e $A = g_1^{-1}(1) \cap g_2^{-1}(2)$ e dunque è un chiuso perché inversa immagine di chiusi.

La funzione f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti.

Per determinare questi punti osserviamo che $f \in C^1(A)$, $A^\circ = \emptyset$ e quindi non ci sono punti interni in cui applicare il teorema di Fermat. (tutti i punti sono di frontiera) Inoltre, posto

$$\phi_1(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1 = 0, \quad \phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0,$$

$$F(x, y, z, a, b) = f(x, y, z) + a\phi_1(x, y, z) + b\phi_2(x, y, z),$$

i punti di massimo e di minimo assoluti devono soddisfare uno dei due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} \leq 1 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = 2 \\ F'_x(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_y(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_z(x, y, z, a, b) = 0 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

Risulta

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{array} \right) \leq 1 \iff xy = 0, \quad xz = 0, \quad yz = 0.$$

$$\begin{aligned}
 x = 0 & \stackrel{\phi_1=0}{\implies} z = \pm 1 \stackrel{\phi_2=0}{\implies} y = \pm\sqrt{2} \quad (\implies yz \neq 0) \\
 y = 0 & \stackrel{\phi_2=0}{\implies} x = \pm\sqrt{2} \stackrel{\phi_1=0}{\implies} z \in \emptyset \\
 z = 0 & \stackrel{\phi_1=0}{\implies} x = \pm 1 \stackrel{\phi_2=0}{\implies} y = \pm 1 \quad (\implies xy \neq 0).
 \end{aligned}$$

Quindi il primo sistema non ammette soluzioni. Andiamo a determinare quelle del secondo sistema (moltiplicatori di Lagrange).

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A \\ 1 + 2ax + 2bx = 0 \\ -1 + 2by = 0 \\ 2az = 0 \\ x^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A, a = 0, b \neq 0 \\ x = -\frac{1}{2b} \\ y = \frac{1}{2b} \\ x^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right.$$

Se $b = \frac{1}{2}$ allora $x = -1, y = 1, z = 0$. Se $b = -\frac{1}{2}$ allora $x = 1, y = -1, z = 0$.

Se $z = 0$ allora $x = \pm 1, y = \pm 1$.

Rimangono pertanto individuati 4 punti $(\pm 1, \pm 1, 0)$. Per studiarne la natura utilizziamo Weierstrass. Se calcoliamo i valori di f in questi punti osserviamo che $f(1, -1, 0) = 2$ è il massimo assoluto, $f(-1, 1, 0) = -2$ è il minimo assoluto.

1F) L'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ è un compatto, infatti è limitato: $A \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-1, 1]$ e posto $g_1(x, y, z) = x^2 + z^2$ e $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2$, g_1 e g_2 sono continue e $A = g_1^{-1}(1) \cap g_2^{-1}(2)$ e dunque è un chiuso perché inversa immagine di chiusi.

La funzione f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti.

Per determinare questi punti osserviamo che $f \in C^1(A)$, $A^\circ = \emptyset$ e quindi non ci sono punti interni in cui applicare il teorema di Fermat. (tutti i punti sono di

frontiera) Inoltre, posto

$$\phi_1(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1 = 0, \quad \phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0,$$

$$F(x, y, z, a, b) = f(x, y, z) + a\phi_1(x, y, z) + b\phi_2(x, y, z),$$

i punti di massimo e di minimo assoluti devono soddisfare uno dei due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} \leq 1 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = 2 \\ F'_x(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_y(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_z(x, y, z, a, b) = 0 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

Risulta

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{array} \right) \leq 1 \iff xy = 0, \quad xz = 0, \quad yz = 0.$$

$$\begin{array}{l} x = 0 \xrightarrow{\phi_1=0} z = \pm 1 \xrightarrow{\phi_2=0} y = \pm\sqrt{2} \quad (\implies yz \neq 0) \\ y = 0 \xrightarrow{\phi_2=0} x = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{\phi_1=0} z \in \emptyset \\ z = 0 \xrightarrow{\phi_1=0} x = \pm 1 \xrightarrow{\phi_2=0} y = \pm 1 \quad (\implies xy \neq 0). \end{array}$$

Quindi il primo sistema non ammette soluzioni. Andiamo a determinare quelle del secondo sistema (moltiplicatori di Lagrange).

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A \\ 2ax + 2bx = 0 \\ 1 + 2by = 0 \\ 2 + 2az = 0 \\ x^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A, a \neq 0, b \neq 0 \\ x(a + b) = 0 \\ y = -1/2b \\ z = -1/a \\ x^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right.$$

Se $x = 0$ allora $y = \pm\sqrt{2}$, $z = \pm 1$.

Se $a+b = 0$ allora $y = -\frac{1}{2}z$ e quindi non ci sono soluzioni comuni ai due vincoli.

Rimangono pertanto individuati 4 punti $(0, \pm\sqrt{2}, \pm 1)$. Per studiarne la natura utilizziamo Weierstrass. Se calcoliamo i valori di f in questi punti osserviamo che $f(0, \sqrt{2}, 1) = 2 + \sqrt{2}$ è il massimo assoluto, $f(0, -\sqrt{2}, -1) = -2 - \sqrt{2}$ è il minimo assoluto.

1G) L'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ è un compatto, infatti è limitato: $A \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-1, 1]$ e posto $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2$, g_1 e g_2 sono continue e $A = g_1^{-1}(2) \cap g_2^{-1}(1)$ e dunque è un chiuso perché inversa immagine di chiusi.

La funzione f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti.

Per determinare questi punti osserviamo che $f \in C^1(A)$, $A^\circ = \emptyset$ e quindi non ci sono punti interni in cui applicare il teorema di Fermat. (tutti i punti sono di frontiera) Inoltre, posto

$$\phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0, \quad \phi_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

$$F(x, y, z, a, b) = f(x, y, z) + a\phi_1(x, y, z) + b\phi_2(x, y, z),$$

i punti di massimo e di minimo assoluti devono soddisfare uno dei due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} \leq 1 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = 2 \\ F'_x(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_y(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_z(x, y, z, a, b) = 0 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

Risulta

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} \leq 1 \iff xy = 0, \quad xz = 0, \quad yz = 0.$$

$$\begin{aligned}
 x = 0 & \stackrel{\phi_1=0}{\implies} y = \pm\sqrt{2} \stackrel{\phi_2=0}{\implies} z \in \emptyset \\
 y = 0 & \stackrel{\phi_1=0}{\implies} x = \pm\sqrt{2} \stackrel{\phi_2=0}{\implies} z = \pm 1 \quad (\implies xz \neq 0) \\
 z = 0 & \stackrel{\phi_2=0}{\implies} y = \pm 1 \stackrel{\phi_1=0}{\implies} x = \pm 1 \quad (\implies xy \neq 0)
 \end{aligned}$$

Quindi il primo sistema non ammette soluzioni. Andiamo a determinare quelle del secondo sistema (moltiplicatori di Lagrange).

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A \\ 1 + 2ax = 0 \\ 2ay + 2by = 0 \\ 1 + 2bz = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A, a \neq 0, b \neq 0 \\ x = -\frac{1}{2a} \\ y(a+b) = 0 \\ z = -\frac{1}{2b} \\ x^2 + y^2 = 2 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right.$$

Se $y = 0$ allora $x = \pm\sqrt{2}$, $z = \pm 1$.

Se $a + b = 0$ allora $z = -x$ e quindi non ci sono soluzioni comuni ai due vincoli. Rimangono pertanto individuati 4 punti $(\pm\sqrt{2}, 0, \pm 1)$. Per studiarne la natura utilizziamo Weierstrass. Se calcoliamo i valori di f in questi punti osserviamo che $f(\sqrt{2}, 0, 1) = 1 + \sqrt{2}$ è il massimo assoluto, $f(-\sqrt{2}, 0, -1) = -1 - \sqrt{2}$ è il minimo assoluto.

1H) L'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$ è un compatto, infatti è limitato: $A \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-1, 1]$ e posto $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2$, g_1 e g_2 sono continue e $A = g_1^{-1}(2) \cap g_2^{-1}(1)$ e dunque è un chiuso perché inversa immagine di chiusi.

La funzione f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti.

Per determinare questi punti osserviamo che $f \in C^1(A)$, $A^\circ = \emptyset$ e quindi non ci sono punti interni in cui applicare il teorema di Fermat. (tutti i punti sono di

frontiera) Inoltre, posto

$$\phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0, \quad \phi_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

$$F(x, y, z, a, b) = f(x, y, z) + a\phi_1(x, y, z) + b\phi_2(x, y, z),$$

i punti di massimo e di minimo assoluti devono soddisfare uno dei due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} \leq 1 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = 2 \\ F'_x(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_y(x, y, z, a, b) = 0 \\ F'_z(x, y, z, a, b) = 0 \\ \phi_1(x, y, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

Risulta

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{array} \right) \leq 1 \iff xy = 0, \quad xz = 0, \quad yz = 0.$$

$$x = 0 \xrightarrow{\phi_1=0} y = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{\phi_2=0} z \in \emptyset$$

$$y = 0 \xrightarrow{\phi_1=0} x = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{\phi_2=0} z = \pm 1 \quad (\implies xz \neq 0)$$

$$z = 0 \xrightarrow{\phi_2=0} y = \pm 1 \xrightarrow{\phi_1=0} x = \pm 1 \quad (\implies xy \neq 0)$$

Quindi il primo sistema non ammette soluzioni. Andiamo a determinare quelle del secondo sistema (moltiplicatori di Lagrange).

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A \\ 1 + 2ax = 0 \\ -1 + 2ay + 2bz = 0 \\ 2bz = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z) \in A, a \neq 0, b = 0 \\ x = -\frac{1}{2a} \\ y = \frac{1}{2a} \\ x^2 + y^2 = 2 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right.$$

Se $a = \frac{1}{2}$ allora $x = -1, y = 1, z = 0$. Se $a = -\frac{1}{2}$ allora $x = 1, y = -1, z = 0$.

Se $z = 0$ allora $y = \pm 1, x = \pm 1$.

Rimangono pertanto individuati 4 punti $(\pm 1, \pm 1, 0)$. Per studiarne la natura utilizziamo Weierstrass. Se calcoliamo i valori di f in questi punti osserviamo che $f(1, -1, 0) = 2$ è il massimo assoluto, $f(-1, 1, 0) = -2$ è il minimo assoluto.

- a). La funzione $f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}$ è illimitata in prossimità di $x = 0$. Inoltre, è una funzione continua e quindi integrabile in ogni intervallo del tipo $[a, 1/e]$ con $a > 0$. Osserviamo che

$$\int \frac{dx}{x \log^2 x} = \int \log^{-2}(x) \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{\log x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Segue che la funzione $P(x) = -\frac{1}{\log x}$ è una primitiva di $f(x)$ e risulta $\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = 0 \in \mathbb{R}$. Quindi la funzione risulta integrabile in senso generalizzato in $]0, 1/e]$ e si ha

$$\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \log^2 x} = P(1/e) - \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log x} = 1.$$

La risposta corretta è pertanto: **converge a 1**

- b). La funzione $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$ è una funzione continua, dunque integrabile in ogni intervallo del tipo $[0, a]$ con $a > 0$. È immediato verificare che $f(x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow +\infty$ di ordine maggiore di $\alpha = 3/2 > 1$, quindi risulta integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty[$. Calcoliamo ora l'integrale $\int \frac{dx}{1+4x^2}$ con la sostituzione $2x = y, dx = \frac{dy}{2}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{2a} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \arctan(2a) = \frac{\pi}{4}.$$

La risposta corretta è pertanto: **converge a $\frac{\pi}{4}$** .

- c). La funzione $f(x) = \log x$ è illimitata in prossimità di $x = 0$. Inoltre, è una funzione continua e quindi integrabile in ogni intervallo del tipo $[a, 1]$ con $a > 0$. $f(x)$ è un infinito per $x \rightarrow 0^+$ di ordine inferiore a qualunque potenza

intera $n \in \mathbb{N}$ dell'infinito principale $\frac{1}{x}$; in particolare è un infinito di ordine inferiore a $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ e quindi risulta integrabile in senso generalizzato in $]0, 1]$. Calcoliamo ora l'integrale per parti

$$\int_0^1 \log x \, dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \log x [x]' \, dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(x \log x \Big|_a^1 - \int_a^1 dx \right) =$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} (-a \log a - 1 + a) = -1$$

La risposta corretta è pertanto: **converge a** -1 .

d). La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ è illimitata in prossimità di $x = -1$. Inoltre, è una funzione continua e quindi integrabile in ogni intervallo del tipo $[-3, a]$ con $a < -1$. E' immediato verificare che $f(x)$ è un infinito per $x \rightarrow -1^-$ di ordine inferiore a $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, quindi risulta integrabile in senso generalizzato in $[-3, -1[$. Calcoliamo ora l'integrale

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \, dx = \lim_{a \rightarrow -1^-} \int_{-3}^a (x+1)^{-1/3} \, dx = \lim_{a \rightarrow -1^-} \left[\frac{(x+1)^{-1/3+1}}{-1/3+1} \right]_{-3}^a =$$

$$\lim_{a \rightarrow -1^-} \left(\frac{3}{2}(a+1)^{2/3} - \frac{3}{2}(-2)^{2/3} \right) = -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

La risposta corretta è pertanto: **converge a** $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

e). La funzione $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \cos(2x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ è derivabile in tutti i punti interni all'intervallo $[-\pi, \pi]$ ad eccezione del punto $x = 0$, in cui non è continua ma ammette finiti i limiti sinistro e destro dei rapporti incrementali $\frac{f(x)-f(0^-)}{x}$, $\frac{f(x)-f(0^+)}{x}$. Possiamo renderla periodica di periodo $T = 2\pi$.

Pertanto la funzione è sviluppabile in serie di Fourier.

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2x) \sin(2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(4x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(4x)}{4} \right]_0^{\pi} = 0 \\
 a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2(2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos(4x)}{2} \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4x + \sin(4x)}{8} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

La risposta corretta è $\mathbf{b}_2 = 0$, $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}$.

f). $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \in C([-\pi, \pi])$, tutti i suoi punti interni sono di derivabilità ad eccezione del punto $x = 0$ in cui la funzione ha comunque derivate destra e sinistra limitate. Possiamo renderla periodica di periodo $T = 2\pi$.

Pertanto la funzione è sviluppabile in serie di Fourier.

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2x - \sin(2x)}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \\
 a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi} = 0
 \end{aligned}$$

La risposta corretta è $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}$, $\mathbf{a}_1 = 0$.

g). La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ha periodo $T = 2$ ed è continua; in $x = 0$

ammette derivata destra e sinistra. I suoi coefficienti di Fourier sono

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^1 x \cos(k\pi x) dx = \left[\frac{1}{k\pi} x \sin(k\pi x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi x) dx = \\ &= \left[\frac{1}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi x) \right]_0^1 = \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2} \\ b_k &= \int_0^1 x \sin(k\pi x) dx = \left[-\frac{1}{k\pi} x \cos(k\pi x) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{k\pi} \cos(k\pi x) dx = \\ &= -\frac{(-1)^k}{k\pi} + \left[\frac{1}{k^2 \pi^2} \sin(k\pi x) \right]_0^1 = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \end{aligned}$$

h). La funzione $f(x, y) = y^4 e^{3x}$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e quindi risulta differenziabile in tutti i punti del suo dominio. Ammette pertanto derivata direzionale nel punto $(0, -1)$ lungo una qualsiasi direzione ν , data dalla formula del gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, -1) = \nabla f(0, -1) \cdot \nu.$$

Il prodotto scalare risulta massimo per $\nu = \lambda \nabla f(0, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, pertanto il vettore $\nabla f(0, -1)$ indica la direzione corrispondente alla **massima derivata direzionale di f** . Calcoliamo il gradiente di f :

$$f'_x(x, y) = 3y^4 e^{3x}, \quad f'_y(x, y) = 4y^3 e^{3x}.$$

Abbiamo quindi $\nabla f(0, -1) = (3, -4)$, che normalizzato dà il vettore direzione $\nu = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$.

D'altra parte, **la derivata direzionale di f nel punto $(0, -1)$ è nulla** nella direzione ortogonale al gradiente. È immediato verificare che il vettore $(4, 3)$ è ortogonale a $\nabla f(0, -1)$, pertanto normalizzandolo si ottiene la direzione $\nu = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$.

i). La funzione $f(x, y) = e^{2x} \sin y$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e quindi risulta differenziabile in tutti i punti del suo dominio. Ammette pertanto derivata direzionale nel punto $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ lungo una qualsiasi direzione ν , data dalla formula del gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} \left(0, \frac{\pi}{6} \right) = \nabla f \left(0, \frac{\pi}{6} \right) \cdot \nu.$$

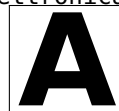
Il prodotto scalare risulta massimo per $\nu = \lambda \nabla f(0, \frac{\pi}{6})$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, pertanto il vettore $\nabla f(0, \frac{\pi}{6})$ indica la direzione corrispondente alla **massima derivata direzionale di f** .

Calcoliamo il gradiente di f :

$$f'_x(x, y) = 2e^{2x} \sin y, \quad f'_y(x, y) = e^{2x} \cos y.$$

Abbiamo quindi $\nabla f(0, \frac{\pi}{6}) = (1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, che normalizzato dà il vettore direzione $\nu = (\frac{2\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7})$.

D'altra parte, **la derivata direzionale di f nel punto $(0, \frac{\pi}{6})$ è nulla** nella direzione ortogonale al gradiente. E' immediato verificare che il vettore $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ è ortogonale a $\nabla f(0, \frac{\pi}{6})$, pertanto normalizzandolo si ottiene la direzione $\nu = (-\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{2\sqrt{7}}{7})$.

**Esonero 29 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi e riportare solamente i dati richiesti.

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = x^2 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

[3+4+3 punti]

- integrale generale omogenea: _____
- soluzione particolare equazione completa: _____
- soluzione del problema di Cauchy : $c_1 =$ _____, $c_2 =$ _____

2) Disegnare il solido individuato da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 2, (z-1)^2 \leq x^2 + y^2\},$$

e calcolarne il volume ed il baricentro sapendo che $\delta = 1$. (**[3+3+4 punti]**)

$$V = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad y_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad z_G = \underline{\hspace{2cm}}$$

3) Sapendo che la funzione densità è $\delta(x, y) = xy$, calcolare la massa della parte dell'ellisse $\frac{x^2}{9} + 4y^2 = 1$ contenuta nel primo quadrante. (**[5 punti]**)

- massa = $\underline{\hspace{2cm}}$

4) Calcolare l'integrale

$$I := \int_{\mathcal{C}} (x^2 + 2y^2)dx + (x^2 + 2yx)dy,$$

dove \mathcal{C} è la frontiera del triangolo T_A di vertici $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 3)$ orientata nel verso positivo, mediante le formule di Gauss-Green. (**[3+4 punti]**)

- formula integrale doppio $\underline{\hspace{4cm}}$

- $I = \underline{\hspace{2cm}}$

**Esonero 29 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi e riportare solamente i dati richiesti.

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = \log x \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

[3+4+3 punti]

- integrale generale omogenea: _____
- soluzione particolare equazione completa: _____
- soluzione del problema di Cauchy : $c_1 =$ _____, $c_2 =$ _____

2) Disegnare il solido individuato da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq -1, (x + 1)^2 \leq y^2 + z^2\},$$

e calcolarne il volume ed il baricentro sapendo che $\delta = 1$. (**[3+3+4 punti]**)

$$V = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad y_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad z_G = \underline{\hspace{2cm}}$$

3) Sapendo che la funzione densità è $\delta(x, y) = xy$, calcolare la massa della parte dell'ellisse $\frac{x^2}{3} + 3y^2 = 1$ contenuta nel primo quadrante. **([5 punti])**

- massa = $\underline{\hspace{2cm}}$

4) Calcolare l'integrale

$$I := \int_C (x^2 + 2y^2)dx + (x^2 + 2yx)dy,$$

dove C è la frontiera del triangolo T_B di vertici $(0, 2)$, $(1, 1)$ e $(1, 3)$ orientata nel verso positivo, mediante le formule di Gauss-Green. **([3+4 punti])**

- formula integrale doppio $\underline{\hspace{4cm}}$

- $I = \underline{\hspace{2cm}}$

**Esonero 29 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi e riportare solamente i dati richiesti.

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = \frac{1}{x^3} \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

[3+4+3 punti]

- integrale generale omogenea: _____
- soluzione particolare equazione completa: _____
- soluzione del problema di Cauchy : $c_1 =$ _____, $c_2 =$ _____

2) Disegnare il solido individuato da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y \leq 2, (y-1)^2 \leq x^2 + z^2\},$$

e calcolarne il volume ed il baricentro sapendo che $\delta = 1$. (**[3+3+4 punti]**)

$$V = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad y_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad z_G = \underline{\hspace{2cm}}$$

3) Sapendo che la funzione densità è $\delta(x, y) = xy$, calcolare la massa della parte dell'ellisse $\frac{x^2}{2} + 4y^2 = 1$ contenuta nel primo quadrante. **([5 punti])**

- massa = $\underline{\hspace{2cm}}$

4) Calcolare l'integrale

$$I := \int_{\mathcal{C}} (x^2 + 2y^2)dx + (x^2 + 2yx)dy,$$

dove \mathcal{C} è la frontiera del triangolo $T_{\mathcal{C}}$ di vertici $(0, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 1)$ orientata nel verso positivo, mediante le formule di Gauss-Green. **([3+4 punti])**

- formula integrale doppio $\underline{\hspace{4cm}}$

- $I = \underline{\hspace{2cm}}$

**Esonero 29 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi e riportare solamente i dati richiesti.

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + 9xy'(x) - 9y(x) = x^2 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

[3+4+3 punti]

- integrale generale omogenea: _____
- soluzione particolare equazione completa: _____
- soluzione del problema di Cauchy : $c_1 =$ _____, $c_2 =$ _____

2) Disegnare il solido individuato da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq z \leq -1, (z+1)^2 \leq x^2 + y^2\},$$

e calcolarne il volume ed il baricentro sapendo che $\delta = 1$. (**[3+3+4 punti]**)

$$V = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad y_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad z_G = \underline{\hspace{2cm}}$$

3) Sapendo che la funzione densità è $\delta(x, y) = xy$, calcolare la massa della parte dell'ellisse $\frac{x^2}{5} + 5y^2 = 1$ contenuta nel primo quadrante. (**[5 punti]**)

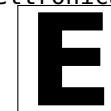
- massa = $\underline{\hspace{2cm}}$

4) Calcolare l'integrale

$$I := \int_C (x^2 + 2y^2)dx + (x^2 + 2yx)dy,$$

dove C è la frontiera del triangolo T_D di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$ orientata nel verso positivo, mediante le formule di Gauss-Green. (**[3+4 punti]**)

- formula integrale doppio $\underline{\hspace{4cm}}$
 - $I = \underline{\hspace{2cm}}$
-

**Esonero 29 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi e riportare solamente i dati richiesti.

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + 9xy'(x) - 9y(x) = 9 \log x \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

[3+4+3 punti]

- integrale generale omogenea: _____
- soluzione particolare equazione completa: _____
- soluzione del problema di Cauchy : $c_1 =$ _____, $c_2 =$ _____

2) Disegnare il solido individuato da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 2, (x-1)^2 \leq y^2 + z^2\},$$

e calcolarne il volume ed il baricentro sapendo che $\delta = 1$. (**[3+3+4 punti]**)

$$V = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad y_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad z_G = \underline{\hspace{2cm}}$$

3) Sapendo che la funzione densità è $\delta(x, y) = xy$, calcolare la massa della parte dell'ellisse $\frac{x^2}{9} + 4y^2 = 1$ contenuta nel terzo quadrante. (**[5 punti]**)

- massa = $\underline{\hspace{2cm}}$

4) Calcolare l'integrale

$$I := \int_C (x - 2y)^2 dx + (4xy + 3y^2) dy,$$

dove C è la frontiera del triangolo T_E di vertici $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 3)$ orientata nel verso positivo, mediante le formule di Gauss-Green. (**[3+4 punti]**)

- formula integrale doppio $\underline{\hspace{4cm}}$

- $I = \underline{\hspace{2cm}}$

**Esonero 29 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi e riportare solamente i dati richiesti.

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + 9xy'(x) - 9y(x) = \frac{3}{x^2} \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

[3+4+3 punti]

- integrale generale omogenea: _____
- soluzione particolare equazione completa: _____
- soluzione del problema di Cauchy : $c_1 =$ _____, $c_2 =$ _____

2) Disegnare il solido individuato da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq y \leq -1, (y + 1)^2 \leq x^2 + z^2\},$$

e calcolarne il volume ed il baricentro sapendo che $\delta = 1$. (**[3+3+4 punti]**)

$$V = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad y_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad z_G = \underline{\hspace{2cm}}$$

3) Sapendo che la funzione densità è $\delta(x, y) = xy$, calcolare la massa della parte dell'ellisse $\frac{x^2}{3} + 3y^2 = 1$ contenuta nel terzo quadrante.

([5 punti])

- massa = $\underline{\hspace{2cm}}$

4) Calcolare l'integrale

$$I := \int_C (x - 2y)^2 dx + (4xy + 3y^2) dy,$$

dove C è la frontiera del triangolo T_F di vertici $(0, 2)$, $(1, 1)$ e $(1, 3)$ orientata nel verso positivo, mediante le formule di Gauss-Green. **([3+4 punti])**

- formula integrale doppio $\underline{\hspace{4cm}}$

- $I = \underline{\hspace{2cm}}$

**Esonero 29 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi e riportare solamente i dati richiesti.

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) = x \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

[3+4+3 punti]

- integrale generale omogenea: _____
- soluzione particolare equazione completa: _____
- soluzione del problema di Cauchy : $c_1 =$ _____, $c_2 =$ _____

2) Disegnare il solido individuato da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq -1, (x+1)^2 \leq y^2 + z^2\},$$

e calcolarne il volume ed il baricentro sapendo che $\delta = 1$. (**[3+3+4 punti]**)

$$V = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad y_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad z_G = \underline{\hspace{2cm}}$$

3) Sapendo che la funzione densità è $\delta(x, y) = xy$, calcolare la massa della parte dell'ellisse $\frac{x^2}{2} + 4y^2 = 1$ contenuta nel terzo quadrante. **([5 punti])**

- massa = $\underline{\hspace{2cm}}$

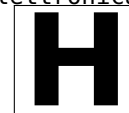
4) Calcolare l'integrale

$$I := \int_C (x - 2y)^2 dx + (4xy + 3y^2) dy,$$

dove C è la frontiera del triangolo T_G di vertici $(0, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 1)$ orientata nel verso positivo, mediante le formule di Gauss-Green. **([3+4 punti])**

- formula integrale doppio $\underline{\hspace{4cm}}$

- $I = \underline{\hspace{2cm}}$

**Esonero 29 Novembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere i seguenti esercizi e riportare solamente i dati richiesti.

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) = -4 \log x \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

[3+4+3 punti]

- integrale generale omogenea: _____
- soluzione particolare equazione completa: _____
- soluzione del problema di Cauchy : $c_1 =$ _____, $c_2 =$ _____

2) Disegnare il solido individuato da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq z \leq -1, (z+1)^2 \leq x^2 + y^2\},$$

e calcolarne il volume ed il baricentro sapendo che $\delta = 1$. (**[3+3+4 punti]**)

$$V = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad y_G = \underline{\hspace{2cm}} \quad z_G = \underline{\hspace{2cm}}$$

3) Sapendo che la funzione densità è $\delta(x, y) = xy$, calcolare la massa della parte dell'ellisse $\frac{x^2}{5} + 5y^2 = 1$ contenuta nel terzo quadrante. (**[5 punti]**)

- massa = $\underline{\hspace{2cm}}$

4) Calcolare l'integrale

$$I := \int_C (x - 2y)^2 dx + (4xy + 3y^2) dy,$$

dove C è la frontiera del triangolo T_H di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$ orientata nel verso positivo, mediante le formule di Gauss-Green. (**[3+4 punti]**)

- formula integrale doppio $\underline{\hspace{4cm}}$

- $I = \underline{\hspace{2cm}}$

Svolgimento

1A) Si tratta di un'equazione equidimensionale di Eulero del secondo ordine. Siccome il dato iniziale ($x_0 = 1$) è positivo, cerchiamo le soluzioni in \mathbb{R}^+ ed effettuiamo la sostituzione $x = e^z$. Otterremo l'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(z) - 2y'(z) - 3y(z) = e^{2z}.$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = 3$, $\lambda = -1$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà:

$$y(z) = c_1 e^{3z} + c_2 e^{-z}.$$

Considerando il termine noto $\beta(z) = e^{2z}$, siccome $\lambda = 2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione della forma $y(z) = ae^{2z}$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $a = -1/3$. L'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(z) = c_1 e^{3z} + c_2 e^{-z} - \frac{1}{3} e^{2z}, \quad y(x) = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x} - \frac{1}{3} x^2.$$

Se deriviamo rispetto a x otteniamo:

$$y'(x) = 3c_1 x^2 - \frac{c_2}{x^2} - \frac{2}{3} x.$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo $c_1 = 1/2$, $c_2 = 5/6$. Quindi sostituendo nell'integrale generale si ottiene:

$$y(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6x} - \frac{x^2}{3}.$$

1B) Si tratta di un'equazione equidimensionale di Eulero del secondo ordine. Siccome il dato iniziale ($x_0 = 1$) è positivo, cerchiamo le soluzioni in \mathbb{R}^+ ed effettuiamo la sostituzione $x = e^z$. Otterremo l'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(z) - 2y'(z) - 3y(z) = z.$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = 3$, $\lambda = -1$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà:

$$y(z) = c_1 e^{3z} + c_2 e^{-z}.$$

Considerando il termine noto $\beta(z) = z$, cerchiamo una soluzione della forma $y(z) = az + b$. Risulterà: $-2a - 3az - 3b = z$ e dunque $a = -1/3$, $b = 2/9$. L'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(z) = c_1 e^{3z} + c_2 e^{-z} - \frac{1}{3}z + \frac{2}{9}, \quad y(x) = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x} - \frac{1}{3} \log x + \frac{2}{9}.$$

Se deriviamo rispetto a x otteniamo:

$$y'(x) = 3c_1 x^2 - \frac{c_2}{x^2} - \frac{1}{3x}.$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo $c_1 = 5/18$, $c_2 = 1/2$. Quindi sostituendo nell'integrale generale si ottiene:

$$y(x) = \frac{5}{18}x^3 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3} \log x + \frac{2}{9}.$$

1C) Si tratta di un'equazione equidimensionale di Eulero del secondo ordine. Siccome il dato iniziale ($x_0 = 1$) è positivo, cerchiamo le soluzioni in \mathbb{R}^+ ed effettuiamo la sostituzione $x = e^z$. Otterremo l'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(z) - 2y'(z) - 3y(z) = e^{-3z}.$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = 3$, $\lambda = -1$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà:

$$y(z) = c_1 e^{3z} + c_2 e^{-z}.$$

Considerando il termine noto $\beta(z) = e^{2z}$, siccome $\lambda = -3$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione della forma $y(z) = a e^{-3z}$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $a = 1/12$. L'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(z) = c_1 e^{3z} + c_2 e^{-z} + \frac{1}{12} e^{-3z}, \quad y(x) = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x} + \frac{1}{12x^3}.$$

Se deriviamo rispetto a x otteniamo:

$$y'(x) = 3c_1x^2 - \frac{c_2}{x^2} - \frac{1}{4x^4}.$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo $c_1 = 7/24$, $c_2 = 5/8$. Quindi sostituendo nell'integrale generale si ottiene:

$$y(x) = \frac{7}{24}x^3 + \frac{5}{8x} + \frac{1}{12x^3}.$$

1D) Si tratta di un'equazione equidimensionale di Eulero del secondo ordine. Siccome il dato iniziale ($x_0 = 1$) è positivo, cerchiamo le soluzioni in \mathbb{R}^+ ed effettuiamo la sostituzione $x = e^z$. Otterremo l'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(z) + 8y'(z) - 9y(z) = e^{2z}.$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = 1$, $\lambda = -9$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà:

$$y(z) = c_1e^z + c_2e^{-9z}.$$

Considerando il termine noto $\beta(z) = e^{2z}$, siccome $\lambda = 2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione della forma $y(z) = ae^{2z}$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $a = 1/11$. L'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(z) = c_1e^z + c_2e^{-9z} + \frac{1}{11}e^{2z}, \quad y(x) = c_1x + \frac{c_2}{x^9} + \frac{1}{11}x^2.$$

Se deriviamo rispetto a x otteniamo:

$$y'(x) = c_1 - \frac{9c_2}{x^{10}} + \frac{2}{11}x.$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo $c_1 = 4/5$, $c_2 = 6/55$. Quindi sostituendo nell'integrale generale si ottiene:

$$y(x) = \frac{4}{5}x + \frac{6}{55x^9} + \frac{x^2}{11}.$$

1E) Si tratta di un'equazione equidimensionale di Eulero del secondo ordine. Siccome il dato iniziale ($x_0 = 1$) è positivo, cerchiamo le soluzioni in \mathbb{R}^+ ed effettuiamo la sostituzione $x = e^z$. Otterremo l'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(z) + 8y'(z) - 9y(z) = 9z.$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = 1$, $\lambda = -9$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà:

$$y(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-9z}.$$

Considerando il termine noto $\beta(z) = 9z$, cerchiamo una soluzione della forma $y(z) = az + b$. Risulterà: $8a - 9az - 9b = 9z$ e dunque $a = -1$, $b = -8/9$. L'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-9z} - z - \frac{8}{9}, \quad y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^9} - \log x - \frac{8}{9}.$$

Se deriviamo rispetto a x otteniamo:

$$y'(x) = c_1 - \frac{9c_2}{x^{10}} - \frac{1}{x}.$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo $c_1 = 9/5$, $c_2 = 4/45$. Quindi sostituendo nell'integrale generale si ottiene:

$$y(x) = \frac{9}{5}x + \frac{4}{45x^9} - \log x - \frac{8}{9}.$$

1F) Si tratta di un'equazione equidimensionale di Eulero del secondo ordine. Siccome il dato iniziale ($x_0 = 1$) è positivo, cerchiamo le soluzioni in \mathbb{R}^+ ed effettuiamo la sostituzione $x = e^z$. Otterremo l'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(z) + 8y'(z) - 9y(z) = 3e^{-2z}.$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = 1$, $\lambda = -9$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà:

$$y(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-9z}.$$

Considerando il termine noto $\beta(z) = 3e^{-2z}$, siccome $\lambda = -2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione della forma $y(z) = ae^{-2z}$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $a = -1/7$. L'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-9z} - \frac{1}{7} e^{-2z}, \quad y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^9} - \frac{1}{7x^2}.$$

Se deriviamo rispetto a x otteniamo:

$$y'(x) = c_1 - \frac{9c_2}{x^{10}} + \frac{2}{7x^3}.$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo $c_1 = 1$, $c_2 = 1/7$. Quindi sostituendo nell'integrale generale si ottiene:

$$y(x) = x + \frac{1}{7x^9} - \frac{1}{7x^2}.$$

1G) Si tratta di un'equazione equidimensionale di Eulero del secondo ordine. Siccome il dato iniziale ($x_0 = 1$) è positivo, cerchiamo le soluzioni in \mathbb{R}^+ ed effettuiamo la sostituzione $x = e^z$. Otterremo l'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(z) - 3y'(z) - 4y(z) = e^z.$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = -1$, $\lambda = 4$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà:

$$y(z) = c_1 e^{-z} + c_2 e^{4z}.$$

Considerando il termine noto $\beta(z) = e^z$, siccome $\lambda = 1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione della forma $y(z) = ae^z$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $a = -1/6$. L'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(z) = c_1 e^{-z} + c_2 e^{4z} - \frac{1}{6} e^z, \quad y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2 x^4 - \frac{x}{6}.$$

Se deriviamo rispetto a x otteniamo:

$$y'(x) = -\frac{c_1}{x^2} + 4c_2 x^3 - \frac{1}{6}.$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo $c_1 = 9/10$, $c_2 = 4/15$. Quindi sostituendo nell'integrale generale si ottiene:

$$y(x) = \frac{9}{10x} + \frac{4}{15}x^4 - \frac{x}{6}.$$

1H) Si tratta di un'equazione equidimensionale di Eulero del secondo ordine. Siccome il dato iniziale ($x_0 = 1$) è positivo, cerchiamo le soluzioni in \mathbb{R}^+ ed effettuiamo la sostituzione $x = e^z$. Otterremo l'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(z) - 3y'(z) - 4y(z) = -4z.$$

L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ ha come soluzioni $\lambda = -1$, $\lambda = 4$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà:

$$y(z) = c_1 e^{-z} + c_2 e^{4z}.$$

Considerando il termine noto $\beta(z) = -4z$, cerchiamo una soluzione della forma $y(z) = az + b$. Risulterà: $-3a - 4az - 4b = -4z$ e dunque $a = 1$, $b = -3/4$. L'integrale generale dell'equazione completa è:

$$y(z) = c_1 e^{-z} + c_2 e^{4z} + z - \frac{3}{4}, \quad y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2 x^4 + \log x - \frac{3}{4}.$$

Se deriviamo rispetto a x otteniamo:

$$y'(x) = -\frac{c_1}{x^2} + 4c_2 x^3 + \frac{1}{x}.$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo $c_1 = 8/5$, $c_2 = 3/20$. Quindi sostituendo nell'integrale generale si ottiene:

$$y(x) = \frac{8}{5x} + \frac{3}{20}x^4 + \log x - \frac{3}{4}.$$

2A) Conviene utilizzare le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = z \end{cases} \quad dx dy dz = r dr dt dz$$

Dalla catena di disequazioni:

$$(z-1)^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \iff (z-1)^2 \leq r^2 \leq 1$$

otteniamo:

$$z-1 \leq r \leq 1.$$

Segue che in coordinate cilindriche l'insieme E si esprime nella seguente forma:

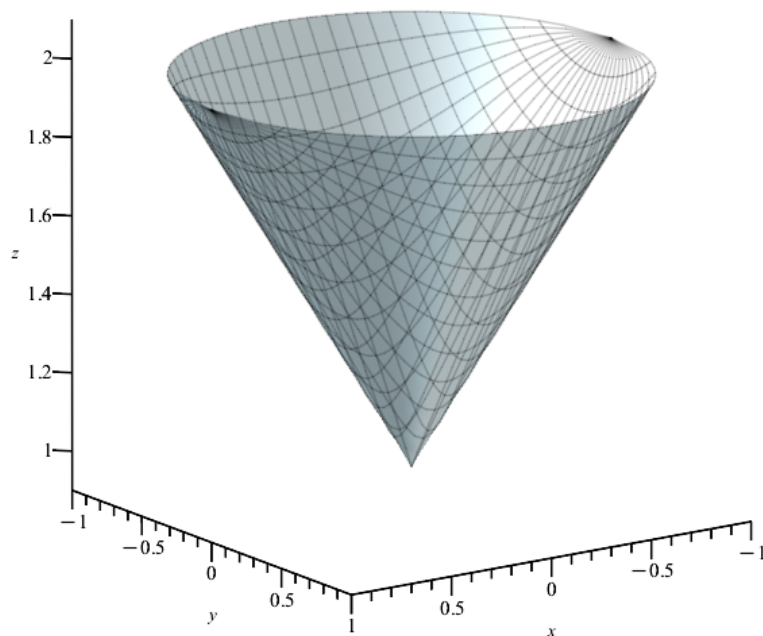
$$\tilde{E} = \{(r, t, z) : 1 \leq z \leq 2, 0 \leq t \leq 2\pi, z-1 \leq r \leq 1\}.$$

Calcoliamo ora il volume dell'insieme E.

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dx dy dz = \int_0^{2\pi} dt \int_1^2 dz \int_{z-1}^1 r dr \\ &= 2\pi \int_1^2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=z-1}^{r=1} dz = \pi \int_1^2 (-z^2 + 2z) dz = \\ &= \pi \left[-\frac{z^3}{3} + z^2 \right]_1^2 = \frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

Per ragioni di simmetria, essendo il solido omogeneo, risulterà: $x_E = y_E = 0$, mentre

$$\begin{aligned} z_E &= \frac{1}{V(E)} \iiint_E z dx dy dz = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_1^2 z dz \int_{z-1}^1 r dr \\ &= 3 \int_1^2 z \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=z-1}^{r=1} dz = \frac{3}{2} \int_1^2 (-z^3 + 2z^2) dz \\ &= \frac{3}{2} \left[-\frac{z^4}{4} + 2\frac{z^3}{3} \right]_1^2 = \frac{33}{24}. \end{aligned}$$



2B),2G) Conviene utilizzare le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = x \\ y = r \cos t \\ z = r \sin t \end{cases} \quad dx dy dz = r dr dt dx$$

Dalla catena di disequazioni:

$$(x + 1)^2 \leq y^2 + z^2 \leq 1 \iff (x + 1)^2 \leq r^2 \leq 1$$

otteniamo:

$$-x - 1 \leq r \leq 1.$$

Segue che in coordinate cilindriche l'insieme E si esprime nella seguente forma:

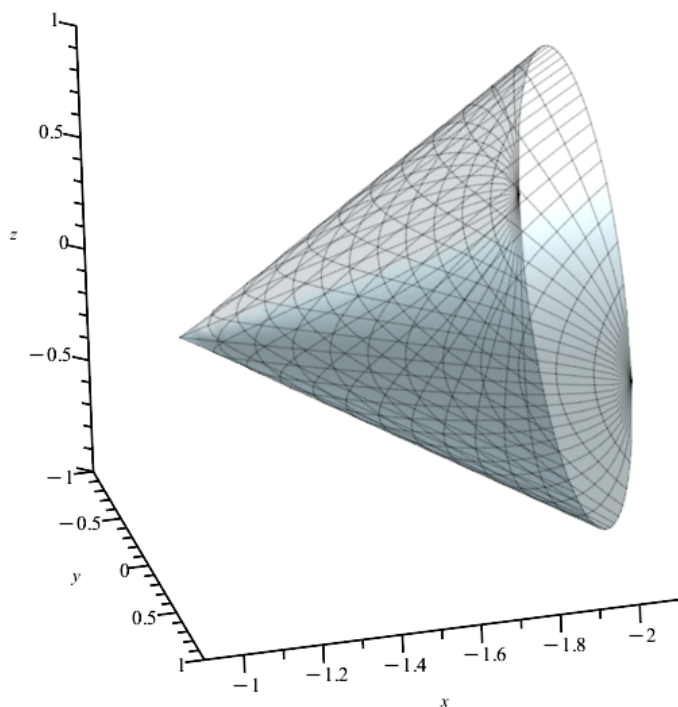
$$\tilde{E} = \{(r, t, x) : -2 \leq x \leq -1, 0 \leq t \leq 2\pi, -x - 1 \leq r \leq 1\}.$$

Calcoliamo ora il volume dell'insieme E.

$$\begin{aligned}
 V(E) &= \iiint_E dx dy dz = \int_0^{2\pi} dt \int_{-2}^{-1} dx \int_{-x-1}^1 r dr \\
 &= 2\pi \int_{-2}^{-1} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=-x-1}^{r=1} dx = \pi \int_{-2}^{-1} (-x^2 - 2x) dx = \\
 &= \pi \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^{-1} = \frac{2}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

Per ragioni di simmetria, essendo il solido omogeneo, risulterà: $y_E = z_E = 0$,
mentre

$$\begin{aligned}
 x_E &= \frac{1}{V(E)} \iiint_E x dx dy dz = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_{-2}^{-1} x dx \int_{-x-1}^1 r dr \\
 &= 3 \int_{-2}^{-1} x \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=-x-1}^{r=1} dx = \frac{3}{2} \int_{-2}^{-1} (-x^3 - 2x^2) dx \\
 &= \frac{3}{2} \left[-\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{-1} = -\frac{33}{24}.
 \end{aligned}$$



2C) Convieni utilizzare le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = y \\ z = r \sin t \end{cases} \quad dx dy dz = r dr dt dy$$

Dalla catena di disequazioni:

$$(y-1)^2 \leq x^2 + z^2 \leq 1 \iff (y-1)^2 \leq r^2 \leq 1$$

otteniamo:

$$y-1 \leq r \leq 1.$$

Segue che in coordinate cilindriche l'insieme E si esprime nella seguente forma:

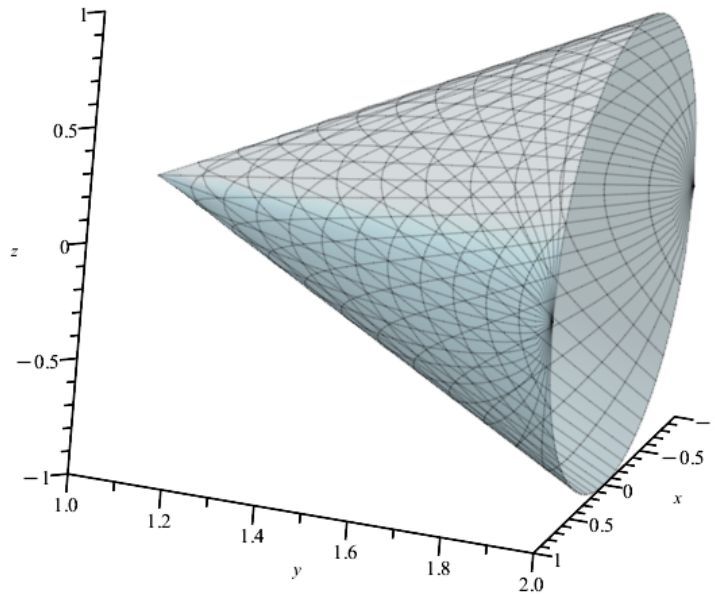
$$\tilde{E} = \{(r, t, y) : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq t \leq 2\pi, y-1 \leq r \leq 1\}.$$

Calcoliamo ora il volume dell'insieme E.

$$\begin{aligned}
 V(E) &= \iiint_E dx dy dz = \int_0^{2\pi} dt \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 r dr \\
 &= 2\pi \int_1^2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=y-1}^{r=1} dy = \pi \int_1^2 (-y^2 + 2y) dy = \\
 &= \pi \left[-\frac{y^3}{3} + y^2 \right]_1^2 = \frac{2}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

Per ragioni di simmetria, essendo il solido omogeneo, risulterà: $x_E = z_E = 0$,
mentre

$$\begin{aligned}
 y_E &= \frac{1}{V(E)} \iiint_E y dx dy dz = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_1^2 y dy \int_{y-1}^1 r dr \\
 &= 3 \int_1^2 y \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=y-1}^{r=1} dy = \frac{3}{2} \int_1^2 (-y^3 + 2y^2) dy \\
 &= \frac{3}{2} \left[-\frac{y^4}{4} + 2\frac{y^3}{3} \right]_1^2 = \frac{33}{24}.
 \end{aligned}$$



2D),2H) Conviene utilizzare le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = z \end{cases} \quad dx dy dz = r dr dt dz$$

Dalla catena di disequazioni:

$$(z + 1)^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \iff (z + 1)^2 \leq r^2 \leq 1$$

otteniamo:

$$-z - 1 \leq r \leq 1.$$

Segue che in coordinate cilindriche l'insieme E si esprime nella seguente forma:

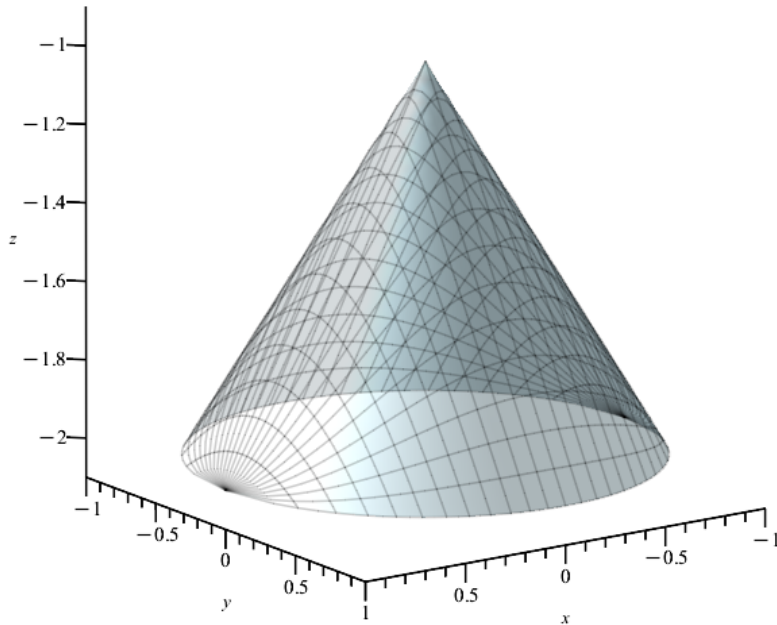
$$\tilde{E} = \{(r, t, z) : -2 \leq z \leq -1, 0 \leq t \leq 2\pi, -z - 1 \leq r \leq 1\}.$$

Calcoliamo ora il volume dell'insieme E.

$$\begin{aligned}
 V(E) &= \iiint_E dx dy dz = \int_0^{2\pi} dt \int_{-2}^{-1} dz \int_{-z-1}^1 r dr \\
 &= 2\pi \int_{-2}^{-1} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=-z-1}^{r=1} dz = \pi \int_{-2}^{-1} (-z^2 - 2z) dz = \\
 &= \pi \left[-\frac{z^3}{3} - z^2 \right]_{-2}^{-1} = \frac{2}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

Per ragioni di simmetria, essendo il solido omogeneo, risulterà: $x_E = y_E = 0$,
mentre

$$\begin{aligned}
 z_E &= \frac{1}{V(E)} \iiint_E z dx dy dz = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_{-2}^{-1} z dz \int_{-z-1}^1 r dr \\
 &= 3 \int_{-2}^{-1} z \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=-z-1}^{r=1} dz = \frac{3}{2} \int_{-2}^{-1} (-z^3 - 2z^2) dz \\
 &= \frac{3}{2} \left[-\frac{z^4}{4} - 2\frac{z^3}{3} \right]_{-2}^{-1} = -\frac{33}{24}.
 \end{aligned}$$



2E) Convieni utilizzare le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = x \\ y = r \cos t \\ z = r \sin t \end{cases} \quad dx dy dz = r dr dt dx$$

Dalla catena di disequazioni:

$$(x-1)^2 \leq y^2 + z^2 \leq 1 \iff (x-1)^2 \leq r^2 \leq 1$$

otteniamo:

$$x-1 \leq r \leq 1.$$

Segue che in coordinate cilindriche l'insieme E si esprime nella seguente forma:

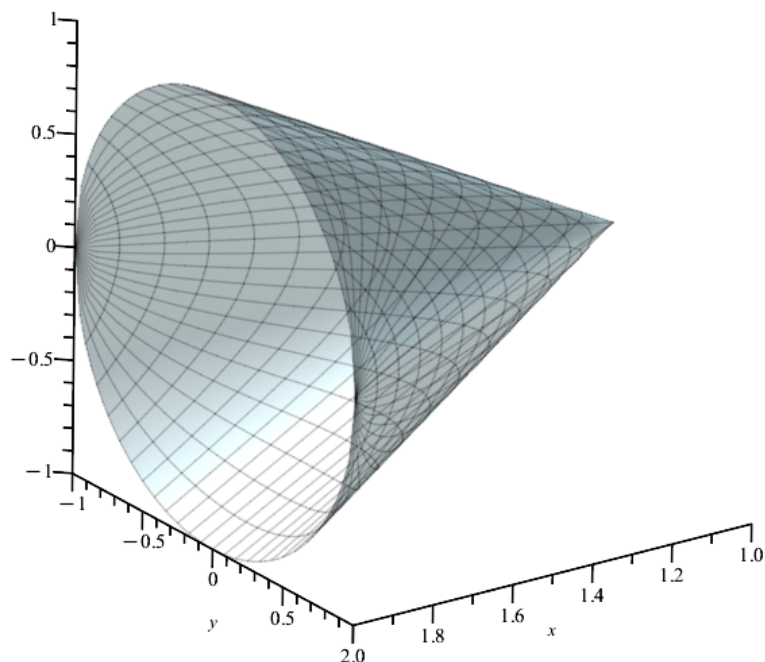
$$\tilde{E} = \{(r, t, x) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 2\pi, x-1 \leq r \leq 1\}.$$

Calcoliamo ora il volume dell'insieme E.

$$\begin{aligned}
 V(E) &= \iiint_E dx dy dz = \int_0^{2\pi} dt \int_1^2 dx \int_{x-1}^1 r dr \\
 &= 2\pi \int_1^2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=x-1}^{r=1} dx = \pi \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx = \\
 &= \pi \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_1^2 = \frac{2}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

Per ragioni di simmetria, essendo il solido omogeneo, risulterà: $y_E = z_E = 0$,
mentre

$$\begin{aligned}
 x_E &= \frac{1}{V(E)} \iiint_E x dx dy dz = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_1^2 x dx \int_{x-1}^1 r dr \\
 &= 3 \int_1^2 x \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=x-1}^{r=1} dx = \frac{3}{2} \int_1^2 (-x^3 + 2x^2) dx \\
 &= \frac{3}{2} \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{33}{24}.
 \end{aligned}$$



2F) Convieni utilizzare le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = y \\ z = r \sin t \end{cases} \quad dx dy dz = r dr dt dy$$

Dalla catena di disequazioni:

$$(y + 1)^2 \leq x^2 + z^2 \leq 1 \iff (y + 1)^2 \leq r^2 \leq 1$$

otteniamo:

$$-y - 1 \leq r \leq 1.$$

Segue che in coordinate cilindriche l'insieme E si esprime nella seguente forma:

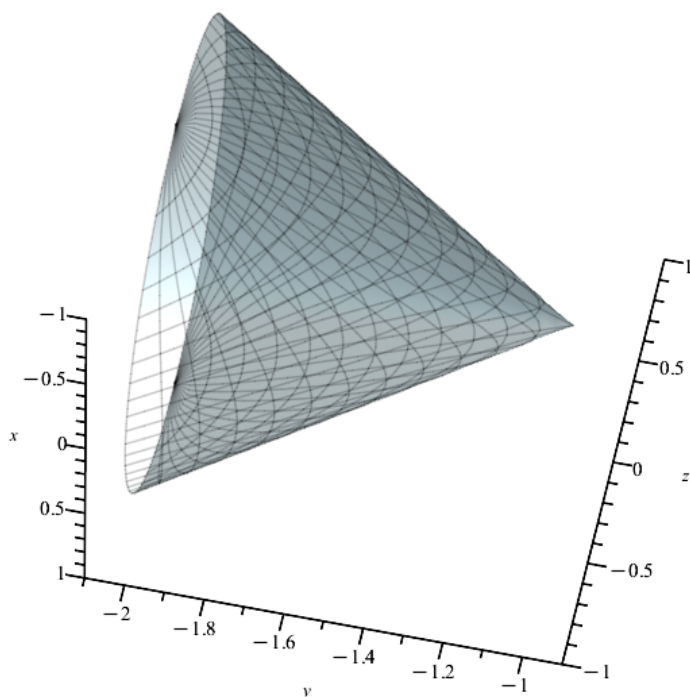
$$\tilde{E} = \{(r, t, y) : -2 \leq y \leq -1, 0 \leq t \leq 2\pi, -y - 1 \leq r \leq 1\}.$$

Calcoliamo ora il volume dell'insieme E.

$$\begin{aligned}
 V(E) &= \iiint_E dx dy dz = \int_0^{2\pi} dt \int_{-2}^{-1} dy \int_{-y-1}^1 r dr \\
 &= 2\pi \int_{-2}^{-1} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=-y-1}^{r=1} dy = \pi \int_{-2}^{-1} (-y^2 - 2y) dy = \\
 &= \pi \left[-\frac{y^3}{3} - y^2 \right]_{-2}^{-1} = \frac{2}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

Per ragioni di simmetria, essendo il solido omogeneo, risulterà: $x_E = z_E = 0$,
mentre

$$\begin{aligned}
 y_E &= \frac{1}{V(E)} \iiint_E y dx dy dz = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_{-2}^{-1} y dy \int_{-y-1}^1 r dr \\
 &= 3 \int_{-2}^{-1} y \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=-y-1}^{r=1} dy = \frac{3}{2} \int_{-2}^{-1} (-y^3 - 2y^2) dy \\
 &= \frac{3}{2} \left[-\frac{y^4}{4} - 2\frac{y^3}{3} \right]_{-2}^{-1} = -\frac{33}{24}.
 \end{aligned}$$



3A),3E) La parte di ellisse che ci interessa può essere parametrizzata come:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad ds = \sqrt{9 \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} dt.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} massa(\gamma) &= \int_{\gamma} xy ds = \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \cdot \frac{1}{2} \sin t \sqrt{9 \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\frac{35}{4} \sin^2 t + \frac{1}{4}} dt \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} (35 \sin^2 t + 1)^{1/2} \sin t \cos t dt. \end{aligned}$$

Operando la sostituzione $u = 35 \sin^2 t + 1$, da cui $\frac{du}{70} = \sin t \cos t dt$, otteniamo:

$$\begin{aligned} massa(\gamma) &= \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} (35 \sin^2 t + 1)^{1/2} \sin t \cos t dt \\ &= \frac{3}{280} \int_1^{36} u^{1/2} du = \frac{3}{280} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^{36} = \frac{43}{28}. \end{aligned}$$

3B),3F) La parte di ellisse che ci interessa può essere parametrizzata come:

$$\gamma: \begin{cases} x(t) = \sqrt{3} \cos t \\ y(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad ds = \sqrt{3 \sin^2 t + \frac{1}{3} \cos^2 t} dt.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} massa(\gamma) &= \int_{\gamma} xy ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{3} \cos t \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sin t \sqrt{3 \sin^2 t + \frac{1}{3} \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\frac{8}{3} \sin^2 t + \frac{1}{3}} dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\pi/2} (8 \sin^2 t + 1)^{1/2} \sin t \cos t dt. \end{aligned}$$

Operando la sostituzione $u = 8 \sin^2 t + 1$, da cui $\frac{du}{16} = \sin t \cos t dt$, otteniamo:

$$\begin{aligned} massa(\gamma) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\pi/2} (8 \sin^2 t + 1)^{1/2} \sin t \cos t dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{48} \int_1^9 u^{1/2} du = \frac{\sqrt{3}}{48} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^9 = \frac{13}{36} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

3C),3G) La parte di ellisse che ci interessa può essere parametrizzata come:

$$\gamma: \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad ds = \sqrt{2 \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} dt.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} massa(\gamma) &= \int_{\gamma} xy ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} \cos t \cdot \frac{1}{2} \sin t \sqrt{2 \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\frac{7}{4} \sin^2 t + \frac{1}{4}} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{\pi/2} (7 \sin^2 t + 1)^{1/2} \sin t \cos t dt. \end{aligned}$$

Operando la sostituzione $u = 7 \sin^2 t + 1$, da cui $\frac{du}{14} = \sin t \cos t dt$, otteniamo:

$$\begin{aligned} massa(\gamma) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{\pi/2} (7 \sin^2 t + 1)^{1/2} \sin t \cos t dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{56} \int_1^8 u^{1/2} du = \frac{\sqrt{2}}{56} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^8 = \frac{32 - \sqrt{2}}{84}. \end{aligned}$$

3D),3H) La parte di ellisse che ci interessa può essere parametrizzata come:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{5} \cos t \\ y(t) = \frac{\sqrt{5}}{5} \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad ds = \sqrt{5 \sin^2 t + \frac{1}{5} \cos^2 t} dt.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} massa(\gamma) &= \int_{\gamma} xy ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{5} \cos t \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \sin t \sqrt{5 \sin^2 t + \frac{1}{5} \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\frac{24}{5} \sin^2 t + \frac{1}{5}} dt \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \int_0^{\pi/2} (24 \sin^2 t + 1)^{1/2} \sin t \cos t dt. \end{aligned}$$

Operando la sostituzione $u = 24 \sin^2 t + 1$, da cui $\frac{du}{48} = \sin t \cos t dt$, otteniamo:

$$\begin{aligned} massa(\gamma) &= \frac{\sqrt{5}}{5} \int_0^{\pi/2} (24 \sin^2 t + 1)^{1/2} \sin t \cos t dt \\ &= \frac{\sqrt{5}}{240} \int_1^{25} u^{1/2} du = \frac{\sqrt{5}}{240} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^{25} = \frac{31}{90} \sqrt{5}. \end{aligned}$$

4A) Il triangolo T_A è chiaramente un dominio regolare (rispetto all'asse x). Pertanto, dal teorema di Gauss-Green, si ha

$$\int_C (x^2 + 2y^2)dx = - \iint_{T_A} \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2y^2)dxdy = - \iint_{T_A} 4y dxdy.$$

Analogamente

$$\int_C (x^2 + 2yx)dy = \iint_{T_A} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2yx)dxdy = \iint_{T_A} 2(x + y)dxdy.$$

Così in definitiva si ha

$$\int_C (x^2 + 2y^2)dx + (x^2 + 2yx)dy = \iint_{T_A} (2x - 2y)dxdy.$$

Essendo

$$T_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 4 - x, x \in [1, 2]\},$$

si ha

$$\begin{aligned} \iint_{T_A} (2x - 2y)dxdy &= 2 \iint_{T_A} (x - y)dxdy \\ &= 2 \int_1^2 \left[\int_x^{4-x} (x - y)dy \right] dx \\ &= 2 \int_1^2 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=4-x} dx \\ &= 2 \int_1^2 [8x - 2x^2 - 8] dx \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

4B) Il triangolo T_B è chiaramente un dominio regolare (rispetto all'asse x). Pertanto, dal teorema di Gauss-Green, si ha

$$\int_C (x^2 + 2y^2)dx = - \iint_{T_B} \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2y^2)dxdy = - \iint_{T_B} 4y dxdy.$$

Analogamente

$$\int_C (x^2 + 2yx)dy = \iint_{T_B} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2yx)dxdy = \iint_{T_B} 2(x + y)dxdy.$$

Così in definitiva si ha

$$\int_C (x^2 + 2y^2)dx + (x^2 + 2yx)dy = \iint_{T_B} (2x - 2y)dxdy.$$

Essendo

$$T_B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + 2 \leq y \leq x + 2, x \in [0, 1]\},$$

si ha

$$\begin{aligned} \iint_{T_B} (2x - 2y)dxdy &= 2 \iint_{T_B} (x - y)dxdy \\ &= 2 \int_0^1 \left[\int_{-x+2}^{x+2} (x - y)dy \right] dx \\ &= 2 \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=-x+2}^{y=x+2} dx \\ &= 2 \int_0^1 [2x^2 - 4x] dx \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

4C) Il tringolo T_C è chiaramente un dominio regolare (rispetto all'asse y). Pertanto, dal teorema di Gauss-Green, si ha

$$\int_C (x^2 + 2y^2)dx = - \iint_{T_C} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 2y^2)dxdy = - \iint_{T_C} 4y dxdy.$$

Analogamente

$$\int_C (x^2 + 2yx)dy = \iint_{T_C} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 2yx)dxdy = \iint_{T_C} 2(x + y)dxdy.$$

Così in definitiva si ha

$$\int_C (x^2 + 2y^2)dx + (x^2 + 2yx)dy = \iint_{T_C} (2x - 2y)dxdy.$$

Essendo

$$T_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 \leq x \leq 3 - y, y \in [1, 2]\},$$

si ha

$$\begin{aligned}
 \iint_{T_C} (2x - 2y) dx dy &= 2 \iint_{T_C} (x - y) dx dy \\
 &= 2 \int_1^2 \left[\int_{y-1}^{3-y} (x - y) dx \right] dy \\
 &= 2 \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=y-1}^{x=3-y} dy \\
 &= 2 \int_1^2 [4 + 2y^2 - 6y] dy \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

4D) Il tringolo T_D è chiaramente un dominio regolare (rispetto all'asse x). Pertanto, dal teorema di Gauss-Green, si ha

$$\int_C (x^2 + 2y^2) dx = - \iint_{T_D} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 2y^2) dx dy = - \iint_{T_D} 4y dx dy.$$

Analogamente

$$\int_C (x^2 + 2yx) dy = \iint_{T_D} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 2yx) dx dy = \iint_{T_D} 2(x + y) dx dy.$$

Così in definitiva si ha

$$\int_C (x^2 + 2y^2) dx + (x^2 + 2yx) dy = \iint_{T_D} (2x - 2y) dx dy.$$

Essendo

$$T_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y + 1 \leq x \leq y + 1, y \in [0, 1]\},$$

si ha

$$\begin{aligned}
 \iint_{T_D} (2x - 2y) dx dy &= 2 \iint_{T_D} (x - y) dx dy \\
 &= 2 \int_0^1 \left[\int_{-y+1}^{y+1} (x - y) dx \right] dy \\
 &= 2 \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=-y+1}^{x=y+1} dy \\
 &= 2 \int_0^1 [2y - 2y^2] dy \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

4E) Il triangolo T_E è chiaramente un dominio regolare (rispetto all'asse x). Pertanto, dal teorema di Gauss-Green, si ha

$$\int_C (x-2y)^2 dx = - \iint_{T_E} \frac{\partial}{\partial y} (x-2y)^2 dx dy = \iint_{T_E} 4(x-2y) dx dy.$$

Analogamente

$$\int_C (4xy + 3y^2) dy = \iint_{T_E} \frac{\partial}{\partial x} (4xy + 3y^2) dx dy = \iint_{T_E} 4y dx dy.$$

Così in definitiva si ha

$$\int_C (x^2 + 2y^2) dx + (x^2 + 2yx) dy = \iint_{T_E} (4x - 4y) dx dy.$$

Essendo

$$T_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 4-x, x \in [1, 2]\},$$

si ha

$$\begin{aligned} \iint_{T_E} (4x - 4y) dx dy &= 4 \iint_{T_E} (x - y) dx dy \\ &= 4 \int_1^2 \left[\int_x^{4-x} (x - y) dy \right] dx \\ &= 4 \int_1^2 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=4-x} dx \\ &= 4 \int_1^2 [-2x^2 + 8x - 8] dx \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

4F) Il triangolo T_F è chiaramente un dominio regolare (rispetto all'asse x). Pertanto, dal teorema di Gauss-Green, si ha

$$\int_C (x-2y)^2 dx = - \iint_{T_F} \frac{\partial}{\partial y} (x-2y)^2 dx dy = \iint_{T_F} 4(x-2y) dx dy.$$

Analogamente

$$\int_C (4xy + 3y^2) dy = \iint_{T_F} \frac{\partial}{\partial x} (4xy + 3y^2) dx dy = \iint_{T_F} 4y dx dy.$$

Così in definitiva si ha

$$\int_C (x^2 + 2y^2)dx + (x^2 + 2yx)dy = \iint_{T_F} (4x - 4y)dxdy.$$

Essendo

$$T_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + 2 \leq y \leq x + 2, x \in [0, 1]\},$$

si ha

$$\begin{aligned} \iint_{T_F} (4x - 4y)dxdy &= 4 \iint_{T_F} (x - y)dxdy \\ &= 4 \int_0^1 \left[\int_{-x+2}^{x+2} (x - y)dy \right] dx \\ &= 4 \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=-x+2}^{y=x+2} dx \\ &= 4 \int_0^1 [2x^2 - 4x] dx \\ &= -\frac{16}{3}. \end{aligned}$$

4G) Il triangolo T_G è chiaramente un dominio regolare (rispetto all'asse y). Pertanto, dal teorema di Gauss-Green, si ha

$$\int_C (x - 2y)^2 dx = - \iint_{T_G} \frac{\partial}{\partial y} (x - 2y)^2 dxdy = \iint_{T_G} 4(x - 2y)dxdy.$$

Analogamente

$$\int_C (4xy + 3y^2)dy = \iint_{T_G} \frac{\partial}{\partial x} (4xy + 3y^2)dxdy = \iint_{T_G} 4y dxdy.$$

Così in definitiva si ha

$$\int_C (x^2 + 2y^2)dx + (x^2 + 2yx)dy = \iint_{T_G} (4x - 4y)dxdy.$$

Essendo

$$T_G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 \leq x \leq 3 - y, y \in [1, 2]\},$$

si ha

$$\begin{aligned}
 \iint_{T_G} (4x - 4y) dx dy &= 4 \iint_{T_G} (x - y) dx dy \\
 &= 4 \int_1^2 \left[\int_{y-1}^{3-y} (x - y) dx \right] dy \\
 &= 4 \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=y-1}^{x=3-y} dy \\
 &= 4 \int_1^2 [4 + 2y^2 - 6y] dy \\
 &= \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

4H) Il tringolo T_H è chiaramente un dominio regolare (rispetto all'asse x). Pertanto, dal teorema di Gauss-Green, si ha

$$\int_C (x - 2y)^2 dx = - \iint_{T_H} \frac{\partial}{\partial y} (x - 2y)^2 dx dy = \iint_{T_H} 4(x - 2y) dx dy.$$

Analogamente

$$\int_C (4xy + 3y^2) dy = \iint_{T_H} \frac{\partial}{\partial x} (4xy + 3y^2) dx dy = \iint_{T_H} 4y dx dy.$$

Così in definitiva si ha

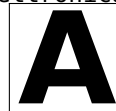
$$\int_C (x^2 + 2y^2) dx + (x^2 + 2yx) dy = \iint_{T_H} (4x - 4y) dx dy.$$

Essendo

$$T_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y + 1 \leq x \leq y + 1, y \in [0, 1]\},$$

si ha

$$\begin{aligned}
 \iint_{T_H} (2x - 2y) dx dy &= 4 \iint_{T_H} (x - y) dx dy \\
 &= 4 \int_0^1 \left[\int_{-y+1}^{y+1} (x - y) dx \right] dy \\
 &= 4 \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=-y+1}^{x=y+1} dy \\
 &= 2 \int_0^1 [2y - 2y^2] dy \\
 &= \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

**Esonero 13 Dicembre 2024**

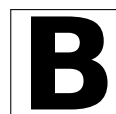
iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi

- 1)** Sia dato il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, 0, x - y)$.
Calcolare il flusso del rotore di \vec{F} verso l'alto, attraverso la superficie S di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, sia direttamente che utilizzando il teorema di Stokes.

**Esonero 13 Dicembre 2024**

iscritto al secondo anno di corso

 SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi.

- 1)** Sia dato il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (z, y, \frac{x^2}{2} + y)$. Calcolare il flusso del rotore di \vec{F} verso l'alto, attraverso la superficie

S di equazione $z = x^2$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, sia direttamente che utilizzando il teorema di Stokes.



Esonero 13 Dicembre 2024

iscritto al secondo anno di corso

SI

NO

BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi.

- 1)** Sia dato il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (x, 0, \frac{y^2}{2})$. Calcolare il flusso del rotore di \vec{F} verso l'alto, attraverso la superficie S di equazione $z = x^2 + y^2$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, sia direttamente che utilizzando il teorema di Stokes.
-



Esonero 13 Dicembre 2024

iscritto al secondo anno di corso

SI

NO

BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi.

- 1)** Sia dato il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (y+y^2, 1, 1)$. Calcolare il flusso del rotore di \vec{F} verso l'alto, attraverso la superficie S di equazione $z = x^2y^2$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, sia direttamente che utilizzando il teorema di Stokes.
-



Esonero 13 Dicembre 2024

iscritto al secondo anno di corso

SI

NO

BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi

- 1)** Sia dato il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + y, xy, xz)$. Calcolare il flusso del rotore di \vec{F} verso l'alto, attraverso la superficie S di equazione $z = y^2$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 4x^2 + y^2 \leq 1\}$, sia direttamente che utilizzando il teorema di Stokes.
-



Esonero 13 Dicembre 2024

iscritto al secondo anno di corso SI NO

BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi

- 1)** Sia dato il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (zx, x + y, 0)$.
Calcolare il flusso del rotore di \vec{F} verso l'alto, attraverso la superficie S di equazione $z = 4x^2 - y^2 + 4$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x + 2, y \leq 2 - 2x\}$, sia direttamente che utilizzando il teorema di Stokes.
-



Esonero 13 Dicembre 2024

iscritto al secondo anno di corso SI NO

BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi

- 1)** Sia dato il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (3y, 0, x^2 - y^2)$.
Calcolare il flusso del rotore di \vec{F} verso l'alto, attraverso la superficie S di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, sia direttamente che utilizzando il teorema di Stokes.



Esonero 13 Dicembre 2024

iscritto al secondo anno di corso

SI

NO

BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi.

- 1)** Sia dato il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (y+y^2, 1, 1)$. Calcolare il flusso del rotore di \vec{F} verso l'alto, attraverso la superficie S di equazione $z = x^2y^2$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, sia direttamente che utilizzando il teorema di Stokes.
-

Cenni di svolgimento

1A) La superficie S è una porzione di paraboloido, ha una rappresentazione parametrica di classe $C^2(D)$, è regolare, ha normale $n = (2x, 2y, 1)$ per ogni $(x, y) \in D$. Risulta $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & 0 & x-y \end{vmatrix} = (-1, -1, -2y) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot n \, dS &= \iint_D (-1, -1, -2y) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx \, dy = \iint_D (-2x - 4y) \, dx \, dy = \\ &= -2 \int_0^1 r^2 \, dr \int_{-\pi/2}^0 (\cos t + 2 \sin t) \, dt = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La superficie S è orientabile e con bordo.

$$\begin{aligned} +Fr(D) &= \{(0, t) : 0 \geq t \geq -1\} \cup \{(\cos t, \sin t), -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0\} \cup \\ &\cup \{(t, 0), 1 \geq t \geq 0\} \end{aligned}$$

$$+BS = +\gamma_1 \cup +\gamma_2 \cup +\gamma_3$$

$$+\gamma_1 : \{(0, t, 1-t^2) : 0 \geq t \geq -1\}, \quad \gamma'_1 = (0, 1, -2t);$$

$$+\gamma_2 : \{(\cos t, \sin t, 0), -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0\}, \quad \gamma'_2 = (-\sin t, \cos t, 0);$$

$$+\gamma_3 : \{(t, 0, 1-t^2), 1 \geq t \geq 0\}, \quad \gamma'_3 = (1, 0, -2t).$$

$$\vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma'_1 = (t^2, 0, -t) \cdot (0, 1, -2t) = 2t^2$$

$$\vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma'_2 = (\sin^2 t, 0, \cos t - \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = -\sin^3 t$$

$$\vec{F}|_{\gamma_3} \cdot \gamma'_3 = (0, 0, t) \cdot (1, 0, -2t) = -2t^2$$

$$\begin{aligned}
 \int_{+BS} y^2 dx + (x-y) dz &= \int_{\gamma_1} \vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma'_1 dt + \int_{\gamma_2} \vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma'_2 dt + \int_{\gamma_3} \vec{F}|_{\gamma_3} \cdot \gamma'_3 dt = \\
 &= \int_0^{-1} 2t^2 dt + \int_{-\pi/2}^0 -\sin^3 t dt + \int_1^0 -2t^2 dt = \\
 &= -2 \int_{-1}^0 t^2 dt + 2 \int_0^1 t^2 dt + \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = \\
 &= \frac{1}{2} B\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

1B) La superficie S è una porzione di paraboloide e ha una rappresentazione parametrica di classe $C^2(D)$, è regolare, ha normale $n = (-2x, 0, 1)$ per ogni $(x, y) \in D$. Risulta $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & y & \frac{x^2}{2} + y \end{vmatrix} = (1, 1-x, 0) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
 \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot n \, dS &= \iint_D (1, 1-x, 0) \cdot (-2x, 0, 1) \, dx dy = - \iint_D 2x \, dx dy = \\
 &= -2 \int_0^1 x \, dx \int_0^x dy = -\frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

La superficie S è orientabile e con bordo.

$$+Fr(D) = \{(t, 0) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(1, t), 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(t, t), 1 \geq t \geq 0\}$$

$$+BS = +\gamma_1 \cup +\gamma_2 \cup +\gamma_3$$

$$+\gamma_1 := \{(t, 0, t^2) : 0 \leq t \leq 1\}, \quad \gamma'_1 = (1, 0, 2t);$$

$$+\gamma_2 := \{(1, t, 1), 0 \leq t \leq 1\}, \quad \gamma'_2 = (0, 1, 0);$$

$$+\gamma_3 := \{(t, t, t^2), 1 \geq t \geq 0\}, \quad \gamma'_3 = (1, 1, 2t).$$

$$\vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma'_1 = (t^2, 0, \frac{t^2}{2}) \cdot (1, 0, 2t) = t^2 + t^3$$

$$\vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma'_2 = (1, t, \frac{1}{2} + t) \cdot (0, 1, 0) = t$$

$$\vec{F}|_{\gamma_3} \cdot \gamma'_3 = (t^2, t, \frac{t^2}{2} + t) \cdot (1, 1, 2t) = t^2 + t + t^3 + 2t^2 = t^3 + 3t^2 + t$$

$$\begin{aligned} \int_{+BS} zdx + ydy + \left(\frac{x^2}{2} + y\right)dz &= \int_{\gamma_1} \vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma'_1 dt + \int_{\gamma_2} \vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma'_2 dt + \int_{\gamma_3} \vec{F}|_{\gamma_3} \cdot \gamma'_3 dt = \\ &= \int_0^1 (t^3 + t^2 + t)dt - \int_0^1 (t^3 + 3t^2 + t)dt = \\ &= -2 \int_0^1 t^2 dt = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

1C) La superficie S ha una rappresentazione parametrica di classe $C^2(D)$, è regolare, ha normale $n = (-2x, -2y, 1)$ per ogni $(x, y) \in D$. Risulta $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & 0 & \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} = (y, 0, 0) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot n \, dS &= \iint_D (y, 0, 0) \cdot (-2x, -2y, 1) \, dx dy = - \iint_D 2xy \, dx dy = \\ &= -2 \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} y \, dy = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

La superficie S è orientabile e con bordo.

$$+Fr(D) = \{(t, 0) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(t, 1-t), 1 \geq t \geq 0\} \cup \{(0, t) : 1 \geq t \geq 0\}$$

$$+BS = +\gamma_1 \cup +\gamma_2 \cup +\gamma_3$$

$$+\gamma_1 := \{(t, 0, t^2) : 0 \leq t \leq 1\}, \quad \gamma'_1 = (1, 0, 2t);$$

$$+\gamma_2 := \{(t, 1-t, 2t^2 - 2t + 1), 1 \geq t \geq 0\}, \quad \gamma'_2 = (1, -1, 4t - 2);$$

$$+\gamma_3 := \{(0, t, t^2) : 1 \geq t \geq 0\}, \quad \gamma'_3 = (0, 1, 2t).$$

$$\vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma'_1 = (t, 0, 0) \cdot (1, 0, 2t) = t$$

$$\vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma'_2 = \left(t, 0, \frac{(1-t)^2}{2}\right) \cdot (1, -1, 4t-2) = t + (2t-1)(1-t)^2$$

$$\vec{F}|_{\gamma_3} \cdot \gamma'_3 = \left(0, 0, \frac{t^2}{2}\right) \cdot (0, 1, 2t) = t^3$$

$$\begin{aligned} \int_{+BS} x dx + \frac{y^2}{2} dz &= \int_{\gamma_1} \vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma'_1 dt + \int_{\gamma_2} \vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma'_2 dt + \int_{\gamma_3} \vec{F}|_{\gamma_3} \cdot \gamma'_3 dt = \\ &= \int_0^1 t dt - \int_0^1 [t + (2t-1)(1-t)^2] dt - \int_0^1 t^3 dt = \\ &= -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

1D) La superficie S ha una rappresentazione parametrica di classe $C^2(D)$, è regolare, ha normale $n = (-2xy^2, -2x^2y, 1)$ per ogni $(x, y) \in D$. Risulta $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y + y^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, -2y - 1) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot n \, dS &= \iint_D (0, 0, -2y - 1) \cdot (-2xy^2, -2x^2y, 1) \, dx dy = \\ &= - \iint_D (2y + 1) \, dx dy = \\ &= - \int_0^1 r dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2r \sin t + 1) dt = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

La superficie S è orientabile e con bordo.

$$\begin{aligned} +Fr(D) &= \left\{ (\cos t, \sin t) : -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ (0, t) : 1 \geq t \geq -1 \right\} \\ +BS &= +\gamma_1 \cup +\gamma_2 \\ +\gamma_1 &:= \left\{ (\cos t, \sin t, \cos^2 t \sin^2 t) : -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \\ \gamma'_1 &= (-\sin t, \cos t, 2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t)); \\ +\gamma_2 &:= \left\{ (0, t, 0) : 1 \geq t \geq -1 \right\}, \quad \gamma'_2 = (0, 1, 0); \\ \vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma'_1 &= (\sin^2 t + \sin t, 1, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t)) = \\ &= -\sin^3 t - \sin^2 t + \cos t + 2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) \\ \vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma'_2 &= (t^2 + t, 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{+BS} (y^2 + y)dx + dy + dz = \int_{\gamma_1} \vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma_1' dt + \int_{\gamma_2} \vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma_2' dt = \\
 & = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\sin^3 t - \sin^2 t + \cos t + \frac{1}{2} \sin 4t \right) dt - \int_{-1}^1 dt = \\
 & = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\sin^2 t + \cos t \right) dt - 2 = \\
 & = -2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = -2B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

1E) La superficie S ha una rappresentazione parametrica di classe $C^2(D)$, è regolare, ha normale $n = (0, -2y, 1)$ per ogni $(x, y) \in D$. Risulta $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y + y^2 & xy & xz \end{vmatrix} = (0, -z, -y - 1) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

D è una semiellisse, simmetrica rispetto all'asse delle x , $a = 1/2, b = 1$, pertanto

$$\begin{aligned}
 \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot n \, dS & = \iint_D (0, -y^2, -y - 1) \cdot (0, -2y, 1) \, dx dy = \\
 & = - \iint_D (2y^3 - y - 1) \, dx dy = \\
 & = \iint_D dx dy = -\operatorname{area}(D) = -\frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

La superficie S è orientabile e con bordo.

$$+Fr(D) = \left\{ \left(\frac{1}{2} \cos t, \sin t \right) : -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\} \cup \{(0, t), 1 \geq t \geq -1\}$$

$$+BS = +\gamma_1 \cup +\gamma_2$$

$$+\gamma_1 := \left\{ \left(\frac{1}{2} \cos t, \sin t, \sin^2 t \right) : -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$\gamma_1' = \left(-\frac{1}{2} \sin t, \cos t, 2 \sin t \cos t \right);$$

$$+\gamma_2 := \{(0, t, t^2), 1 \geq t \geq -1\}, \quad \gamma_2' = (0, 1, 2t);$$

$$\vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma_1' = \left(\sin^2 t + \sin t, \frac{1}{2} \cos t \sin t, \frac{1}{2} \cos t \sin^2 t \right) \cdot$$

$$\left(-\frac{1}{2} \sin t, \cos t, 2 \sin t \cos t \right) =$$

$$-\frac{1}{2} \sin^3 t - \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t + \frac{1}{2} \sin t \cos^2 t + \cos^2 t \sin^3 t$$

$$\vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma_2' = (t + t^2, 0, 0) \cdot (0, 1, 2t) = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{+BS} x dx + \frac{x^2}{2} dz &= \int_{\gamma_1} \vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma_1' dt + \int_{\gamma_2} \vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma_2' dt = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2} \sin^3 t - \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t + \frac{1}{2} \sin t \cos^2 t + \cos^2 t \sin^3 t \right) dt = \\ &= -\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = -\frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

1F) La superficie S ha una rappresentazione parametrica di classe $C^2(D)$, è regolare, ha normale $n = (-8x, 2y, 1)$ per ogni $(x, y) \in D$. Risulta $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ zx & x+y & 0 \end{vmatrix} = (0, x, 1) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, \frac{y-2}{2} \leq x \leq \frac{2-y}{2}\}$, pertanto

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot n dS &= \iint_D (0, x, 1) \cdot (-8x, 2y, 1) dx dy = \iint_D (2xy + 1) dx dy = \\ &= \text{area}(D) + 2 \int_0^2 y dy \int_{(y-2)/2}^{(2-y)/2} x dx = \text{area}(D) = 2. \end{aligned}$$

La superficie S è orientabile e con bordo.

$$+Fr(D) = \{(t, 0) : -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(t, 2 - 2t), 1 \geq t \geq 0\} \cup \\ \cup \{(t, 2 + 2t), 0 \geq t \geq -1\}$$

$$+BS = +\gamma_1 \cup +\gamma_2 \cup +\gamma_3$$

$$+\gamma_1 := \{(t, 0, 4t^2 + 4) : -1 \leq t \leq 1\}, \quad \gamma'_1 = (1, 0, 8t);$$

$$+\gamma_2 := \{(t, 2 - 2t, 8t), 1 \geq t \geq 0\}, \quad \gamma'_2 = (1, -2, 8);$$

$$+\gamma_3 := \{(t, 2 + 2t, -8t), 0 \geq t \geq -1\}, \quad \gamma'_3 = (1, 2, -8).$$

$$\vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma'_1 = (4t^3 + 4t, t, 0) \cdot (1, 0, 8t) = 4t^3 + 4t$$

$$\vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma'_2 = (8t^2, 2 - t, 0) \cdot (1, -2, 8) = 8t^2 + 2t - 4$$

$$\vec{F}|_{\gamma_3} \cdot \gamma'_3 = (-8t^2, 2 + 3t, 0) \cdot (1, 2, -8) = -8t^2 + 6t + 4$$

$$\int_{+BS} z dx + (x + y) dy = \int_{\gamma_1} \vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma'_1 dt + \int_{\gamma_2} \vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma'_2 dt + \int_{\gamma_3} \vec{F}|_{\gamma_3} \cdot \gamma'_3 dt = \\ = \int_{-1}^1 (4t^3 + 4t) dt - \int_0^1 (8t^2 + 2t - 4) dt - \int_{-1}^0 (-8t^2 + 6t + 4) dt = 2.$$

1G) La superficie S è una porzione di paraboloido, ha una rappresentazione parametrica di classe $C^2(D)$, è regolare, ha normale $n = (2x, 2y, 1)$ per ogni $(x, y) \in D$. Risulta $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3y & 0 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = (-2y, -2x, -3) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Pertanto

$$\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot n \, dS = \iint_D (-2y, -2x, -3) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx dy = \iint_D (-8xy - 3) \, dx dy = \\ = - \int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} (8r^3 \sin t \cos t + 3r) \, dt = -\left(\frac{3\pi}{4} + 1\right).$$

La superficie S è orientabile e con bordo.

$$+Fr(D) = \{(t, 0) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\} \cup \{(0, t), 1 \geq t \geq 0\}$$

$$+BS = +\gamma_1 \cup +\gamma_2 \cup +\gamma_3$$

$$+\gamma_1 : \{(t, 0, 1-t^2) : 0 \leq t \leq 1\}, \quad \gamma'_1 = (1, 0, -2t);$$

$$+\gamma_2 : \{(\cos t, \sin t, 0), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}, \quad \gamma'_2 = (-\sin t, \cos t, 0);$$

$$+\gamma_3 : \{(0, t, 1-t^2), 1 \geq t \geq 0\}, \quad \gamma'_3 = (0, 1, -2t).$$

$$\vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma'_1 = (0, 0, t^2) \cdot (1, 0, -2t) = -2t^3$$

$$\vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma'_2 = (3 \sin t, 0, \cos^2 t - \sin^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = -3 \sin^2 t$$

$$\vec{F}|_{\gamma_3} \cdot \gamma'_3 = (3t, 0, -t^2) \cdot (0, 1, -2t) = 2t^3$$

$$\begin{aligned} \int_{+BS} 3y dx + (x^2 - y^2) dz &= \int_{\gamma_1} \vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma'_1 dt + \int_{\gamma_2} \vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma'_2 dt + \int_{\gamma_3} \vec{F}|_{\gamma_3} \cdot \gamma'_3 dt = \\ &= \int_0^1 -2t^3 dt + \int_0^{\pi/2} -3 \sin^2 t dt - \int_0^1 2t^3 dt = \\ &= -4 \int_0^1 t^3 dt - 3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= -1 - \frac{3}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\left(1 + \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

1H) La superficie S ha una rappresentazione parametrica di classe $C^2(D)$, è regolare, ha normale $n = (-2xy^2, -2x^2y, 1)$ per ogni $(x, y) \in D$. Risulta $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y + y^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, -2y - 1) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot n dS &= \iint_D (0, 0, -2y - 1) \cdot (-2xy^2, -2x^2y, 1) dx dy = \\ &= - \iint_D (2y + 1) dx dy = \\ &= - \int_0^1 r dr \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (2r \sin t + 1) dt = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

La superficie S è orientabile e con bordo.

$$+Fr(D) = \left\{ (\cos t, \sin t) : \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \right\} \cup \{(0, t) : -1 \leq t \leq 1\}$$

$$+BS = +\gamma_1 \cup +\gamma_2$$

$$+\gamma_1 := \left\{ (\cos t, \sin t, \cos^2 t \sin^2 t) : \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \right\},$$

$$\gamma_1' = (-\sin t, \cos t, 2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t));$$

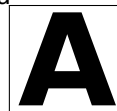
$$+\gamma_2 := \{(0, t, 0) : -1 \leq t \leq 1\}, \quad \gamma_2' = (0, 1, 0);$$

$$\vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma_1' = (\sin^2 t + \sin t, 1, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t)) =$$

$$= -\sin^3 t - \sin^2 t + \cos t + 2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t)$$

$$\vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma_2' = (t^2 + t, 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = 1$$

$$\begin{aligned} \int_{+BS} (y^2 + y) dx + dy + dz &= \int_{\gamma_1} \vec{F}|_{\gamma_1} \cdot \gamma_1' dt + \int_{\gamma_2} \vec{F}|_{\gamma_2} \cdot \gamma_2' dt = \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(-\sin^3 t - \sin^2 t + \cos t + \frac{1}{2} \sin 4t \right) dt + \int_{-1}^1 dt = \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\sin^2 t + \cos t) dt + 2 = \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = -2B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**I Esonero Marzo 2025**Civile Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi

1) Sia $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Rispondere alle seguenti domande:

- f è continua in $(0, 0)$

 V F

- $\nabla f(0, 0) = (\quad , \quad)$

- per la differenziabilità in $(0, 0)$ scrivere la formula di $\varepsilon(x, y) =$

- f è differenziabile in $(0, 0)$

 V F

- calcolare quando $v = (1, \sqrt{3})$
 $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = .$

2) Data la funzione $f(x, y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$, stabilire se i punti del tipo $(h, 0)$ con $h \in \mathbb{R}$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ sono critici e studiarne la natura.

3) Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = e^{x+y}$ nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 5\}$.

**I Esonero Marzo 2025**Civile Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi.

1) Sia $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Rispondere alle seguenti domande:

- f è continua in $(0, 0)$ V F
- $\nabla f(0, 0) = (\quad , \quad)$
- per la differenziabilità in $(0, 0)$ scrivere la formula di $\varepsilon(x, y) =$
- f è differenziabile in $(0, 0)$ V F
- calcolare quando $v = (\sqrt{3}, 1)$
 $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) =$

2) Data la funzione $f(x, y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$, stabilire se i punti del tipo $(0, k)$ con $k \in \mathbb{R}$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ sono critici e studiarne la natura.

3) Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = e^{x-y}$ nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 5\}$.

1A) Iniziamo con lo studiare la continuità di $f(x, y)$ in $(0, 0)$. Dobbiamo calcolare, se esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Passiamo a coordinate polari $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ e consideriamo il valore assoluto della funzione.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 |\cos^3 t + 3 \cos t \sin^2 t|}{r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \lim_{r \rightarrow 0} r |\cos^3 t + 3 \cos t \sin^2 t| \leq \lim_{r \rightarrow 0} 4r = 0,$$

uniformemente in t . Pertanto f è continua in $(0, 0)$.

Calcoliamo, se esiste, il gradiente nell'origine.

$$\forall h \neq 0 \quad \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{h^3}{h^3} = 1, \quad \forall k \neq 0 \quad \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0$$

$$\implies \nabla f(0, 0) = (1, 0)$$

Studiamo ora la differenziabilità. Se f è differenziabile in $(0, 0)$ allora deve risultare

$$f(x, y) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} = x + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

con $\varepsilon(x, y)$ infinitesima per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Passando di nuovo a coordinate polari, risulta

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^3 \cos t \sin^2 t}{r^2 \sqrt{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} 2 \cos t \sin^2 t = 2 \cos t \sin^2 t$$

dunque f non è differenziabile nell'origine. Ne consegue che per studiare la derivabilità direzionale nell'origine lungo la direzione u , dobbiamo utilizzare la definizione di derivata direzionale.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{\frac{1}{8}t^3 + \frac{9}{8}t^3}{t^2} = \frac{5}{4}.$$

In conclusione $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \frac{5}{4}$.

1B) Iniziamo con lo studiare la continuità di $f(x, y)$ in $(0, 0)$. Dobbiamo calcolare, se esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2}.$$

Passiamo a coordinate polari $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ e consideriamo il valore assoluto della funzione.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 |3 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t|}{r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \lim_{r \rightarrow 0} r |3 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t| \leq \lim_{r \rightarrow 0} 4r = 0,$$

uniformemente in t . Pertanto f è continua in $(0, 0)$.

Calcoliamo, se esiste, il gradiente nell'origine.

$$\forall h \neq 0 \quad \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad \forall k \neq 0 \quad \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = -\frac{k^3}{k^3} = -1$$

$$\implies \nabla f(0, 0) = (0, -1)$$

Studiamo ora la differenziabilità. Se f è differenziabile in $(0, 0)$ allora deve risultare

$$f(x, y) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} = -y + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varepsilon(x, y) = \frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

con $\varepsilon(x, y)$ infinitesima per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Passando di nuovo a coordinate polari, risulta

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{4r^3 \cos^2 t \sin t}{r^2 \sqrt{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} 4 \cos^2 t \sin t = 4 \cos^2 t \sin t$$

dunque f non è differenziabile nell'origine. Ne consegue che per studiare la derivabilità direzionale nell'origine lungo la direzione u , dobbiamo utilizzare la definizione di derivata direzionale.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{1}{2}t\right) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{\frac{9}{8}t^3 - \frac{1}{8}t^3}{t^2} = 1.$$

In conclusione $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = 1$.

2) La funzione $f(x, y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$ è di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Calcoliamo le derivate prime e vediamo se queste si annullano nei punti $(h, 0)$, $h \in \mathbb{R}$; $(0, k)$, $k \in \mathbb{R}$ e nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 \\ f'_y(x, y) = 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 \end{cases}$$

quindi essendo $f'_x(h, 0) = 0$, $f'_y(h, 0) = 0$; $f'_x(0, k) = 0$, $f'_y(0, k) = 0$ e $f'_x(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = 0$, $f'_y(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = 0$, i punti del tipo $(h, 0)$, $h \in \mathbb{R}$; $(0, k)$, $k \in \mathbb{R}$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ sono punti critici.

Andiamo ora a calcolare le derivate seconde per vedere se poter applicare il metodo dell'Hessiana:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix}$$

Nei punti $(h, 0)$, $h \in \mathbb{R}$, risulta $H_f(h, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2h^3 - 2h^4 \end{pmatrix}$ quindi $\det H_f(h, 0) =$

0 ; analogamente, nei punti $(0, k)$, $k \in \mathbb{R}$ risulta $H_f(0, k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ quindi $\det H_f(0, k) = 0$ e quindi occorre studiare questi punti critici con un altro metodo.

Essendo $f(h, 0) = f(0, k) = 0$, andiamo a studiare il segno di

$$f(x, y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3 = x^2y^2x[1 - x - y].$$

Poiché $x^2y^2 \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, andiamo a studiare il segno di $x[1 - x - y]$.

Andando a visualizzare direttamente nel grafico il segno, si deduce immediatamente che

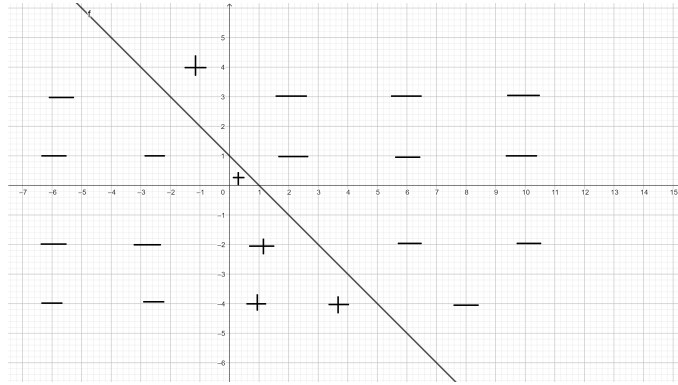


Figura 1: Grafico del segno della f

- i punti del tipo $(h, 0)$ per $h < 0 \vee h > 1$ sono punti di massimo relativo visto che è sempre possibile trovare un intorno di questi punti in cui la funzione è sempre negativa;
- se $0 < h < 1$, i punti del tipo $(h, 0)$ sono di minimo relativo, in quanto si riesce a trovare un intorno di questi punti in cui la funzione è sempre positiva;
- $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono punti sella visto che in ogni loro intorno ci sono sia punti in cui la funzione è positiva che punti in cui la funzione è negativa;
- I punti $(0, k)$ per $k \in \mathbb{R}$ sono punti sella visto che in ogni loro intorno ci sono sia punti in cui la funzione è positiva che punti in cui la funzione è negativa.

- Nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, invece risulta $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Quindi essendo $f''_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) < 0$ e $\det H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) > 0$ il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ è un punto di massimo relativo.

3A) L'insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ è un compatto, infatti è limitato: $A \subset [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \times [-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$ e posto $g(x, y) = x^2 + 4y^2$, $g(x, y)$ è continua e $A = g^{-1}(\{5\})$ e dunque è un chiuso in quanto controimmagine di un chiuso tramite un'applicazione conti-

nua.

La funzione f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti.

Posto $\phi(x, y) = x^2 + 4y^2 - 5$, osserviamo che $f, \phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, ed inoltre

$$(2) \quad Z_\phi \cap (\nabla\phi = (0, 0)) = \emptyset.$$

Cerchiamo allora i punti di massimo e minimo assoluti in A utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, visto che il vincolo è nella forma $\phi(x, y) = 0$.

Sia

$$F(x, y, a) = e^{x+y} + a(x^2 + 4y^2 - 5).$$

Per la (2) i punti di massimo e di minimo vincolato devono annullare ∇F :

$$\begin{cases} F'_x = e^{x+y} + 2ax = 0 \\ F'_y = e^{x+y} + 8ay = 0 \\ F'_a = x^2 + 4y^2 - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a(x - 4y) = 0 \\ e^{x+y} + 2ax = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Se $a = 0$ allora dalla seconda equazione otteniamo $e^{x+y} = 0$, e quindi nessuna soluzione.

Se $x - 4y = 0$ allora dalla terza equazione $4y^2 - 1 = 0$, da cui $y = \pm \frac{1}{2}$. Rimangono pertanto individuati i punti $(2, \frac{1}{2})$ e $(-2, -\frac{1}{2})$ che risulteranno per il teorema di Weierstrass i punti di massimo e di minimo assoluti cercati. Se calcoliamo i valori di f in questi punti osserviamo che $f(2, \frac{1}{2}) = e^{5/2}$ è il massimo assoluto, $f(-2, -\frac{1}{2}) = e^{-5/2}$ è il minimo assoluto.

Avremmo potuto risolvere il problema anche utilizzando il metodo dello Jacobiano:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 5 = 0 \\ \begin{vmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 2x & 8y \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 5 = 0 \\ 2e^{x+y}(x - 4y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4y \\ 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

e dunque si riottengono i punti trovati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Avremmo anche potuto risolvere l'esercizio esplicitando il vincolo in coordinate ellittiche: $x(t) = \sqrt{5} \cos t; y(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t, t \in [0, 2\pi]$.

Osservando poi che la funzione $f(x, y)$ è una composizione di funzioni e la funzione esponenziale è monotona crescente basterebbe determinare i punti di massimo e di minimo assoluti dell'esponente della funzione f : $G(t) := g(x(t), y(t)) = x(t) + y(t) = \sqrt{5}(\cos t + \frac{1}{2} \sin t)$ e dunque studiare il segno di $G'(t) = \sqrt{5}(-\sin t + \frac{1}{2} \cos t) \geq 0$.

Avremmo potuto infine risolvere il problema con le curve di livello della funzione $g(x, y) = x + y$ rispetto al vincolo $x^2 + 4y^2 = 5$. In questo caso dobbiamo determinare le rette del fascio $x + y = c$ che hanno intersezioni con $x^2 + 4y^2 = 5$.

$$\begin{cases} x + y = c \\ x^2 + 4y^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = c - y \\ 5y^2 - 2cy + c^2 - 5 = 0 \end{cases} \iff \frac{\Delta}{4} = 25 - 4c^2 \geq 0$$

E dunque si ottengono soluzioni per $c \in [-\frac{5}{2}, +\frac{5}{2}]$. I valori $x + y = \pm \frac{5}{2}$ saranno quelli che individueranno nel vincolo i punti di massimo e di minimo assoluto (sempre per Weierstrass).

3B) L'insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ è un compatto, infatti è limitato: $A \subset [-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}] \times [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ e posto $g(x, y) = 4x^2 + y^2$, $g(x, y)$ è continua e $A = g^{-1}(\{5\})$ e dunque è un chiuso in quanto controimmagine di un chiuso tramite un'applicazione continua.

La funzione f è continua, dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimi e minimi assoluti.

Posto $\phi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 5$, osserviamo che $f, \phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, ed inoltre

$$Z_\phi \cap (\nabla\phi = (0, 0)) = \emptyset.$$

Cerchiamo allora i punti di massimo e minimo assoluti in A utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Sia

$$F(x, y, a) = e^{x-y} + a(4x^2 + y^2 - 5).$$

Risulta:

$$\begin{cases} F'_x = e^{x-y} + 8ax = 0 \\ F'_y = -e^{x-y} + 2ay = 0 \\ F'_a = 4x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a(4x + y) = 0 \\ e^{x-y} + 8ax = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Se $a = 0$ allora dalla seconda equazione otteniamo $e^{x-y} = 0$, e quindi nessuna soluzione.

Se $4x + y = 0$ allora dalla terza equazione $4x^2 - 1 = 0$, da cui $x = \pm \frac{1}{2}$. Rimangono pertanto individuati i punti $(\frac{1}{2}, -2)$ e $(-\frac{1}{2}, 2)$. Per il teorema di Weierstrass essi saranno i punti di massimo e di minimo assoluti cercati. Se calcoliamo i valori di f in questi punti osserviamo che $f(\frac{1}{2}, -2) = e^{5/2}$ è il massimo assoluto, $f(-\frac{1}{2}, 2) = e^{-5/2}$ è il minimo assoluto.

Questo esercizio può essere risolto con il metodo dello Jacobiano, oppure per sostituzione o infine per via grafica con le linee di livello, analogamente all'esercizio 3A.

**II Esonero Aprile 2025**Civile

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi.

1) Dato il problema di Cauchy: $y''(x)+2y'(x)+y(x) = e^{-x}+\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, fornire i seguenti risultati:

- integrale generale equazione omogenea:
- soluzione particolare corrispondente al termine e^{-x} :
- soluzione particolare corrispondente al termine $\cos x$:
- integrale generale della equazione completa:
- valori c_1 e c_2 della soluzione del problema di Cauchy:

2) Sia E il cilindro $x^2+y^2 \leq 4$ compreso tra $z = 0$ e $z = 2$. Sapendo che la funzione densità è data da $f(x, y, z) = y^2 + z$, determinare

- $m(E) =$
- $x_G =$
- $y_G =$
- $z_G =$

- 3)** Determinare l'area della superficie laterale individuata dalla curva $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$ e da $z(x, y) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$.
-

**II Esonero Aprile 2025**Civile

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi.

1) Dato il problema di Cauchy: $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x + \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, fornire i seguenti risultati:

- integrale generale equazione omogenea:
- soluzione particolare corrispondente al termine e^x :
- soluzione particolare corrispondente al termine $\sin x$:
- integrale generale della equazione completa:
- valori c_1 e c_2 della soluzione del problema di Cauchy.

2) Sia E il cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ compreso tra $z = 0$ e $z = 2$. Sapendo che la funzione densità è data da $f(x, y, z) = x^2 + z$, determinare

- $m(E) =$
- $x_G =$
- $y_G =$

- $Z_G =$

3) Determinare l'area della superficie laterale individuata dalla curva $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ e da $z(x, y) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$.

**II Esonero Aprile 2025**Meccanica

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi.

2) Sia E il cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ compreso tra $z = 0$ e $z = 2$. Sapendo che la funzione densità è data da $f(x, y, z) = y^2 + z$, determinare

- $m(E) =$

- $x_G =$

- $y_G =$

- $z_G =$

3) Determinare l'area della superficie laterale individuata dalla curva $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$ e da $z(x, y) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$.

4) Calcolare in due modi diversi

$$\int_{\gamma} 2x \ln(1 + y^2) dx + (e^x + y^2) dy$$

quando γ è la curva che delimita il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

**II Esonero Aprile 2025**Meccanica

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi.

2) Sia E il cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ compreso tra $z = 0$ e $z = 2$. Sapendo che la funzione densità è data da $f(x, y, z) = x^2 + z$, determinare

- $m(E) =$

- $x_G =$

- $y_G =$

- $z_G =$

3) Determinare l'area della superficie laterale individuata dalla curva $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ e da $z(x, y) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$.

4) Calcolare in due modi diversi

$$\int_{\gamma} 2x \ln(1 + y^2) dx + (e^x + y^2) dy$$

quando γ è la curva che delimita il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

A1) L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $z^2 + 2z + 1 = 0$ che ammette come soluzioni $z = -1$ con molteplicità 2. L'integrale generale della equazione omogenea è pertanto $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare di $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$. Siccome -1 è soluzione della equazione caratteristica con molteplicità 2 cercheremo una soluzione della forma $y_1(x) = ax^2 e^{-x}$. Derivando due volte e sostituendo si ottiene: $y_1(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$.

Una soluzione di $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \cos x$ ha invece la forma $y_2(x) = a \sin x + b \cos x$. Derivando due volte e sostituendo si ottiene: $y_2(x) = \frac{1}{2} \sin x$. Pertanto l'integrale generale della equazione completa è

$$c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x.$$

Imponendo il dato iniziale si ottiene $c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2}$.

B1) L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $z^2 - 2z + 1 = 0$ che ammette come soluzioni $z = 1$ con molteplicità 2. L'integrale generale della equazione omogenea è pertanto $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare di $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x$. Siccome 1 è soluzione della equazione caratteristica con molteplicità 2 cercheremo una soluzione della forma $y_1(x) = ax^2 e^x$. Derivando due volte e sostituendo si ottiene: $y_1(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x$.

Una soluzione di $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \sin x$ ha invece la forma $y_2(x) = a \sin x + b \cos x$. Derivando due volte e sostituendo si ottiene: $y_2(x) = \frac{1}{2} \cos x$. Pertanto l'integrale generale della equazione completa è

$$c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + \frac{1}{2} \cos x.$$

Imponendo il dato iniziale si ottiene $c_1 = \frac{1}{2} = -c_2$.

A2) L'insieme $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z \in [0, 2]\}$ si può scrivere in coordinate cilindriche nella forma

$$F := \{(r, t, z) : r \in [0, 2], t \in [0, 2\pi], z \in [0, 2]\} = [0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2].$$

Avremo

$$\begin{aligned}
 m(E) &= \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 (r^2 \sin^2 t + z) dz = \\
 &= \int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \int_0^2 dz + \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 z dz = \\
 &= 8\pi + 8\pi = 16\pi. \\
 x_G &= \frac{1}{16\pi} \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 r \cos t (r^2 \sin^2 t + z) dz = \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left(\int_0^2 r^4 dr \int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t dt \int_0^2 dz + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos t dt \int_0^2 z dz \right) = 0 \\
 y_G &= \frac{1}{16\pi} \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 r \sin t (r^2 \sin^2 t + z) dz = \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left(\int_0^2 r^4 dr \int_0^{2\pi} \sin^3 t dt \int_0^2 dz + \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin t dt \int_0^2 z dz \right) = 0 \\
 z_G &= \frac{1}{16\pi} \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 z (r^2 \sin^2 t + z) dz = \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left(\int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \int_0^2 z dz + \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 z^2 dz \right) = \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left(8\pi + \frac{32}{3}\pi \right) = \frac{7}{6}.
 \end{aligned}$$

B2) L'insieme $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z \in [0, 2]\}$ si può scrivere in coordinate cilindriche nella forma

$$F := \{(r, t, z) : r \in [0, 2], t \in [0, 2\pi], z \in [0, 2]\} = [0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2].$$

Avremo

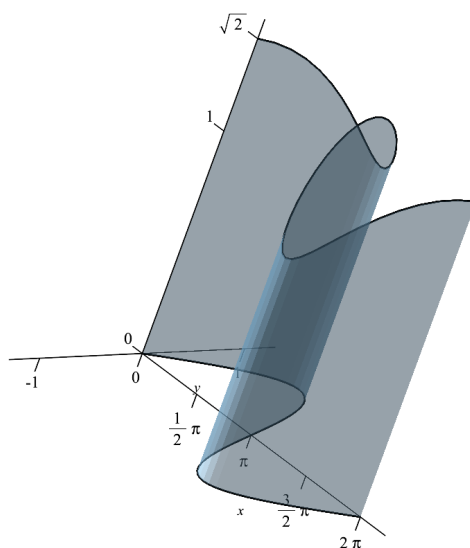
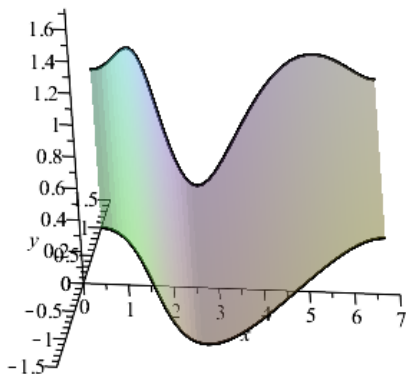
$$\begin{aligned}
 m(E) &= \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 (r^2 \cos^2 t + z) dz = \\
 &= \int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \int_0^2 dz + \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 z dz = \\
 &= 8\pi + 8\pi = 16\pi. \\
 x_G &= \frac{1}{16\pi} \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 r \cos t (r^2 \cos^2 t + z) dz = \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left(\int_0^2 r^4 dr \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt \int_0^2 dz + \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos t dt \int_0^2 z dz \right) = 0 \\
 y_G &= \frac{1}{16\pi} \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 r \sin t (r^2 \cos^2 t + z) dz = \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left(\int_0^2 r^4 dr \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt \int_0^2 dz + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin t dt \int_0^2 z dz \right) = 0 \\
 z_G &= \frac{1}{16\pi} \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 z (r^2 \cos^2 t + z) dz = \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left(\int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \int_0^2 z dz + \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} dt \int_0^2 z^2 dz \right) = \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left(8\pi + \frac{32}{3}\pi \right) = \frac{7}{6}.
 \end{aligned}$$

A3) f è continua e non negativa su tutto \mathbb{R}^2 ; la curva \mathcal{C} può essere parametrizzata con $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$. \mathcal{C} è regolare e $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sqrt{1 + \sin^2 t} dt$. Pertanto

$$\begin{aligned}
 \text{area} &= \int_{\mathcal{C}} f ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} \cdot \sqrt{1 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t) dt = \\
 &= 2\pi + \pi = 3\pi.
 \end{aligned}$$

B3) f è continua e non negativa su tutto \mathbb{R}^2 ; la curva \mathcal{C} può essere parametrizzata con $x(t) = t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. \mathcal{C} è regolare e

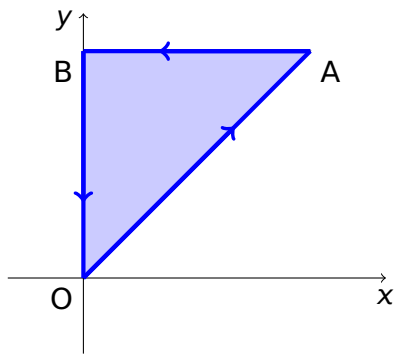
$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sqrt{1 + \cos^2 t} dt.$$



Pertanto

$$\begin{aligned} \text{area} &= \int_{\mathcal{C}} f ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t} \cdot \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t) dt = \\ &= 2\pi + \pi = 3\pi. \end{aligned}$$

A4) Sia $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$. T è un dominio regolare rispetto all'asse x e la curva γ , percorsa in verso antiorario, è $+\text{Fr}(T)$.



- $O = (0, 0)$, $A = (1, 1)$, $B = (0, 1)$.
- Il segmento OA è parametrizzato da: $x(t) = t$, $y(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$
- il segmento AB è parametrizzato da: $x(t) = t$, $y(t) = 1$, $1 \geq t \geq 0$;
- il segmento BO è parametrizzato da:

$$x(t) = 0, y(t) = t, 1 \geq t \geq 0.$$

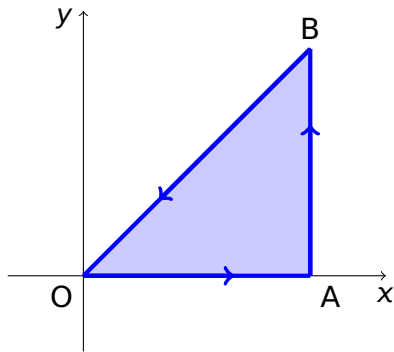
Possiamo calcolare l'integrale sia direttamente che facendo uso delle formule di Green

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} 2x \ln(1+y^2) dx + (e^x + y^2) dy = \int_{OA} 2x \ln(1+y^2) dx + (e^x + y^2) dy + \\ &+ \int_{AB} 2x \ln(1+y^2) dx + (e^x + y^2) dy + \int_{BO} 2x \ln(1+y^2) dx + (e^x + y^2) dy = \\ &= \int_0^1 [2t \ln(1+t^2) + (e^t + t^2)] dt - 2 \ln 2 \int_0^1 t dt - \int_0^1 (1+t^2) dt = \\ &= \int_0^1 2t \ln(1+t^2) dt - \ln 2 + \int_0^1 [e^t + t^2 - 1 - t^2] dt = \\ &= \int_0^1 \ln(1+t^2) d(1+t^2) - \ln 2 + e - 2 = \\ &= -1 + \ln 4 - \ln 2 + e - 2 = \ln 2 + e - 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_T \left[-2x \frac{\partial}{\partial y} \ln(1+y^2) + \frac{\partial}{\partial x} (e^x + y^2) \right] dx dy = \\ &= - \int_0^1 2x dx \int_x^1 \frac{\partial}{\partial y} \ln(1+y^2) dy + \int_0^1 e^x dx \int_x^1 dy = \\ &= - \int_0^1 2x [\ln(1+y^2)]_{y=x}^{y=1} dx + \int_0^1 (1-x) e^x dx = \\ &= -\ln 2 + \int_0^1 2x \ln(1+x^2) dx + 2[e^x]_0^1 - [xe^x]_0^1 = \\ &= \ln 2 + e - 3. \end{aligned}$$

B4) Sia $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. T è un dominio regolare rispetto

all'asse x e la curva γ , percorsa in verso antiorario, è $+Fr(T)$.



- $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$.
- Il segmento OA è parametrizzato da: $x(t) = t$, $y(t) = 0$, $0 \leq t \leq 1$;
- il segmento AB è parametrizzato da: $x(t) = 1$, $y(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$;
- il segmento BO è parametrizzato da: $x(t) = t$, $y(t) = t$, $1 \geq t \geq 0$.

Possiamo calcolare l'integrale sia direttamente che facendo uso delle formule di Green

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\gamma} 2x \ln(1+y^2) dx + (e^x + y^2) dy = \int_{OA} 2x \ln(1+y^2) dx + (e^x + y^2) dy + \\
 &+ \int_{AB} 2x \ln(1+y^2) dx + (e^x + y^2) dy + \int_{BO} 2x \ln(1+y^2) dx + (e^x + y^2) dy = \\
 &= \int_0^1 0 dt + \int_0^1 (e+t^2) dt - \int_0^1 2t \ln(1+t^2) dt - \int_0^1 (e^t + t^2) dt = \\
 &= 1 - \int_0^1 \ln(1+t^2) d(1+t^2) = 1 + 1 - \ln 4 = 2 - 2 \ln 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_T \left[-\frac{\partial}{\partial y} 2x \ln(1+y^2) + \frac{\partial}{\partial x} (e^x + y^2) \right] dx dy = \\
 &= - \int_0^1 2x dx \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \ln(1+y^2) dy + \int_0^1 e^x dx \int_0^x dy = \\
 &= - \int_0^1 2x [\ln(1+y^2)]_{y=0}^{y=x} dx + \int_0^1 x e^x dx = \\
 &= - \int_0^1 2x \ln(1+x^2) dx + [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = \\
 &= 1 - \ln 4 + e - e + 1 = 2 - 2 \ln 2.
 \end{aligned}$$



III Esonero - Maggio 2025

Civile Meccanica

iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi.

1) Sia S la superficie ottenuta da una rotazione di 180° , intorno all'asse z , del segmento $z = 2 - x$, $x \in [1, 2]$. Sia n la normale alla superficie S in modo che la terza componente risulti positiva. Sia $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, z)$.

- Determinare l'equazione della superficie generata:

$$r(t, u) := \begin{cases} x(t, u) = \\ y(t, u) = \\ z(t, u) = \end{cases} \quad (t, u) \in$$

- disegnare la superficie S a pagina successiva;
- calcolare il vettore (L, M, N) in modo che N sia positivo

$$(L, M, N) = (\quad , \quad , \quad);$$

- calcolare il flusso di F attraverso S

$$\text{flusso} =$$

(svolgere i conti)

- il campo F è conservativo?

V F

Motivare la risposta a pagina successiva.

- scrivere a pagina successiva le equazioni del bordo di S con il loro verso di percorrenza: $+\partial S$
- calcolare $\int_{+\partial S} F \cdot \tau ds$, quando τ è la tangente a $+\partial S$.

$$\int_{+\partial S} F \cdot \tau ds =$$



III Esonero - Maggio 2025

Civile

Meccanica

iscritto al primo anno di corso SI NO

BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere il seguente esercizio motivando i passaggi.

1) Sia S la superficie ottenuta da una rotazione di 180° intorno all'asse y del segmento $y = 2 - x$, $x \in [1, 2]$. Sia n la normale alla superficie S in modo che la terza componente risulti positiva. Sia $F(x, y, z) = (xz^2, y, x^2z)$.

- Determinare l'equazione della superficie generata

$$r(t, u) := \begin{cases} x(t, u) = \\ y(t, u) = \\ z(t, u) = \end{cases} \quad (t, u) \in$$

- disegnare la superficie S a pagina successiva;
- calcolare il vettore (L, M, N) in modo che N sia positivo

$$(L, M, N) = (\quad , \quad , \quad);$$

- calcolare il flusso di F attraverso S

flusso =

(svolgere i conti)

- il campo F è conservativo?

V F

Motivare la risposta a pagina successiva.

- scrivere a pagina successiva le equazioni del bordo di S con il loro verso di percorrenza: $+\partial S$
- calcolare $\int_{+\partial S} F \cdot \tau ds$, quando τ è la tangente a $+\partial S$.

$$\int_{+\partial S} F \cdot \tau ds =$$

A) La curva regolare $z = 2 - x$, $x \in [1, 2]$ che si trova nel piano xz genera, per rotazione di 180° intorno all'asse z , una porzione di tronco di cono di equazione:

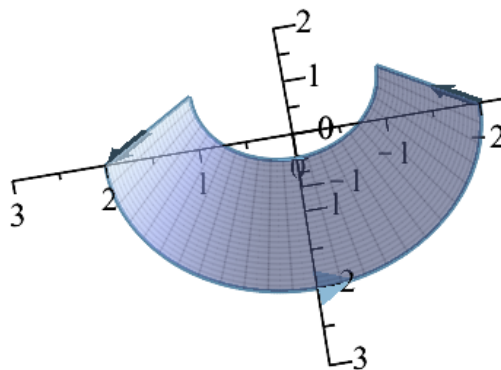
$$r(t, u) := \begin{cases} x(t, u) = t \cos u \\ y(t, u) = t \sin u \\ z(t, u) = 2 - t \end{cases} \quad (t, u) \in [1, 2] \times [0, \pi] = D$$

Si tratta di una superficie di classe $C^1(D)$ che ha normale

$$n := (L, M, N) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos u & \sin u & -1 \\ -t \sin u & t \cos u & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot t \cos u + \vec{j} \cdot t \sin u + \vec{k} \cdot t$$

$$L = t \cos u, \quad M = t \sin u, \quad N = t \in [1, 2].$$

Pertanto la terza componente del vettore normale è sempre positiva.



Per calcolare il flusso del campo $F = (xy^2, x^2y, z)$ lungo la superficie S nella direzione della normale n dobbiamo calcolare l'integrale superficiale $\int_S F \cdot n dS$. Visto che poi l'integrale è in dS non è necessario normalizzare il vettore n , basta poi integrare in $dt du$.

$$\begin{aligned} F|_S &= (t^3 \sin^2 u \cos u, t^3 \sin u \cos^2 u, 2 - t) \\ F|_S \cdot n &= (t^3 \sin^2 u \cos u, t^3 \sin u \cos^2 u, 2 - t) \cdot (t \cos u, t \sin u, t) \\ &= t^4 \sin^2 u \cos^2 u + t^4 \sin^2 u \cos^2 u + 2t - t^2 = \\ &= 2t^4 \sin^2 u \cos^2 u + 2t - t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_S F \cdot ndS &= \int_1^2 dt \int_0^\pi (2t^4 \sin^2 u \cos^2 u + 2t - t^2) du = \\ &= \int_1^2 t^4 dt \int_0^{\pi/2} \sin^2 2u du + \pi \int_1^2 (2t - t^2) dt =\end{aligned}$$

Ricordando che

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2u du &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 v dv = \int_0^{\pi/2} \sin^2 v dv = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin v (-\cos v)' dv \\ &= [-\sin v \cos v]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 v dv = \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \sin^2 v dv \implies \\ \int_0^\pi \sin^2 v dv &= \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

si ottiene:

$$\int_S F \cdot ndS = \frac{\pi}{4} \int_1^2 t^4 dt + \frac{2}{3} \pi = \frac{31}{20} \pi + \frac{2}{3} \pi = \frac{133}{60} \pi.$$

Il campo di forze $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, z)$, $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ inoltre il suo rotore $\nabla \times F = (0, 0, 0)$, dunque è irrotazionale. Siccome \mathbb{R}^3 è semplicemente connesso allora F è conservativo.

La superficie S prima individuata è sicuramente di classe $C^2([1, 2] \times [0, \pi])$, orientata, regolare. Determiniamo ora il bordo di S . $+\partial S = r(+Fr([1, 2] \times [0, \pi]))$ e con bordo le cui equazioni sono individuate da:

- $(t, 0)$, $1 \leq t \leq 2 \rightarrow \gamma_1 = \{(t, 0, 2-t), 1 \leq t \leq 2\}$;
- $(2, u)$, $0 \leq u \leq \pi \rightarrow \gamma_2 = \{(2 \cos u, 2 \sin u, 0), 0 \leq u \leq \pi\}$;
- (t, π) , $2 \geq t \geq 1 \rightarrow \gamma_3 = \{(-t, 0, 2-t), 2 \geq t \geq 1\}$;
- $(1, u)$, $\pi \geq u \geq 0 \rightarrow \gamma_4 = \{(\cos u, \sin u, 1), \pi \geq u \geq 0\}$.

In effetti il bordo della superficie è proprio quello indicato nella figura precedente e il verso indicato nella figura è proprio quello positivo per il ∂S . Per

calcolare $\int_{+\partial S} F \cdot \tau ds$ è allora possibile applicare il teorema di Stokes. Siccome il campo F è irrotazionale tale integrale è nullo.

B) La curva regolare $y = 2 - x$, $x \in [1, 2]$ che si trova nel piano xy genera, per rotazione di 180° intorno all'asse y , una porzione di tronco di cono di equazione:

$$r(t, u) := \begin{cases} x(t, u) = t \cos u \\ y(t, u) = 2 - t \\ z(t, u) = t \sin u \end{cases} \quad (t, u) \in [1, 2] \times [0, \pi] = D$$

Si tratta di una superficie di classe $C^1(D)$ che ha normale

$$n := (L, M, N) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos u & -1 & \sin u \\ -t \sin u & 0 & t \cos u \end{vmatrix} = -\vec{i} \cdot t \cos u - \vec{j} \cdot t - \vec{k} \cdot \sin u$$

$$L = -t \cos u, \quad M = -t, \quad N = -t \sin u \in [1, 2] \times [0, \pi].$$

Pertanto, per rendere la terza componente del vettore normale positiva dobbiamo considerare

$$n = (t \cos u, t, t \sin u).$$

Il grafico della superficie S è esattamente quello dell'esercizio A, basta considerare come asse verso l'alto l'asse y .

Per calcolare il flusso del campo $F = (xz^2, y, x^2z)$ lungo la superficie S nella direzione della normale n dobbiamo calcolare l'integrale superficiale $\int_S F \cdot n dS$. Visto che poi l'integrale è in dS non è necessario normalizzare il vettore n , basta poi integrare in $dt du$.

$$F|_S = (t^3 \sin^2 u \cos u, 2 - t, t^3 \sin u \cos^2 u)$$

$$F|_S \cdot n = (t^3 \sin^2 u \cos u, 2 - t, t^3 \sin u \cos^2 u) \cdot (t \cos u, t, t \sin u)$$

$$= t^4 \sin^2 u \cos^2 u + t^4 \sin^2 u \cos^2 u + 2t - t^2 =$$

$$= 2t^4 \sin^2 u \cos^2 u + 2t - t^2$$

$$\int_S F \cdot n dS = \frac{31}{20} \pi + \frac{2}{3} \pi. \quad (\text{vedi esercizio A})$$

Il campo di forze $F(x, y, z) = (xz^2, y, x^2z)$, $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ inoltre il suo rotore $\nabla \times F = (0, 0, 0)$, dunque è irrotazionale. Siccome \mathbb{R}^3 è semplicemente connesso allora F è conservativo.

La superficie S prima individuata è sicuramente di classe $C^2([1, 2] \times [0, \pi])$, orientata, regolare. Determiniamo ora il bordo di S . $+\partial S = r(+Fr([1, 2] \times [0, \pi]))$ e con bordo le cui equazioni sono individuate da:

- $(t, 0), 1 \leq t \leq 2 \rightarrow \gamma_1 = \{(t, 2-t, 0), 1 \leq t \leq 2\}$;
- $(2, u), 0 \leq u \leq \pi \rightarrow \gamma_2 = \{(2 \cos u, 0, 2 \sin u), 0 \leq u \leq \pi\}$;
- $(t, \pi), 2 \geq t \geq 1 \rightarrow \gamma_3 = \{(-t, 2-t, 0), 2 \geq t \geq 1\}$;
- $(1, u), \pi \geq u \geq 0 \rightarrow \gamma_4 = \{(\cos u, 1, \sin u), \pi \geq u \geq 0\}$.

In effetti il bordo della superficie è proprio quello indicato nella figura precedente e il verso indicato nella figura è proprio quello positivo per il ∂S . Per calcolare $\int_{+\partial S} F \cdot \tau ds$ è allora possibile applicare il teorema di Stokes. Siccome il campo F è irrotazionale tale integrale è nullo.

**Esonero 7 Novembre 2025**iscritto al secondo anno di corso SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

1) Sia $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = (1 + 2x)e^{-x}$. Dire se f è integrabile in senso generalizzato nella semiretta $[0, \infty[$ e, in caso affermativo, calcolarne l'integrale.

2) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto \mathbb{R} la funzione $g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + \pi x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi x & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

e siano a_n, b_n per ogni $n \geq 1$ i suoi coefficienti di Eulero Fourier. Determinare

A che tipo di punto è il punto $x = 0$ per g ? (spiegare)

B scrivere quanto vale $b_{2n} =$

C la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$

3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (2x - 1)|2y - 1|e^{x+y}$.

A Il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un punto di derivabilità, differenziabilità per f ?

B Determinare la natura del punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e dei punti $(x, \frac{1}{2})$, con $x \in \mathbb{R}$.

**Esonero 7 Novembre 2025**iscritto al secondo anno di corso SI NOBES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

1) Sia $f : [1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$. Dire se f è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[1, 2]$ e, in caso affermativo, calcolarne l'integrale.

2) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto \mathbb{R} la funzione $g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + \pi x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi x & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

e siano a_n, b_n per ogni $n \geq 1$ i suoi coefficienti di Eulero Fourier. Determinare

A che tipo di punto è il punto $x = 0$ per g ? (spiegare)

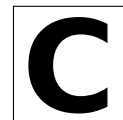
B scrivere quanto vale $a_{2n} =$

C la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$

3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (2x - 1)|2y - 1|e^{x+y}$.

A Il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un punto di derivabilità, differenziabilità per f ?

B Determinare la natura del punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e dei punti $(x, \frac{1}{2})$, con $x \in \mathbb{R}$.



Esonero 7 Novembre 2025

iscritto al secondo anno di corso SI NO

BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

1) Sia $f : [2, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = \frac{9}{(1-3x)^4}$. Dire se f è integrabile in senso generalizzato nella semiretta $[2, \infty[$ e, in caso affermativo, calcolarne l'integrale.

2) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto \mathbb{R} la funzione $g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + \pi x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi x & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

e siano a_n, b_n per ogni $n \geq 1$ i suoi coefficienti di Eulero Fourier. Determinare

A che tipo di punto è il punto $x = 0$ per g ? (spiegare)

B scrivere quanto vale $b_{2n+1} =$

C la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$

3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (2y - 1)|2x - 1|e^{x+y}$.

A Il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un punto di derivabilità, differenziabilità per f ?

B Determinare la natura del punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e dei punti $(\frac{1}{2}, y)$, con $y \in \mathbb{R}$.



Esonero 7 Novembre 2025

iscritto al secondo anno di corso SI NO

BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

1) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = \frac{6x^3}{(x^4 + 1)^2}$. Dire se f è integrabile in senso generalizzato su \mathbb{R} e, in caso affermativo, calcolarne l'integrale.

2) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto \mathbb{R} la funzione $g : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + \pi x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi x & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

e siano a_n, b_n per ogni $n \geq 1$ i suoi coefficienti di Eulero Fourier. Determinare

A che tipo di punto è il punto $x = 0$ per g ? (spiegare)

B scrivere quanto vale $a_{2n+1} =$

C la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$

3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (2y - 1)|2x - 1|e^{x+y}$.

A Il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un punto di derivabilità, differenziabilità per f ?

B Determinare la natura del punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e dei punti $(\frac{1}{2}, y)$, con $y \in \mathbb{R}$.

Cenni di svolgimento

A1) Per ogni $t > 0$ risulta $f \in C([0, t])$ e dunque la funzione f è localmente integrabile. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1/x^2} = 0.$$

Pertanto in $[1, \infty[$ f è integrabile per il confronto asintotico; in $[0, 1]$ è Riemann integrabile perché è continua. Calcoliamo $\int_0^t f(x) dx$ e poi passiamo al limite $t \rightarrow \infty$. Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^t (1+2x)[-e^{-x}]' dx &= \left[-(1+2x)e^{-x} \right]_0^t + 2 \int_0^t e^{-x} dx = \\ &= \left[-(3+2x)e^{-x} \right]_0^t = -(3+2t)e^{-t} + 3 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (1+2x)e^{-x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} 3 - \frac{3+2t}{e^t} = 3. \end{aligned}$$

B1) Per ogni $t \in [1, 2[$ la funzione $f \in C([1, t])$, è di segno costante ed è un infinito, per $t \rightarrow 2^-$, lento (di ordine $1/3$ rispetto all'infinito principale ($1/(2-x)$))

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x}{\sqrt[3]{x+2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = -\infty.$$

Pertanto f è integrabile nell'intervallo $[1, 2]$. Integrando per sostituzione $x^2 - 4 = v$.

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2-4}} dx &= \left[3(x^2-4)^{2/3} \right]_1^t \\ \int_1^2 \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2-4}} dx &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(3(t^2-4)^{2/3} - 3^{5/3} \right) = -3^{5/3}. \end{aligned}$$

C1) La funzione $f(x) = \frac{9}{(1-3x)^4}$ è continua in tutto $[2, \infty[$ ed è dunque ivi localmente integrabile. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{(1-3x)^4} = 0$$

è un infinitesimo veloce (di ordine 4 rispetto all'infinitesimo principale $1/x$) pertanto la funzione è integrabile in senso generalizzato.

$$\int_2^t \frac{9}{(1-3x)^4} dx = \int_2^t 9(1-3x)^{-4} dx = \left[\frac{1}{(1-3x)^3} \right]_2^t$$

$$\int_2^\infty \frac{9}{(1-3x)^4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-3x)^3} + \frac{1}{125} = \frac{1}{125}.$$

D1) La funzione $f(x) = \frac{6x^3}{(x^4 + 1)^2}$ è continua su tutto \mathbb{R} , quindi è localmente integrabile in ogni intervallo del tipo $[a, 0], [0, b]$ con $a < 0 < b$. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^3}{(x^4 + 1)^2} = 0,$$

cioè a $\pm\infty$ la funzione f è un infinitesimo di ordine 5 rispetto all'infinitesimo principale $1/x$, quando $x \rightarrow \pm\infty$ (quindi possiamo supporre $|x| \geq 1$). Allora, f è integrabile per il confronto asintotico e possiamo scrivere

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^{\infty} f(x) dx =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx \in \mathbb{R}.$$

Visto che l'integrale esiste possiamo calcolarlo facilmente come

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

Poiché f è dispari $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ per ogni $a > 0$ e dunque il valore dell'integrale generalizzato è 0.

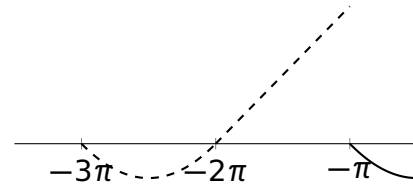
Se avessimo voluto calcolarlo direttamente la classe delle primitive di f è

$$P(x) := -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^4 + 1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2A) g è una funzione continua in $(-\pi, \pi)$ e quindi è continua in $x = 0$, ed è ivi derivabile, infatti

$$g'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) + g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x}{x} = \pi$$

$$g'_s(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) + g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \pi x}{x} = \pi.$$



Questo è il grafico della funzione prolungata f con periodicità 2π .

2B) La funzione f è sviluppabile in serie di Fourier. Per calcolare i suoi coefficienti di Eulero Fourier divideremo gli integrali nei due intervalli in cui è definita la legge di g .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (x^2 + \pi x) dx + \int_0^{\pi} \pi x dx \right).$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 (x^2 + \pi x) dx + \int_0^{\pi} \pi x dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + \frac{\pi^3}{2} \\ &= - \left(-\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{2} \right) + \frac{\pi^3}{2} = -\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi^3}{2}. \\ \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx &= \frac{\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (x^2 + \pi x) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \pi x \cos(nx) dx \right).$$

$I_1 = \int_{-\pi}^0 x^2 \cos(nx) dx$. Integrando per parti due volte si ottiene:

$$\int x^2 \cos(nx) dx = \frac{x^2}{n} \sin(nx) + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx) + C.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{x^2}{n} \sin(nx) + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx) \right]_{-\pi}^0 = \\ &= 0 - \left(\frac{2(-\pi)}{n^2} \cos(-n\pi) \right) = \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^0 \pi x \cos(nx) dx = \pi \int_{-\pi}^0 x \cos(nx) dx.$$

Una primitiva per $\int x \cos(nx) dx$ è

$$\int x \cos(nx) dx = \frac{x}{n} \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) + C.$$

Quindi

$$I_2 = \pi \int_{-\pi}^0 x \cos(nx) dx = \frac{\pi}{n^2} (1 - (-1)^n) = \pi \frac{1 - (-1)^n}{n^2}.$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} \pi x \cos(nx) dx = \pi \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = -I_2 \text{ perché la funzione integranda è dispari.}$$

Sommiamo i tre contributi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 = \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n.$$

Dividendo per π otteniamo

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Analogamente

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (x^2 + \pi x) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} \pi x \sin(nx) dx \right).$$

$$K_1 = \int_{-\pi}^0 x^2 \sin(nx) dx. \text{ Una primitiva è}$$

$$\int x^2 \sin(nx) dx = -\frac{x^2}{n} \cos(nx) + \frac{2x}{n^2} \sin(nx) + \frac{2}{n^3} \cos(nx) + C.$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \left[-\frac{x^2}{n} \cos(nx) + \frac{2x}{n^2} \sin(nx) + \frac{2}{n^3} \cos(nx) \right]_{-\pi}^0 \\ &= \frac{2}{n^3} - (-1)^n \left(-\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} \right) = \frac{\pi^2}{n} (-1)^n + \frac{2}{n^3} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

$$K_2 = \int_{-\pi}^0 \pi x \sin(nx) dx = \pi \int_{-\pi}^0 x \sin(nx) dx.$$

$$\int x \sin(nx) dx = -\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) + C,$$

da cui

$$\int_{-\pi}^0 x \sin(nx) dx = -\frac{\pi}{n}(-1)^n.$$

Quindi

$$K_2 = -\frac{\pi^2}{n}(-1)^n.$$

$$K_3 = \int_0^{\pi} \pi x \sin(nx) dx = \pi \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx.$$

Con la stessa primitiva si trova

$$K_3 = -\frac{\pi^2}{n}(-1)^n.$$

Sommiamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = K_1 + K_2 + K_3 = \frac{\pi^2}{n}(-1)^n + \frac{2}{n^3}(1 - (-1)^n) - 2\frac{\pi^2}{n}(-1)^n.$$

Da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = -\frac{\pi^2}{n}(-1)^n + \frac{2}{n^3}(1 - (-1)^n).$$

Dividendo per π otteniamo

$$b_n = -\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{2}{\pi n^3}(1 - (-1)^n).$$

- se n è pari, $(-1)^n = 1$ e $1 - (-1)^n = 0$, quindi

$$b_{2n} = -\frac{\pi}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- se n è dispari, $(-1)^n = -1$ e $1 - (-1)^n = 2$, quindi

$$b_{2n+1} = \frac{\pi}{2n+1} + \frac{4}{\pi(2n+1)^3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2C) Per determinare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ utilizziamo l'identità di Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) dx &= \int_{-\pi}^0 (x^2 + \pi x)^2 dx + \int_0^{\pi} (\pi x)^2 dx = \\ &= \int_{-\pi}^0 (x^4 + 2\pi x^3 + \pi^2 x^2) dx + \frac{\pi^5}{3} = \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{\pi x^4}{2} + \frac{\pi^2 x^3}{3} \right]_{-\pi}^0 + \frac{\pi^5}{3} = \frac{11\pi^5}{30}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{11}{30}\pi^4 - \frac{\pi^4}{18} = \frac{14}{45}\pi^4.$$

3A) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (2x - 1)|2y - 1|e^{x+y}$ è continua in tutto \mathbb{R}^2 perché prodotto e composizione di funzioni continue. Per quanto riguarda la derivabilità parziale risulta:

$$f'_x(x, y) = |2y - 1|e^{x+y}(2x + 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mentre per la derivata parziale rispetto a y osserviamo che

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x - 1)(2y - 1)e^{x+y}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq \frac{1}{2}, \\ (2x - 1)(1 - 2y)e^{x+y}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, y < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pertanto

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} (2x - 1)e^{x+y}(2y + 1), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, y > \frac{1}{2}, \\ (2x - 1)e^{x+y}(-2y - 1), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, y < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Per i punti $(x, \frac{1}{2})$, $x \in \mathbb{R}$, considerato il cambio di legge, bisogna utilizzare la definizione e calcolare il limite del rapporto incrementale.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x, \frac{1}{2} + k) - f(x, \frac{1}{2})}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0^{\pm}} \frac{2(2x - 1)|k|}{k} e^{x+k+\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0^{\pm}} 2(2x - 1)e^{x+k+\frac{1}{2}} \text{segno}(k) \\ &= \begin{cases} 2(2x - 1)e^{x+\frac{1}{2}} & k \rightarrow 0^+, \\ -2(2x - 1)e^{x+\frac{1}{2}} & k \rightarrow 0^-. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $\exists f'_y(x, \frac{1}{2}) = 0$ se e solo se $x = \frac{1}{2}$, mentre $f(x, y)$ non ammette gradiente, e quindi non è differenziabile, nei punti $(x, \frac{1}{2})$, $x \neq \frac{1}{2}$. In conclusione $\nabla f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, \frac{1}{2}), x \neq \frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ed in particolare $\nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (0, 0)$.

Sicuramente $f(x, y)$ è differenziabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{1}{2}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{2}\}$ in quanto ivi di classe C^1 . Studiamo ora la differenziabilità nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Risulta

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(\frac{1}{2} + h, \frac{1}{2} + k) - f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{4h|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} e^{h+k+1} =: \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k). \end{aligned}$$

Usando la caratterizzazione del limite con le coordinate polari si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} 4 \cdot e \cdot r \cos t |\sin t| e^{r(\cos t + \sin t)} = 0;$$

il limite poi è uniforme rispetto a t in quanto si ha

$$|\varepsilon(r \cos t, r \sin t)| = 4 \cdot e \cdot r |\cos t| |\sin t| e^{r(\cos t + \sin t)} \leq 4 \cdot e \cdot r \cdot e^{\sqrt{2}r} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0.$$

Dunque $f(x, y)$ è differenziabile in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $z = 0$ è l'equazione del piano tangente.

Dallo studio della derivabilità parziale il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è risultato punto critico per $f(x, y)$. Altri eventuali punti critici vanno ricercati tra i punti interni di derivabilità che annullano il gradiente.

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y) : y > \frac{1}{2} \\ f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} & \iff \begin{cases} (x, y) : y > \frac{1}{2} \\ (2y - 1)e^{x+y}(2x + 1) = 0 \\ (2x - 1)e^{x+y}(2y + 1) = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} (x, y) : y > \frac{1}{2} \\ 2x + 1 = 0 \\ (2x - 1)(2y + 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Poiché la prima equazione ammette la soluzione $x = -\frac{1}{2}$, allora la seconda equazione è verificata solo se $2y + 1 = 0$, ovvero per $y = -\frac{1}{2}$. Quindi il precedente sistema non produce alcun punto critico. Invece

$$\begin{cases} (x, y) : y < \frac{1}{2} \\ f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) : y < \frac{1}{2} \\ (1 - 2y)e^{x+y}(2x + 1) = 0 \\ (2x - 1)e^{x+y}(-2y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x, y) : y < \frac{1}{2} \\ 2x + 1 = 0 \\ (2x - 1)(2y + 1) = 0 \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente al precedente e produce il punto critico $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
Calcoliamo ora la matrice Hessiana, si ha

$$f''_{xx} = |2y - 1|e^{x+y}(2x + 3), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, \frac{1}{2}) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$f''_{xy} = \begin{cases} (2x + 1)e^{x+y}(2y + 1), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{2} \\ (2x + 1)e^{x+y}(-2y - 1), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{1}{2} \end{cases} = f''_{yx}$$

$$f''_{yy} = \begin{cases} (2x - 1)e^{x+y}(2y + 3), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{2} \\ (2x - 1)e^{x+y}(-2y - 3), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Risulta allora che

$$H(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & 4e^{-1} \end{pmatrix}, \quad \det H(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) > 0, \quad f''_{xx}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) > 0$$

$$\implies (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \text{ punto di minimo relativo.}$$

Rimane da indagare la natura dei punti $(x, \frac{1}{2})$, $x \in \mathbb{R}$. Osservando che

$f(x, \frac{1}{2}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, studiamo il segno della funzione:

$$Z_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(\frac{1}{2}, y), y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \frac{1}{2}), x \in \mathbb{R}\}$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{2}, y \neq \frac{1}{2}\}.$$

Osservando il grafico del segno di $f(x, y)$, si deduce immediatamente che:

- i punti $(x, \frac{1}{2})$ con $x < \frac{1}{2}$ sono punti di massimo locale visto che è sempre possibile trovare un intorno di tali punti in cui la funzione è non positiva;
- il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è di sella visto che in ogni suo intorno ci sono punti in cui la funzione è positiva e punti in cui è negativa;
- i punti $(x, \frac{1}{2})$ con $x > \frac{1}{2}$ sono punti di minimo locale visto che è sempre possibile trovare un intorno di tali punti in cui la funzione è non negativa.

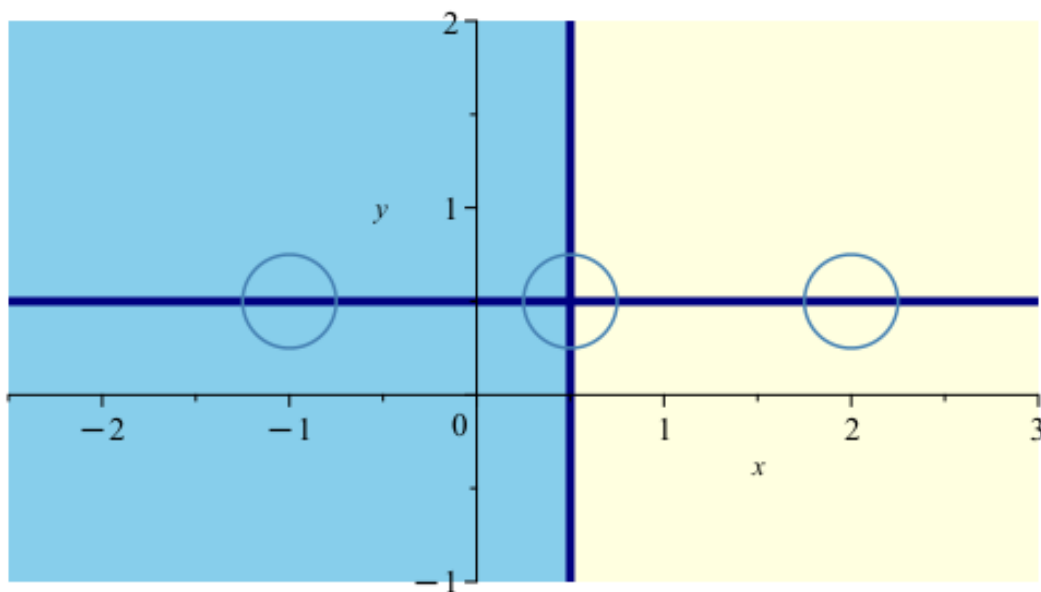


Figura 2: Grafico del segno di $f(x, y)$, negativo=celeste, positivo=giallo, in blu gli zeri.

3C) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (2y - 1)|2x - 1|e^{x+y}$ è continua in tutto \mathbb{R}^2 perché prodotto e composizione di funzioni continue. Per quanto

riguarda la derivabilità parziale risulta:

$$f'_y(x, y) = |2x - 1|e^{x+y}(2y + 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mentre per la derivata parziale rispetto a x osserviamo che

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x - 1)(2y - 1)e^{x+y}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq \frac{1}{2}, \\ (1 - 2x)(2y - 1)e^{x+y}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pertanto

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} (2y - 1)e^{x+y}(2x + 1), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > \frac{1}{2}, \\ (2y - 1)e^{x+y}(-2x - 1), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Per i punti $(\frac{1}{2}, y)$, $y \in \mathbb{R}$, considerato il cambio di legge, bisogna utilizzare la definizione e calcolare il limite del rapporto incrementale.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f(\frac{1}{2} + h, y) - f(\frac{1}{2}, y)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{2(2y - 1)|h|}{h} e^{y+h+\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^\pm} 2(2y - 1)e^{y+h+\frac{1}{2}} \text{segno}(h) \\ &= \begin{cases} 2(2y - 1)e^{y+\frac{1}{2}} & h \rightarrow 0^+, \\ -2(2y - 1)e^{y+\frac{1}{2}} & h \rightarrow 0^-. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $\exists f'_x(\frac{1}{2}, y) = 0$ se e solo se $y = \frac{1}{2}$, mentre $f(x, y)$ non ammette gradiente, e quindi non è differenziabile, nei punti $(\frac{1}{2}, y)$, $y \neq \frac{1}{2}$.

In conclusione $\nabla f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, y), y \neq \frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ed in particolare $\nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (0, 0)$.

Sicuramente $f(x, y)$ è differenziabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < \frac{1}{2}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{2}\}$ in quanto ivi di classe C^1 . Studiamo ora la differenziabilità nel punto

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Risulta

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(\frac{1}{2} + h, \frac{1}{2} + k) - f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{4k|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} e^{h+k+1} =: \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k).$$

Usando la caratterizzazione del limite con le coordinate polari si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} 4 \cdot e \cdot r \cdot \sin t |\cos t| e^{r(\cos t + \sin t)} = 0;$$

il limite poi è uniforme rispetto a t in quanto si ha

$$|\varepsilon(r \cos t, r \sin t)| = 4 \cdot e \cdot r |\cos t| |\sin t| e^{r(\cos t + \sin t)} \leq 4 \cdot e \cdot r e^{\sqrt{2}r} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0.$$

Dunque $f(x, y)$ è differenziabile in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $z = 0$ è l'equazione del piano tangente.

Dallo studio della derivabilità parziale il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è risultato punto critico per $f(x, y)$. Altri eventuali punti critici vanno ricercati tra i punti interni di derivabilità che annullano il gradiente.

$$\begin{cases} (x, y) : x > \frac{1}{2} \\ f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x, y) : x > \frac{1}{2} \\ (2y - 1)e^{x+y}(2x + 1) = 0 \\ (2x - 1)e^{x+y}(2y + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x, y) : x > \frac{1}{2} \\ (2y - 1)(2x + 1) = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Poiché la seconda equazione ammette la soluzione $y = -\frac{1}{2}$, allora la prima equazione è verificata solo se $2x + 1 = 0$, ovvero per $x = -\frac{1}{2}$. Quindi il

precedente sistema non produce alcun punto critico. Invece

$$\begin{cases} (x, y) : x < \frac{1}{2} \\ f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x, y) : x < \frac{1}{2} \\ (2y - 1)e^{x+y}(-2x - 1) = 0 \\ (1 - 2x)e^{x+y}(2y + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x, y) : x < \frac{1}{2} \\ (2y - 1)(-2x - 1) = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente al precedente e produce il punto critico $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Calcoliamo ora la matrice Hessiana, si ha

$$f''_{yy} = |2x - 1|e^{x+y}(2y + 3), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

$$f''_{xy} = \begin{cases} (2x + 1)e^{x+y}(2y + 1), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{2} \\ (-2x - 1)e^{x+y}(2y + 1), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < \frac{1}{2} \end{cases} = f''_{yx}$$

$$f''_{xx} = \begin{cases} (2y - 1)e^{x+y}(2x + 3), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{2} \\ (2y - 1)e^{x+y}(-2x - 3), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Risulta allora che

$$H(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & 4e^{-1} \end{pmatrix}, \quad \det H(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) > 0, \quad f''_{xx}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) > 0$$

$$\Rightarrow (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \text{ punto di minimo relativo.}$$

Rimane da indagare la natura dei punti $(\frac{1}{2}, y), y \in \mathbb{R}$. Osservando che $f(\frac{1}{2}, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$, studiamo il segno della funzione:

$$Z_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(\frac{1}{2}, y), y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \frac{1}{2}), x \in \mathbb{R}\}$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}\}.$$

Osservando il grafico del segno di $f(x, y)$, si deduce immediatamente che:

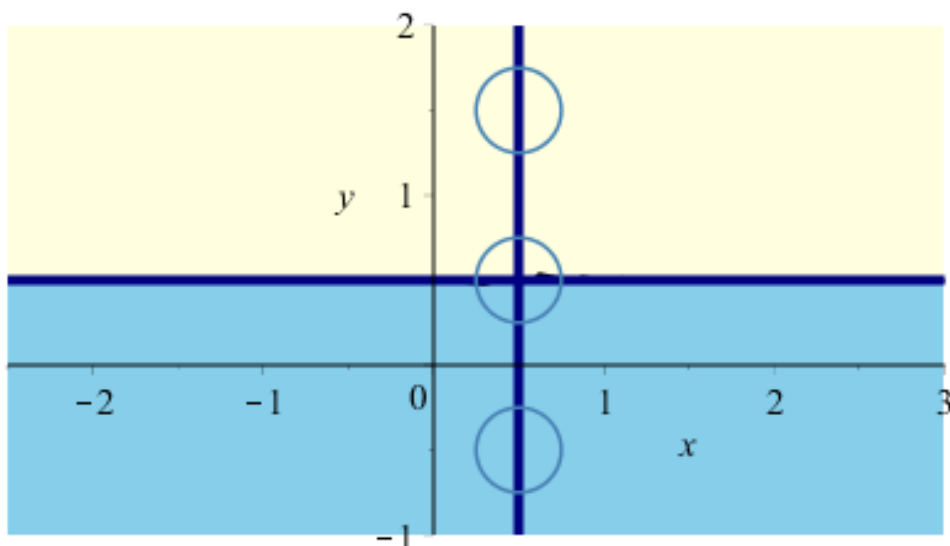


Figura 3: Grafico del segno di $f(x, y)$, negativo=celeste, positivo=giallo, gli zeri di f sono in blu

- i punti $(\frac{1}{2}, y)$ con $y < \frac{1}{2}$ sono punti di massimo locale visto che è sempre possibile trovare un intorno di tali punti in cui la funzione è non positiva;
- il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è di sella visto che in ogni suo intorno ci sono punti in cui la funzione è positiva e punti in cui è negativa;
- i punti $(\frac{1}{2}, y)$ con $y > \frac{1}{2}$ sono punti di minimo locale visto che è sempre possibile trovare un intorno di tali punti in cui la funzione è non negativa.

**Esonero 28 Novembre 2025**

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

1) Determinare i massimi e i minimi vincolati della funzione $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ soggetta al vincolo $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$.

2) Un circuito RLC è descritto dalla equazione differenziale:

$$L q''(t) + R q'(t) + \frac{1}{C} q(t) = E_0 \cos(\omega t), \quad \text{con } L = R = C = 1, E_0 = 2, \omega = 1.$$

a) Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

b) Scrivere una soluzione particolare della equazione completa

c) scrivere la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali: $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$.

3) Sia $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$.

a) scrivere il trasformato di E in coordinate sferiche (ρ, φ, θ)

b) Determinare il volume di E utilizzando le coordinate sferiche

**Esonero 28 Novembre 2025**

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

1) Determinare i massimi e i minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = xyz$ soggetta al vincolo $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

2) Un sistema massa-molla è descritto da una equazione differenziale in $x(t)$ (spostamento) della forma:

$$m x''(t) + c x'(t) + k x(t) = F_0, \quad \text{con } m = 1, \quad c = 4, \quad k = 5, \quad F_0 = 10.$$

a) Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

b) Scrivere una soluzione particolare della equazione completa

c) scrivere la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali: $x(0) = 0, x'(0) = 1$

3) Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 4 - (x^2 + y^2), z \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)}\}$.

a) scrivere il trasformato di E in coordinate cilindriche (ρ, θ, z)

b) Determinare il volume di E utilizzando le coordinate cilindriche

**Esonero 28 Novembre 2025**

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

1) Determinare i massimi e i minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = xyz$ soggetta al vincolo $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12 = 0$.

2) Un sistema massa-molla è descritto da una equazione differenziale in $x(t)$ (spostamento) della forma:

$$m x''(t) + c x'(t) + k x(t) = F_0, \quad \text{con } m = 1, \quad c = 2, \quad k = 5, \quad F_0 = 15.$$

a) Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

$$x(t) =$$

b) Scrivere una soluzione particolare della equazione completa

$$x_p(t) =$$

c) scrivere la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali: $x(0) = 0, x'(0) = 1$

$$x(t) =$$

3) Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 6 - (x^2 + y^2), z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

a) scrivere il trasformato di E in coordinate cilindriche (ρ, θ, z)

$$F := \{(\rho, \theta, z) :$$

b) Determinare il volume di E utilizzando le coordinate cilindriche

$$\text{vol}(E) =$$


Esonero 28 Novembre 2025

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

1) Determinare i massimi e i minimi vincolati della funzione $f(x, y, z) = 3x + y + 2z$ soggetta al vincolo $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$.

2) Un circuito RLC è descritto dalla equazione differenziale:

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E_0 \cos(\omega t), \quad \text{con } L = 1, R = 2, C = \frac{1}{2}, E_0 = 4, \omega = 2.$$

a) Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

$$q(t) =$$

b) Scrivere una soluzione particolare della equazione completa

$$q_p(t) =$$

c) scrivere la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali: $q(0) = 0, q'(0) = 1$.

$$q(t) =$$

3) Sia $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 8\}$.

a) scrivere il trasformato di E in coordinate sferiche (ρ, φ, θ)

$$F := \{(\rho, \varphi, \theta) :$$

b) Se $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ è la densità di E , determinare la massa di E utilizzando le coordinate sferiche

$$\text{massa}(E) =$$

Cenni di svolgimento

A-1) f, g sono funzioni di classe C^1 , il vincolo è una sfera (Z_g è un insieme compatto) e dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti.

Inoltre il gradiente del vincolo $g(x, y, z) = 0$ non è nullo nei punti del vincolo. Infatti $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$. Il gradiente è $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. L'unico punto in cui $\nabla g = (0, 0, 0)$ è $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Questo punto però non appartiene al vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 14$. Di conseguenza i punti di massimo e di minimo assoluto potranno essere determinati tutti con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Cerchiamo (x, y, z) e λ tali che

$$\nabla f = (1, 2, 3) = \lambda \nabla g = \lambda(2x, 2y, 2z).$$

Il sistema di equazioni diventa

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x, \\ 2 = \lambda 2y, \\ 3 = \lambda 2z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \end{cases}$$

Dalle prime tre equazioni otteniamo

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \quad z = \frac{3}{2\lambda}.$$

Sostituendo nel vincolo:

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 14$$

da cui $\lambda = \pm \frac{1}{2}$.

Per $\lambda = \frac{1}{2}$ otteniamo

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3,$$

Per $\lambda = -\frac{1}{2}$ otteniamo

$$x = -1, \quad y = -2, \quad z = -3.$$

Valutiamo f nei due punti critici:

$$f(1, 2, 3) = 1 + 4 + 9 = 14, \quad f(-1, -2, -3) = -1 - 4 - 9 = -14.$$

Poiché il vincolo è la sfera compatta $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ e f è continua, i valori critici ottenuti corrispondono al massimo e al minimo assoluti sulla sfera.

Massimo: $f_{\max} = 14$ in $(1, 2, 3)$; Minimo: $f_{\min} = -14$ in $(-1, -2, -3)$.

B-1) f, g sono funzioni di classe C^1 , il vincolo è una sfera (Z_g è un insieme compatto) e dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti.

Inoltre il gradiente del vincolo $g(x, y, z) = 0$ non è nullo nei punti del vincolo. Infatti il vincolo è $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Anche qui

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z),$$

che si annulla solamente in $(0, 0, 0)$. Tale punto non appartiene alla sfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Di conseguenza i punti di massimo e di minimo assoluto potranno essere determinati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Cerchiamo punti tali che

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

Calcoliamo i gradienti:

$$\nabla f = (yz, xz, xy), \quad \nabla g = (2x, 2y, 2z).$$

Il sistema è

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x, \\ xz = 2\lambda y, \\ xy = 2\lambda z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Esaminiamo i casi possibili.

$\lambda = 0$) Allora $yz = 0, xz = 0, xy = 0$ che fornisce

$(0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, 0)$. In tali punti la f assume valore nullo.

$x = 0 \wedge \lambda \neq 0$) Allora dalla seconda equazione $y = 0$. Dalla terza equazione

$z = 0$, ma $(0, 0, 0) \notin Z_g$.

$y = 0 \vee z = 0$) Si perviene, come nel caso $x = 0, \lambda \neq 0$ alla soluzione non accettabile $(0, 0, 0)$.

$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$) Possiamo dividere le prime tre equazioni a coppie.

Dividendo la prima per la seconda (dato $xz \neq 0$):

$$\frac{yz}{xz} = \frac{2\lambda x}{2\lambda y} \implies \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \implies y^2 = x^2.$$

Analogamente si ottiene $z^2 = y^2$. Quindi $|x| = |y| = |z|$. Ci sono due alternative per i segni:

- (i) tutte le tre coordinate hanno lo stesso segno: $x = y = z = t$. Sostituite nel vincolo si ottiene $3t^2 = 1$, quindi $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Per $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ si ha

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Per $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ si ottiene

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

- (ii) due coordinate positive e una negativa (o viceversa). Ad esempio $x = y = a, z = -a$. Sostituite nel vincolo si ottiene: $a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 = 1$ da cui $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Il prodotto in questo caso è

$$f(a, a, -a) = a \cdot a \cdot (-a) = -a^3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}},$$

che coincide con il valore negativo ottenuto nel caso (i) con tutte e tre negative. Simmetricamente, combinazioni di segni diverse portano agli stessi valori assoluti già elencati.

I candidati in cui f assume valore nullo non possono essere annoverati tra quelli di massimo o di minimo assoluto, per cui rimangono i punti esaminati in (i) e (ii):

$$f_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$f_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$f_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad f_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$
--

C-1) f, g sono funzioni di classe C^1 , il vincolo è una sfera (Z_g è un insieme compatto) e dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti.

Inoltre il gradiente del vincolo $g(x, y, z) = 0$ non è nullo nei punti del vincolo. Infatti il vincolo è $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$. Anche qui

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z),$$

che si annulla solamente in $(0, 0, 0)$. Tale punto non appartiene alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Di conseguenza i punti di massimo e di minimo assoluto potranno essere determinati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Cerchiamo punti tali che

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

Calcoliamo i gradienti:

$$\nabla f = (yz, xz, xy), \quad \nabla g = (2x, 2y, 2z).$$

Il sistema è

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x, \\ xz = 2\lambda y, \\ xy = 2\lambda z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12. \end{cases}$$

Esaminiamo i casi possibili.

$\lambda = 0$) Allora $yz = 0$, $xz = 0$, $xy = 0$ che fornisce

$(0, 0, \pm 2\sqrt{3})$, $(0, \pm 2\sqrt{3}, 0)$, $(\pm 2\sqrt{3}, 0, 0)$. In tali punti la f assume valore nullo.

$x = 0 \wedge \lambda \neq 0$) Allora dalla seconda equazione $y = 0$. Dalla terza equazione $z = 0$, ma $(0, 0, 0) \notin Z_g$.

$y = 0 \vee z = 0$) Si perviene, come nel caso $x = 0$, $\lambda \neq 0$ alla soluzione non accettabile $(0, 0, 0)$.

$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$) Possiamo dividere le prime tre equazioni a coppie. Dividendo la prima per la seconda (dato $xz \neq 0$):

$$\frac{yz}{xz} = \frac{2\lambda x}{2\lambda y} \implies \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \implies y^2 = x^2.$$

Analogamente si ottiene $z^2 = y^2$. Quindi $|x| = |y| = |z|$. Ci sono due alternative per i segni:

- (i) tutte le tre coordinate hanno lo stesso segno: $x = y = z = t$. Sostituite nel vincolo si ottiene $3t^2 = 12$, quindi $t = \pm 2$. Per $t = 2$ si ha

$$f(2, 2, 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Per $t = -2$ si ottiene

$$f(-2, -2, -2) = -8.$$

- (ii) due coordinate positive e una negativa (o viceversa). Ad esempio $x = y = a$, $z = -a$. Sostituite nel vincolo si ottiene: $a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 = 12$ da cui $a = \pm 2$. Il prodotto in questo caso è

$$f(a, a, -a) = a \cdot a \cdot (-a) = -a^3 = -8,$$

che coincide con il valore negativo ottenuto nel caso (i) con tutte e tre negative. Simmetricamente, combinazioni di segni diverse portano agli stessi valori assoluti già elencati.

I candidati in cui f assume valore nullo non possono essere annoverati tra quelli di massimo o di minimo assoluto, per cui rimangono i punti esaminati in (i) e (ii):

$$f_{\max} = 8 \quad \text{in} \quad (2, 2, 2),$$

$$f_{\min} = -8 \quad \text{in} \quad (-2, -2, -2)$$

$f_{\max} = 8,$	$f_{\min} = -8.$
-----------------	------------------

D-1) f, g sono funzioni di classe C^1 , il vincolo è una sfera (Z_g è un insieme compatto) e dunque per il teorema di Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti.

Inoltre il gradiente del vincolo $g(x, y, z) = 0$ non è nullo nei punti del vincolo. Infatti $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$. Il gradiente è $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. L'unico punto in cui $\nabla g = (0, 0, 0)$ è $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Questo punto però non appartiene al vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 14$. Di conseguenza i punti di massimo e di minimo assoluto potranno essere determinati tutti con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Cerchiamo (x, y, z) e λ tali che

$$\nabla f = (3, 1, 2) = \lambda \nabla g = \lambda(2x, 2y, 2z).$$

Il sistema di equazioni diventa

$$\begin{cases} 3 = \lambda 2x, \\ 1 = \lambda 2y, \\ 2 = \lambda 2z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \end{cases}$$

Dalle prime tre equazioni otteniamo

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda}, \quad z = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Sostituendo nel vincolo:

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 14$$

da cui $\lambda = \pm \frac{1}{2}$.

Per $\lambda = \frac{1}{2}$ otteniamo

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = 2,$$

Per $\lambda = -\frac{1}{2}$ otteniamo

$$x = -3, \quad y = -1, \quad z = -2.$$

Valutiamo f nei due punti critici:

$$f(3, 1, 2) = 9 + 1 + 4 = 14, \quad f(-3, -1, -2) = -9 - 1 - 4 = -14.$$

Poiché il vincolo è la sfera compatta $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ e f è continua, i valori critici ottenuti corrispondono al massimo e al minimo assoluti sulla sfera.

Massimo: $f_{\max} = 14$ in $(3, 1, 2)$; Minimo: $f_{\min} = -14$ in $(-3, -1, -2)$.

A-2) Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, completa. L'equazione omogenea è

$$q'' + q' + q = 0.$$

La sua equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

L'integrale generale dell'omogenea è

$q(t) = e^{-t/2} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right).$

Una particolare della equazione completa sarà del tipo:

$$q_p(t) = a \cos t + b \sin t.$$

Le sue derivate

$$q'_p = -a \sin t + b \cos t, \quad q''_p = -a \cos t - b \sin t$$

sostituite nell'equazione danno:

$$\begin{aligned} (-a \cos t - b \sin t) + (-a \sin t + b \cos t) + (a \cos t + b \sin t) &= 2 \cos t \\ b \cos t - a \sin t &= 2 \cos t. \end{aligned}$$

Per il principio di identità risulta $b = 2$, $a = 0$. Quindi la soluzione particolare della equazione completa è

$$q_p(t) = 2 \sin t.$$

L'integrale generale della equazione completa è dato da

$$q(t) = e^{-t/2} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + 2 \sin t.$$

Imponiamo $q(0) = 0$:

$$q(0) = e^0 \cdot A + 0 + 0 = A = 0.$$

Poiché $A = 0$, si avrà:

$$\begin{aligned} q'(t) &= \frac{d}{dt} \left(e^{-t/2} B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + 2 \cos t \\ &= B \left(-\frac{1}{2} e^{-t/2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + e^{-t/2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right) + 2 \cos t. \end{aligned}$$

Quindi

$$q'(0) = B \left(-\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \right) + 2 \cdot 1 = B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2.$$

Imponendo $q'(0) = 0$ otteniamo

$$B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$q(t) = e^{-t/2} \left(-\frac{4}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + 2 \sin t.$$

B-2) Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, completa. L'equazione omogenea è: $x'' + 4x' + 5x = 0$. La sua equazione caratteristica è data da:

$$\alpha^2 + 4\alpha + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{-4 \pm i\sqrt{4}}{2} = -2 \pm i.$$

L'integrale generale della equazione omogenea è dato da:

$$x(t) = e^{-2t}(C \cos t + D \sin t).$$

Per trovare una soluzione particolare (polinomio di grado zero) basta osservare che se $x_p = c$ le sue derivate sono nulle e $5c = 10$, per cui $c = 2$.

$$x_p(t) = 2.$$

L'integrale generale della equazione completa è dato da:

$$x(t) = e^{-2t}(C \cos t + D \sin t) + 2.$$

Imponendo $x(0) = 0$:

$$x(0) = C + 2 = 0 \Rightarrow C = -2.$$

Ora calcoliamo $x'(t)$:

$$x'(t) = e^{-2t}(-2(C \cos t + D \sin t) + (-C \sin t + D \cos t)).$$

Se sostituiamo $C = -2$ otteniamo:

$$x'(t) = e^{-2t}(-2(-2 \cos t + D \sin t) + (2 \sin t + D \cos t)).$$

Valutiamo $x'(t)$ in $t = 0$:

$$x'(0) = -2(-2) + D = 4 + D = 1 \Rightarrow D = -3.$$

La soluzione del Problema di Cauchy è:

$$x(t) = e^{-2t}(-2 \cos t - 3 \sin t) + 2.$$

C-2) Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, completa. L'equazione omogenea è: $x'' + 2x' + 5x = 0$. La sua equazione caratteristica è data da:

$$\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -1 \pm 2i.$$

L'integrale generale della equazione omogenea è dato da:

$$x(t) = e^{-t}(C \cos(2t) + D \sin(2t)).$$

Per trovare una soluzione particolare (polinomio di grado zero) basta osservare che se $x_p = c$ le sue derivate sono nulle e $5c = 15$, per cui $c = 3$.

$$x_p(t) = 3.$$

L'integrale generale della equazione completa è dato da:

$$x(t) = e^{-t}(C \cos(2t) + D \sin(2t)) + 3.$$

Imponendo $x(0) = 0$:

$$x(0) = C + 3 = 0 \Rightarrow C = -3.$$

Ora calcoliamo $x'(t)$:

$$x'(t) = e^{-t}(- (C \cos(2t) + D \sin(2t)) + (-2C \sin(2t) + 2D \cos(2t))).$$

Se sostituiamo $C = -3$ otteniamo:

$$x'(t) = e^{-t}(- (-3 \cos(2t) + D \sin(2t)) + (6 \sin(2t) + 2D \cos(2t))).$$

Valutiamo $x'(t)$ in $t = 0$:

$$x'(0) = 3 + 2D = 1 \Rightarrow D = -1.$$

La soluzione del Problema di Cauchy è:

$$x(t) = e^{-t}(-3 \cos(2t) - \sin(2t)) + 3.$$

D-2) Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, completa. L'equazione omogenea è

$$q'' + 2q' + 2q = 0.$$

La sua equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -1 \pm i.$$

L'integrale generale dell'omogenea è

$$q(t) = e^{-t}(A \cos t + B \sin t).$$

Una particolare della equazione completa sarà del tipo:

$$q_p(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t).$$

Le sue derivate

$$q'_p = -2a \sin(2t) + 2b \cos(2t), \quad q''_p = -4a \cos(2t) - 4b \sin(2t)$$

sostituite nell'equazione danno:

$$(-4a \cos(2t) - 4b \sin(2t)) + (-4a \sin(2t) + 4b \cos(2t)) +$$

$$(2a \cos(2t) + 2b \sin(2t)) = 4 \cos(2t)$$

$$(-2a + 4b) \cos(2t) + (-2b - 4a) \sin(2t) = 4 \cos(2t).$$

Per il principio di identità risulta $-2a + 4b = 4$, $-2b - 4a = 0$, da cui $a = -\frac{2}{5}$, $b = \frac{4}{5}$. Quindi la soluzione particolare della equazione completa è

$$q_p(t) = -\frac{2}{5} \cos(2t) + \frac{4}{5} \sin(2t).$$

L'integrale generale della equazione completa è dato da

$$q(t) = e^{-t}(A \cos t + B \sin t) - \frac{2}{5} \cos(2t) + \frac{4}{5} \sin(2t).$$

Imponiamo $q(0) = 0$:

$$q(0) = A - \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow A = \frac{2}{5}.$$

Poiché $A = \frac{2}{5}$, si avrà:

$$\begin{aligned} q'(t) &= \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \left(\frac{2}{5} \cos t + B \sin t \right) \right) + \frac{4}{5} \sin(2t) + \frac{8}{5} \cos(2t) \\ &= e^{-t} \left(-\frac{2}{5} \cos t - B \sin t - \frac{2}{5} \sin t + B \cos t \right) + \frac{4}{5} \sin(2t) + \frac{8}{5} \cos(2t). \end{aligned}$$

Quindi

$$q'(0) = -\frac{2}{5} + B + \frac{8}{5}.$$

Imponendo $q'(0) = 1$ otteniamo

$$B + \frac{6}{5} = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$q(t) = e^{-t} \left(\frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t \right) - \frac{2}{5} \cos(2t) + \frac{4}{5} \sin(2t).$$

A-3) Consideriamo il cambio di variabili da coordinate cartesiane a coordinate sferiche:

$$r := \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases} \quad \begin{aligned} &\rho \in [0, 2], \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi], \\ &J(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

L'insieme E è delimitato dal basso dal cono $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ e dall'alto dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Questo ci dice immediatamente che in coordinate sferiche corrisponde a $\rho \in [0, 2]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Per determinare la colatitudine osserviamo che $(0, 0, 2) \in E$ (polo Nord, dunque $\varphi = 0$ in questo punto) e i punti del cono $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ formano con l'asse positivo delle z un angolo di $\frac{\pi}{6}$, dunque $\varphi \in [0, \pi/6]$. Pertanto

$$F := [0, 2] \times [0, \pi/6] \times [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad r(F) = E.$$

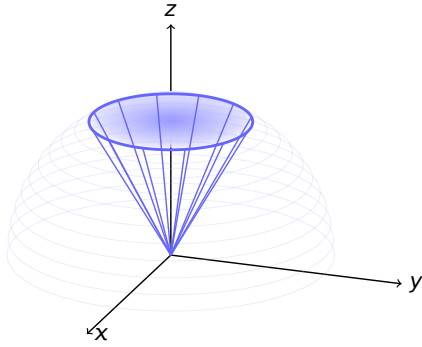


Figura 1: $E = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$

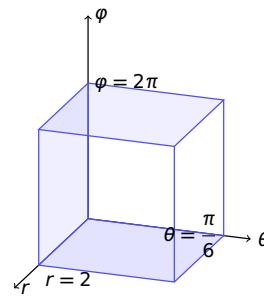


Figura 2: Dominio in coordinate sferiche

Calcoliamo ora il volume di E :

$$\begin{aligned} \text{vol}(E) &= \iiint_F \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{\pi/6} \sin \varphi \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^2 \rho^2 \, d\rho \right). \\ \int_0^2 \rho^2 \, d\rho &= \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}, \quad \int_0^{\pi/6} \sin \varphi \, d\varphi = 1 - \cos \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \text{vol}(E) &= 2\pi \cdot \frac{8}{3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{16\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

B-3) Consideriamo il cambio di variabili da coordinate cartesiane a coordinate cilindriche:

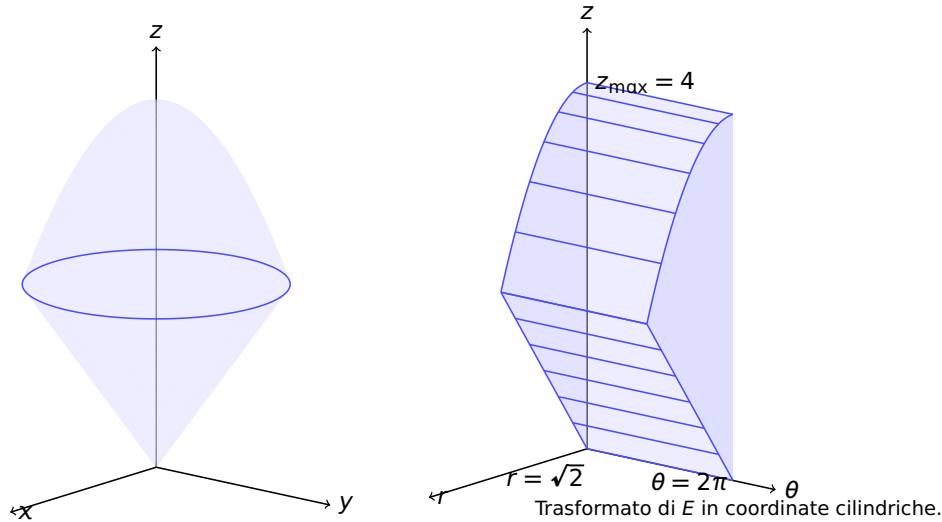
$$r := \begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad \begin{aligned} \rho &\in [0, \sqrt{2}], \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R} \\ J(\rho, \theta, z) &= \rho. \end{aligned}$$

L'intersezione fra il paraboloide e il cono si ottiene risolvendo

$$\sqrt{2}\rho = 4 - \rho^2 \implies \rho^2 + \sqrt{2}\rho - 4 = 0 \implies \rho = \sqrt{2}.$$

Dunque:

$$F := \{(\rho, \theta, z) : \rho \in [0, \sqrt{2}], \theta \in [0, 2\pi], \sqrt{2}\rho \leq z \leq 4 - \rho^2\}.$$



$$E = \{(x, y, z) : z \leq 4 - (x^2 + y^2), z \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)}\}$$

Il volume di E si otterrà integrando la funzione identicamente 1 su F :

$$\begin{aligned} \text{vol}(E) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}\rho}^{4-\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho(4 - \rho^2 - \sqrt{2}\rho) \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (4\rho - \rho^3 - \sqrt{2}\rho^2) \, d\rho = 2\pi \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\sqrt{2}}{3}\rho^3 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2\pi \left(2 \cdot 2 - \frac{4}{4} - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} \right) = 2\pi \left(4 - 1 - \frac{4}{3} \right) \\ &= 2\pi \left(3 - \frac{4}{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{5}{3} = \frac{10\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{vol}(E) = \frac{10\pi}{3}}$$

C-3) Consideriamo il cambio di variabili da coordinate cartesiane a coordinate cilindriche:

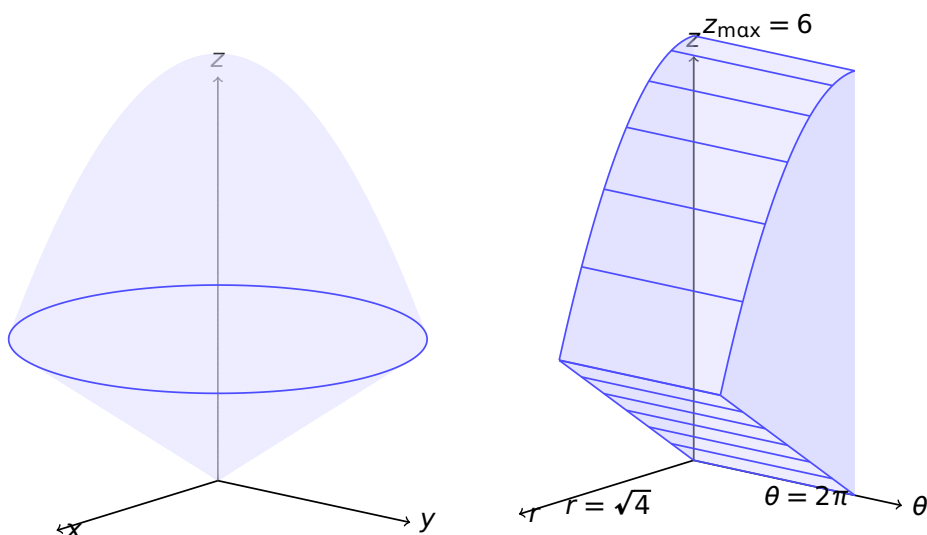
$$r := \begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad \begin{aligned} &\rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R} \\ &J(\rho, \theta, z) = \rho. \end{aligned}$$

L'intersezione fra il paraboloide e il cono si ottiene risolvendo

$$\rho = 6 - \rho^2 \implies \rho^2 + \rho - 6 = 0 \implies \rho = 2.$$

Dunque:

$$F := \{(\rho, \theta, z) : \rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], \rho \leq z \leq 6 - \rho^2\}.$$



$$E = \{(x, y, z) : z \leq 6 - (x^2 + y^2), z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

E in coordinate cilindriche.

Il volume di E si otterrà integrando la funzione identicamente 1 su F :

$$\begin{aligned} \text{vol}(E) &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\rho}^{6-\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_0^2 \rho(6 - \rho^2 - \rho) \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^2 (6\rho - \rho^3 - \rho^2) \, d\rho = 2\pi \left[3\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 2\pi \left(12 - 4 - \frac{8}{3} \right) = 2\pi \left(8 - \frac{8}{3} \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{16}{3} = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{vol}(E) = \frac{32\pi}{3}}$$

D-3) Consideriamo il cambio di variabili da coordinate cartesiane a coordinate sferiche:

$$r := \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases} \quad \begin{aligned} &\rho \in [0, 2\sqrt{2}], \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi), \\ &J(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

L'insieme E è delimitato dal basso dal cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dall'alto dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Questo ci dice immediatamente che in coordinate sferiche corrisponde a $\rho \in [0, 2\sqrt{2}]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Per determinare la colatitudine osserviamo che $(0, 0, 2\sqrt{2}) \in E$ (polo Nord, dunque $\varphi = 0$ in questo punto) e i punti del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ formano con l'asse positivo delle z un angolo di $\frac{\pi}{4}$, dunque $\varphi \in [0, \pi/4]$. Pertanto

$$F := [0, 2\sqrt{2}] \times [0, \pi/4] \times [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad r(F) = E.$$

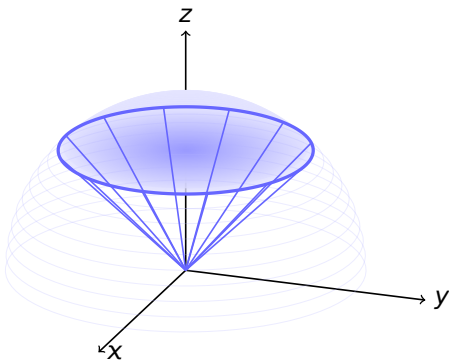


Figura 1: $E = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$

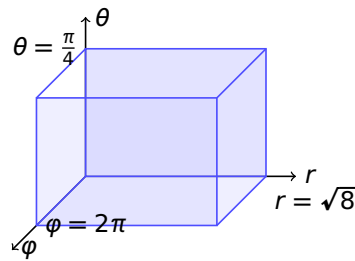


Figura 2: Dominio in coordinate sferiche

Calcoliamo ora la massa di E :

$$\begin{aligned} \text{massa}(E) &= \iiint_F \rho^3 \sin \varphi \, d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{\pi/4} \sin \varphi \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \right). \\ \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho &= \frac{(2\sqrt{2})^4}{4} = 16, \\ \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \, d\varphi &= 1 - \cos \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \text{massa}(E) &= 2\pi \cdot 16 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 32\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$


Esonero 15 Dicembre 2025

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

- 1)** Calcolare il flusso del campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ uscente da S , quando S è la frontiera di $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$.

Scrivere espressamente $\text{Fr}(E)$

Fr(E)

Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 2)** Sia $F = 3y\vec{i} - xz\vec{j} + yz^2\vec{k}$. Determinare il flusso del rotore di F uscente dalla superficie parabolica $2z = x^2 + y^2$, limitata da $z = 2$.

- a)** Scrivere la normale uscente alla superficie S in ogni suo punto

$n_e =$

- b)** Scrivere il bordo della superficie con il suo verso di percorrenza, concorde alla normale uscente

$\partial S :=$

- c)** Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 3)** Sia $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e sia ω la forma differenziale lineare

$$\omega = -\frac{\sin(2y)}{x^2 + \sin^2(2y)} dx + \frac{x \cos(2y)}{x^2 + \sin^2(2y)} dy.$$

Dire se ω è:

- (a) chiusa e esatta (in A);

- (b) chiusa, ma non esatta (in A);
- (c) esatta, ma non chiusa (in A);
- (d) né chiusa, né esatta (in A).


Esonero 15 Dicembre 2025

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

- 1)** Calcolare il flusso del campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (xy^2 + \arctan(1 + y^2z^2), yz^2 + e^{xz}, zx^2 + 6x^2y)$ uscente da S , quando S è la frontiera di $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0\}$.

Scrivere espressamente $\text{Fr}(E)$

$\text{Fr}(E)$

Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 2)** Sia $F = -xz\vec{i} + 3y\vec{j} + e^{yz^2}\vec{k}$. Determinare il flusso del rotore di F uscente dalla superficie parabolica $z = 1 - (x^2 + y^2)$, limitata da $z = -3$.

- a)** Scrivere la normale uscente alla superficie S in ogni suo punto

$n_e =$

- b)** Scrivere il bordo della superficie con il suo verso di percorrenza, concorde alla normale uscente

$\partial S :=$

- c)** Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 3)** Sia $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e sia ω la forma differenziale lineare

$$\omega = -\frac{y^2}{x^2 + y^2} dx + \frac{2xy}{x^2 + y^2} dy.$$

Dire se ω è:

- (a) chiusa e esatta (in A);

- (b) chiusa, ma non esatta (in A);
- (c) esatta, ma non chiusa (in A);
- (d) né chiusa, né esatta (in A).



Esonero 15 Dicembre 2025

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

- 1)** Calcolare il flusso del campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (xz^2 + yz^3, x^2y - xz^6, x^2y^2 + y^2z)$ uscente da S , quando S è la frontiera di $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$.

Scrivere espressamente $\text{Fr}(E)$

$\text{Fr}(E)$

Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 2)** Sia $F = yz\vec{i} + 5x\vec{j} + xe^{y}z\vec{k}$. Determinare il flusso del rotore di F uscente dalla superficie parabolica $\frac{z}{2} = x^2 + y^2$, limitata da $z = 8$.

- a)** Scrivere la normale uscente alla superficie S in ogni suo punto

$n_e =$

- b)** Scrivere il bordo della superficie con il suo verso di percorrenza, concorde alla normale uscente

$\partial S :=$

- c)** Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 3)** Sia $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, \frac{\pi}{2})\}$ e sia ω la forma differenziale lineare

$$\omega = -\frac{\cos y}{x^2 + \cos^2 y} dx + \frac{x \sin y}{x^2 + \cos^2 y} dy.$$

Dire se ω è:

- (a) chiusa e esatta (in A);

- (b) chiusa, ma non esatta (in A);
- (c) esatta, ma non chiusa (in A);
- (d) né chiusa, né esatta (in A).



Esonero 15 Dicembre 2025

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

- 1)** Calcolare il flusso del campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (\frac{1}{3}x^3 + \log(1 + y^2z^2), \cos(xz) + yz^2, e^{xy} + y^2z)$ uscente da S , quando S è la frontiera di $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0\}$.

Scrivere espressamente $\text{Fr}(E)$

Fr(E)

Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 2)** Sia $F = \frac{1}{3}yz\vec{i} - \frac{1}{3}x\vec{j} + (x^2y - xz)\vec{k}$. Determinare il flusso del rotore di F uscente dalla superficie parabolica $3z = -(x^2 + y^2)$, limitata da $z = -3$.

- a)** Scrivere la normale uscente alla superficie S in ogni suo punto

$n_e =$

- b)** Scrivere il bordo della superficie con il suo verso di percorrenza, concorde alla normale uscente

$\partial S :=$

- c)** Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 3)** Sia $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e sia ω la forma differenziale lineare

$$\omega = -\frac{y^2}{x^2 + y^4} dx + \frac{xy}{x^2 + y^4} dy.$$

Dire se ω è:

- (a) chiusa e esatta (in A);

- (b) chiusa, ma non esatta (in A);
- (c) esatta, ma non chiusa (in A);
- (d) né chiusa, né esatta (in A).


Esonero 15 Dicembre 2025

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

- 1)** Calcolare il flusso del campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (xy^2 + \sin(yz^5), x^2y - \arctan(2xz), \frac{1}{3}z^3 + e^{4x^2y})$ uscente da S , quando S è la frontiera di $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$.

Scrivere espressamente $\text{Fr}(E)$

Fr(E)

Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 2)** Sia $F = xz\vec{i} + yz\vec{j} + (x + \log(1 + y^2z^2))\vec{k}$. Determinare il flusso del rotore di F uscente dalla superficie parabolica $z + 3 = x^2 + y^2$, limitata da $z = 6$.

- a)** Scrivere la normale uscente alla superficie S in ogni suo punto

$n_e =$

- b)** Scrivere il bordo della superficie con il suo verso di percorrenza, concorde alla normale uscente

$\partial S :=$

- c)** Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 3)** Sia $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e sia ω la forma differenziale lineare

$$\omega = -\frac{\cos y}{x^2 + \sin^2 y} dx + \frac{x \sin y}{x^2 + \sin^2 y} dy.$$

Dire se ω è:

- (a) chiusa e esatta (in A);

- (b) chiusa, ma non esatta (in A);
- (c) esatta, ma non chiusa (in A);
- (d) né chiusa, né esatta (in A).


Esonero 15 Dicembre 2025

Svolgere gli esercizi riportando nel foglio solo le risposte richieste

- 1)** Calcolare il flusso del campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (7y^2z^3 + xz^2, \frac{1}{3}y^3 - e^{3x^2z}, \log(1 + x^2 + y^2) + x^2z)$ uscente da S , quando S è la frontiera di $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0\}$.

Scrivere espressamente $\text{Fr}(E)$

$\text{Fr}(E)$

Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 2)** Sia $F = -y\vec{i} + 2x\vec{j} + (x^2y - \arctan(z))\vec{k}$. Determinare il flusso del rotore di F uscente dalla superficie parabolica $z = 4 - (x^2 + y^2)$, limitata da $z = 0$.

- a)** Scrivere la normale uscente alla superficie S in ogni suo punto

$n_e =$

- b)** Scrivere il bordo della superficie con il suo verso di percorrenza, concorde alla normale uscente

$\partial S :=$

- c)** Dire quale tecnica è stata utilizzata per calcolare il flusso e dire quanto viene

metodo _____ flusso =

- 3)** Sia $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e sia ω la forma differenziale lineare

$$\omega = -\frac{xy^2}{x^2 + y^2} dx + \frac{x^2y}{x^2 + y^2} dy.$$

Dire se ω è:

- (a) chiusa e esatta (in A);

- (b) chiusa, ma non esatta (in A);
- (c) esatta, ma non chiusa (in A);
- (d) né chiusa, né esatta (in A).

Cenni di svolgimento

1A E è una semisfera piena. La sua frontiera è data da:

$$Fr(E) = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq a^2\} \cup \{(x, y, z) : z > 0 \text{ \& } x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

Calcoliamo il flusso facendo uso del teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \iint_{Fr(E)} F \cdot n_e dS &= \iiint_E \nabla \cdot F dx dy dz = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^4 dr = \frac{2}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

2A Il paraboloide $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ è una superficie regolare di classe C^2 con $n_e = (x, y, -1)$, è orientabile e $Z : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Il bordo della superficie è pertanto $\partial S := \{(2 \cos t, 2 \sin t, 2), 2\pi \geq t \geq 0\}$, questo perché il verso di percorrenza del bordo deve essere concorde con la normale (un osservatore che percorre il bordo, con la testa orientata come la normale, deve lasciare alla propria sinistra la superficie). Per il calcolo del flusso utilizziamo il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times F \cdot n_e dS &= \int_{\partial S} 3y dx - xz dy + yz^2 dz = \\ &= \int_{2\pi}^0 [3(2 \sin t)(-2 \sin t) - 2(2 \cos t)(2 \cos t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (12 \sin^2 t + 8 \cos^2 t) dt = 20\pi. \end{aligned}$$

3A Scriviamo $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, $\omega \in C^1(A)$ e

$$P(x, y) = -\frac{\sin(2y)}{x^2 + \sin^2(2y)}, \quad Q(x, y) = \frac{x \cos(2y)}{x^2 + \sin^2(2y)}.$$

Per verificare se ω è chiusa, è sufficiente calcolare

$$Q'_x - P'_y = \frac{(x^2 - \sin^2(2y)) \cos(2y)}{(x^2 + \sin^2(2y))^2}.$$

Notiamo che l'espressione precedente non è identicamente nulla su A : ad esempio, per $y = 0$ si ha $\cos(2y) = 1$ e quindi

$$Q'_x - P'_y = \frac{x^2}{(x^2)^2} = \frac{1}{x^2} \neq 0 \quad \text{per } x \neq 0.$$

Quindi ω non è una forma chiusa su A . Poiché ogni forma differenziale lineare esatta e di classe C^1 è necessariamente chiusa, l'impossibilità di essere chiusa esclude anche l'esattezza. Quindi ω non è né esatta, né chiusa. Visto che non è chiusa non ammette potenziali.

1B E è una semisfera piena. La sua frontiera è data da:

$$Fr(E) = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq a^2\} \cup \{(x, y, z) : z < 0 \text{ \& } x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

Calcoliamo il flusso facendo uso del teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \iint_{Fr(E)} F \cdot n_e dS &= \iiint_E \nabla \cdot F dx dy dz = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^4 dr = \frac{2}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

2B Il paraboloido $z = 1 - (x^2 + y^2)$ è una superficie regolare di classe C^2 con $n_e = (2x, 2y, 1)$, è orientabile e $Z : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Il bordo della superficie è pertanto $\partial S := \{(2 \cos t, 2 \sin t, -3), 0 \leq t \leq 2\pi\}$, questo perché il verso di percorrenza del bordo deve essere concorde con la normale (un osservatore che percorre il bordo, con la testa orientata come la normale, deve lasciare alla propria sinistra la superficie). Per il calcolo del flusso utilizziamo il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times F \cdot n_e dS &= \int_{\partial S} -xz dx + 3y dy + e^{yz^2} dz = \\ &= \int_0^{2\pi} [-(2 \cos t)(-3)(-2 \sin t) + 3(2 \sin t)(2 \cos t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-12 \sin t \cos t + 12 \sin t \cos t) dt = 0. \end{aligned}$$

3B Scriviamo $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, $\omega \in C^1(A)$ e

$$P(x, y) = -\frac{y^2}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Per verificare se ω è chiusa, è sufficiente calcolare

$$Q'_x - P'_y = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

Notiamo che l'espressione precedente non è identicamente nulla su A : ad esempio, per $x = 0$ si ha

$$Q'_x - P'_y = \frac{2y^3}{(y^2)^2} = \frac{2}{y} \neq 0 \quad \text{per } y \neq 0.$$

Quindi ω non è una forma chiusa su A . Poiché ogni forma differenziale lineare esatta e di classe C^1 è necessariamente chiusa, l'impossibilità di essere chiusa esclude anche l'esattezza. Quindi ω non è né esatta, né chiusa. Visto che non è chiusa non ammette potenziali.

1C E è una semisfera piena. La sua frontiera è data da:

$$Fr(E) = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq a^2\} \cup \{(x, y, z) : z > 0 \text{ \& } x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

Calcoliamo il flusso facendo uso del teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \iint_{Fr(E)} F \cdot n_e dS &= \iiint_E \nabla \cdot F dx dy dz = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^4 dr = \frac{2}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

2C Il paraboloide $\frac{z}{2} = x^2 + y^2$ è una superficie regolare di classe C^2 con $n_e = (4x, 4y, -1)$, è orientabile e $Z : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Il bordo della superficie è pertanto $\partial S := \{(2 \cos t, 2 \sin t, 8), 2\pi \geq t \geq 0\}$, questo perché il verso di percorrenza del bordo deve essere concorde con la normale (un osservatore che percorre il bordo, con la testa orientata come la normale, deve lasciare alla propria sinistra la superficie). Per il calcolo del flusso utilizziamo il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times F \cdot n_e dS &= \int_{\partial S} yz dx + 5x dy + xe^y z dz = \\ &= \int_{2\pi}^0 [8(2 \sin t)(-2 \sin t) + 5(2 \cos t)(2 \cos t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (32 \sin^2 t - 20 \cos^2 t) dt = 12\pi. \end{aligned}$$

3C Scriviamo $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, $\omega \in C^1(A)$ e

$$P(x, y) = -\frac{\cos y}{x^2 + \cos^2 y}, \quad Q(x, y) = \frac{x \sin y}{x^2 + \cos^2 y}.$$

Per verificare se ω è chiusa, è sufficiente calcolare

$$Q'_x - P'_y = \frac{2 \sin y (\cos^2 y - x^2)}{(x^2 + \cos^2 y)^2}.$$

Notiamo che l'espressione precedente non è identicamente nulla su A : ad esempio, per $x = 0$ e quindi

$$Q'_x - P'_y = \frac{2 \sin y}{\cos^2 y} \neq 0 \quad \text{per } y \neq 0.$$

Quindi ω non è una forma chiusa su A . Poiché ogni forma differenziale lineare esatta e di classe C^1 è necessariamente chiusa, l'impossibilità di essere chiusa esclude anche l'esattezza. Quindi ω non è né esatta, né chiusa. Visto che non è chiusa non ammette potenziali.

1D E è una semisfera piena. La sua frontiera è data da:

$$Fr(E) = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq a^2\} \cup \{(x, y, z) : z < 0 \text{ \& } x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

Calcoliamo il flusso facendo uso del teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \iint_{Fr(E)} F \cdot n_e dS &= \iiint_E \nabla \cdot F dx dy dz = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^4 dr = \frac{2}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

2D Il paraboloido $z = -\frac{x^2+y^2}{3}$ è una superficie regolare di classe C^2 con $n_e = (\frac{2}{3}x, \frac{2}{3}y, 1)$, è orientabile e $Z : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$. Il bordo della superficie è pertanto $\partial S := \{(3 \cos t, 3 \sin t, -3), 0 \leq t \leq 2\pi\}$, questo perché il verso di percorrenza del bordo deve essere concorde con la normale (un osservatore che percorre il bordo, con la testa orientata come la normale, deve lasciare alla propria sinistra la superficie). Per il calcolo del

flusso utilizziamo il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times F \cdot n_e dS &= \int_{\partial S} \frac{1}{3} yz dx - \frac{1}{3} x dy + (x^2 y - xz) dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} (3 \sin t)(-3)(-3 \sin t) - \frac{1}{3} (3 \cos t)(3 \cos t) \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (9 \sin^2 t - 3 \cos^2 t) dt = 6\pi. \end{aligned}$$

3D Scriviamo $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, $\omega \in C^1(A)$ e

$$P(x, y) = -\frac{y^2}{x^2 + y^4}, \quad Q(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^4}.$$

Per verificare se ω è chiusa, è sufficiente calcolare

$$Q'_x - P'_y = \frac{y(y^4 - x^2)}{(x^2 + y^4)^2} - \frac{2y(y^4 - x^2)}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{y(x^2 - y^4)}{(x^2 + y^4)^2}$$

Notiamo che l'espressione precedente non è identicamente nulla su A : ad esempio, per $x = 0$ si ha

$$Q'_x - P'_y = \frac{-y^5}{(y^4)^2} = -\frac{1}{y^3} \neq 0 \quad \text{per } y \neq 0.$$

Quindi ω non è una forma chiusa su A . Poiché ogni forma differenziale lineare esatta e di classe C^1 è necessariamente chiusa, l'impossibilità di essere chiusa esclude anche l'esattezza. Quindi ω non è né esatta, né chiusa. Visto che non è chiusa non ammette potenziali.

1E E è una semisfera piena. La sua frontiera è data da:

$$Fr(E) = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq a^2\} \cup \{(x, y, z) : z > 0 \text{ \& } x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

Calcoliamo il flusso facendo uso del teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \iint_{Fr(E)} F \cdot n_e dS &= \iiint_E \nabla \cdot F dx dy dz = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^4 dr = \frac{2}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

2E Il paraboloido $z + 3 = x^2 + y^2$ è una superficie regolare di classe C^2 con $n_e = (2x, 2y, -1)$, è orientabile e $Z : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$. Il bordo della superficie è pertanto $\partial S := \{(3 \cos t, 3 \sin t, 6), 2\pi \geq t \geq 0\}$, questo perché il verso di percorrenza del bordo deve essere concorde con la normale (un osservatore che percorre il bordo, con la testa orientata come la normale, deve lasciare alla propria sinistra la superficie). Per il calcolo del flusso utilizziamo il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times F \cdot n_e dS &= \int_{\partial S} xz dx + yz dy + (x + \log(1 + y^2 z^2)) dz = \\ &= \int_{2\pi}^0 [6(3 \cos t)(-3 \sin t) + 6(3 \sin t)(3 \cos t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (54 \cos t \sin t - 54 \cos t \sin t) dt = 0. \end{aligned}$$

3E Scriviamo $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, $\omega \in C^1(A)$ e

$$P(x, y) = -\frac{\cos y}{x^2 + \sin^2 y}, \quad Q(x, y) = \frac{x \sin y}{x^2 + \sin^2 y}.$$

Per verificare se ω è chiusa, è sufficiente calcolare

$$Q'_x - P'_y = -\frac{2(x^2 + \sin y \cos^2 y)}{(x^2 + \sin^2 y)^2}.$$

Notiamo che l'espressione precedente non è identicamente nulla su A : ad esempio, per $y = 0$ e quindi

$$Q'_x - P'_y = -\frac{2x^2}{(x^2)^2} = -\frac{2}{x^2} \neq 0 \quad \text{per } x \neq 0.$$

Quindi ω non è una forma chiusa su A . Poiché ogni forma differenziale lineare esatta e di classe C^1 è necessariamente chiusa, l'impossibilità di essere chiusa esclude anche l'esattezza. Quindi ω non è né esatta, né chiusa. Visto che non è chiusa non ammette potenziali.

1F E è una semisfera piena. La sua frontiera è data da:

$$Fr(E) = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq a^2\} \cup \{(x, y, z) : z < 0 \text{ \& } x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

Calcoliamo il flusso facendo uso del teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \iint_{Fr(E)} F \cdot n_e dS &= \iiint_E \nabla \cdot F dx dy dz = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^4 dr = \frac{2}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

2F Il paraboloide $z = 4 - (x^2 + y^2)$ è una superficie regolare di classe C^2 con $n_e = (2x, 2y, 1)$, è orientabile e $Z : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Il bordo della superficie è pertanto $\partial S := \{(2 \cos t, 2 \sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi\}$, questo perché il verso di percorrenza del bordo deve essere concorde con la normale (un osservatore che percorre il bordo, con la testa orientata come la normale, deve lasciare alla propria sinistra la superficie). Per il calcolo del flusso utilizziamo il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times F \cdot n_e dS &= \int_{\partial S} -y dx + 2x dy + (x^2 y - \arctan(z)) dz = \\ &= \int_0^{2\pi} [(-2 \sin t)(-2 \sin t) + 2(2 \cos t)(2 \cos t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 t + 8 \cos^2 t) dt = 12\pi. \end{aligned}$$

3F Scriviamo $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, $\omega \in C^1(A)$ e

$$P(x, y) = -\frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Per verificare se ω è chiusa, è sufficiente calcolare

$$Q'_x - P'_y = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Notiamo che l'espressione precedente non è identicamente nulla su A : ad esempio, per $y = x$ si ha

$$Q'_x - P'_y = \frac{2x^2}{2x^2} = 1 \neq 0 \quad \text{per } x \neq 0.$$

Quindi ω non è una forma chiusa su A . Poiché ogni forma differenziale lineare esatta e di classe C^1 è necessariamente chiusa, l'impossibilità di essere chiusa esclude anche l'esattezza. Quindi ω non è né esatta, né chiusa. Visto che non è chiusa non ammette potenziali.



Esonero 15 Dicembre 2025

iscritto al secondo anno di corso SI NO

BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

1G) Sia $F = (x-z, x^2 + yz, -3xy^2)$ e Σ la porzione di superficie conica determinata da $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$. Scrivere la superficie in coordinate cilindriche, determinare il flusso del rotore di F uscente da Σ sia direttamente che facendo uso del teorema di Stokes.

2G) Sia F il campo di forze $F(x, y, z) = (2xz^3 + 6y, 6x - 2yz, 3x^2z^2 - y^2)$. Provare che è conservativo e calcolare poi l'integrale curvilineo $\int_C F dr$ lungo la curva C che congiunge $(1, -1, 1)$ e $(2, 1, -1)$.

Cenni di svolgimento

1G Ponendo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, si ha

$$z = 2 - r, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Pertanto, una parametrizzazione di Σ è $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 2 - r)$ e la normale uscente, orientata verso l'esterno, è data da:

$$n_e := \Phi_r \times \Phi_\theta = (r \cos \theta, r \sin \theta, r).$$

Risulta

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x-z & x^2 + yz & -3xy^2 \end{vmatrix} = (-6xy - y, 3y^2 - 1, 2x).$$

Per il calcolo diretto del flusso, osserviamo che

$$(\nabla \times F) \cdot n_e = -6r^3 \sin \theta \cos^2 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta + 3r^3 \sin^3 \theta - r \sin \theta + 2r^2 \cos \theta$$

Attenzione qui, non abbiamo normalizzato il vettore, ma sfruttiamo il fatto che $n_e dr d\theta = \text{versore}(n_e) dS$. Integrando su $D = \{0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\nabla \times F) \cdot \mathbf{n} dS &= \\ \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-6r^3 \sin \theta \cos^2 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta + 3r^3 \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) - r \sin \theta + & \\ 2r^2 \cos \theta) dr d\theta &= \\ \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-9r^3 \sin \theta \cos^2 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta + 3r^3 \sin \theta - r \sin \theta + 2r^2 \cos \theta) dr d\theta &= \\ 9 \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 \cdot \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{2\pi} - \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 \cdot \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{2\pi} - 3 \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 \cdot \left[\cos \theta \right]_0^{2\pi} + & \\ \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 \cdot \left[\cos \theta \right]_0^{2\pi} + 2 \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 \cdot \left[\sin \theta \right]_0^{2\pi} &= 0 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il flusso mediante il teorema di Stokes. La superficie Σ , nella sua espressione in coordinate cilindriche è regolare, di classe C^2 , orientabile

e con bordo $\partial\Sigma$ dato dalla circonferenza $C : x^2 + y^2 = 4, z = 0$ orientata positivamente (in verso antiorario). Una sua parametrizzazione è $\gamma(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0), 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Si ha

$$F(\gamma) = (2 \cos \theta, 4 \cos^2 \theta, -24 \cos \theta \sin^2 \theta), \quad \gamma'(\theta) = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0).$$

Quindi

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-4 \cos \theta \sin \theta + 8 \cos^3 \theta) d\theta = 0.$$

Il risultato coincide con il calcolo diretto.

2G) Scriviamo

$$F = (P, Q, R), \quad P = 2xz^3 + 6y, \quad Q = 6x - 2yz, \quad R = 3x^2z^2 - y^2.$$

Il campo vettoriale è di classe C^1 in \mathbb{R}^3 , proviamo che è irrotazionale:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = ((-2y) - (-2y), 6xz^2 - 6xz^2, 6 - 6) = (0, 0, 0)$$

e poiché \mathbb{R}^3 è semplicemente connesso, il campo F è conservativo. Calcoliamo la classe dei potenziali a partire da $(0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y 6x dt + \int_0^z (3x^2 t^2 - y^2) dt \\ &= 6xy + x^2 z^3 - y^2 z + c. \end{aligned}$$

Sia C una qualunque curva che congiunge i punti $A = (1, -1, 1), B = (2, 1, -1)$.

Poiché il campo è conservativo,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\mathbf{r} &= U(B) - U(A) = U(2, 1, -1) - U(1, -1, 1) = \\ &= 2^2(-1)^3 + 6 \cdot 2 \cdot 1 - 1^2(-1) - (1^2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1 \cdot (-1) - (-1)^2 \cdot 1) = 15 \end{aligned}$$

**Esonero 30 Marzo 2026**Civile Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Si verifichi che l'equazione $f(x, y) = e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1 = 0$ definisce implicitamente $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$ con $y(0) = -1$. Si dimostri che $x = 0$ è un punto di minimo per $y(x)$.

2) Sia $f(x, y) = |xy|(x + y - 1)$

a) Esiste f'_y nei punti $(x_0, 0)$?

se e solo se $x_0 = 0$ oppure $x_0 = 1$

b) f è differenziabile in $(0, 0)$?

si

c) Che comportamento ha la funzione f nei punti $(x_0, 0)$ con $x_0 < 1$?

punti di massimo relativo

d) Che comportamento ha la funzione f in $(1, 0)$?

punto sella

3) Si determinino i punti di massimo e minimo vincolati assoluti della funzione $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ soggetta al vincolo $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.



Esonero 30 Marzo 2026

Civile Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Si verifichi che l'equazione $f(x, y) = y(e^y + x - 2) - \ln x = 0$ definisce implicitamente $x = x(y)$ in un intorno di $y = 0$ con $x(0) = 1$. Si dimostri che $y = 0$ è un punto di minimo per $x(y)$.

2) Sia $f(x, y) = |xy|(x + y - 1)$

a) Esiste f'_x nei punti $(0, y_0)$?

se e solo se $y_0 = 0$ oppure $y_0 = 1$

b) f è differenziabile in $(0, 1)$?

si

c) Che comportamento ha la funzione f nei punti $(0, y_0)$ con $y_0 < 1$?

punti di massimo relativo

d) Che comportamento ha la funzione f in $(0, 1)$?

punto sella

3) Si determinino i punti di massimo e minimo vincolati assoluti della funzione $f(x, y, z) = (-x - y + z)^2$ soggetta al vincolo $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Esonero 30 Marzo 2026

Civile Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Si verifichi che l'equazione $f(x, y) = y^2 + e^{y-x} - x^2 - e(y + 1) + 1 = 0$ definisce implicitamente $x = x(y)$ in un intorno di $y = 0$ con $x(0) = -1$. Si dimostri che $y = 0$ è un punto di minimo per $x(y)$.

2) Sia $f(x, y) = |xy|(x + y - 1)$

a) Esiste f'_y nei punti $(x_0, 0)$?

se e solo se $x_0 = 0$ oppure $x_0 = 1$

b) f è differenziabile in $(1, 0)$?

si

c) Che comportamento ha la funzione f nei punti $(x_0, 0)$ con $x_0 > 1$?

punti di minimo relativo

d) Che comportamento ha la funzione f in $(1, 0)$?

punto sella

3) Si determinino i punti di massimo e minimo vincolati assoluti della funzione $f(x, y, z) = (x - y + z)^2$ soggetta al vincolo $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$.

**Esonero 30 Marzo 2026**Civile Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Si verifichi che l'equazione $f(x, y) = 1 - \cos(y^2 + x) + \sin(y + x^2) = 0$ definisce implicitamente $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$ con $y(0) = 0$. Si dimostri che $x = 0$ è un punto di massimo per $y(x)$.

2) Sia $f(x, y) = |xy|(x + y - 1)$

a) Esiste f'_x nei punti $(0, y_0)$?

se e solo se $y_0 = 0$ oppure $y_0 = 1$

b) f è differenziabile in $(0, 0)$?

si

c) Che comportamento ha la funzione f nei punti $(0, y_0)$ con $y_0 > 1$?

punti di minimo relativo

d) Che comportamento ha la funzione f in $(0, 0)$?

punto di massimo relativo

3) Si determinino i punti di massimo e minimo vincolati assoluti della funzione $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ soggetta al vincolo $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

**Esonero 30 Marzo 2026**Civile Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Si verifichi che l'equazione $f(x, y) = x(e^x + y - 2) - \ln y = 0$ definisce implicitamente $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$ con $y(0) = 1$. Si dimostri che $x = 0$ è un punto di minimo per $y(x)$.

2) Sia $f(x, y) = |xy|(x + y - 1)$

a) Esiste f'_y nei punti $(x_0, 0)$?

se e solo se $x_0 = 0$ oppure $x_0 = 1$

b) f è differenziabile in $(1, 0)$?

si

c) Che comportamento ha la funzione f nei punti $(x_0, 0)$ con $x_0 < 1$?

punti di massimo relativo

d) Che comportamento ha la funzione f in $(0, 0)$?

punto di massimo relativo

3) Si determinino i punti di massimo e minimo vincolati assoluti della funzione $f(x, y, z) = (-x - y + z)^2$ soggetta al vincolo $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Esonero 30 Marzo 2026

Civile Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Si verifichi che l'equazione $f(x, y) = 1 - \cos(x^2 + y) + \sin(x + y^2) = 0$ definisce implicitamente $x = x(y)$ in un intorno di $y = 0$ con $x(0) = 0$. Si dimostri che $y = 0$ è un punto di massimo per $x(y)$.

2) Sia $f(x, y) = |xy|(x + y - 1)$

a) Esiste f'_x nei punti $(0, y_0)$?

se e solo se $y_0 = 0$ oppure $y_0 = 1$

b) f è differenziabile in $(0, 1)$?

si

c) Che comportamento ha la funzione f nei punti $(0, y_0)$ con $y_0 < 1$?

punti di massimo relativo

d) Che comportamento ha la funzione f in $(0, 1)$?

punto sella

3) Si determinino i punti di massimo e minimo vincolati assoluti della funzione $f(x, y, z) = (x - y + z)^2$ soggetta al vincolo $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$.

Cenni di svolgimento

1A) Risulta $f(0, -1) = 0$, inoltre $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $\nabla f = (e^{x-y} + 2x - e, -e^{x-y} - 2y)$.

$\nabla f(0, -1) = (0, 2 - e)$, quindi per il Teorema di Dini, la f è esplicitabile in un intorno $U_{x=0} = [-a, a]$ come $y = y(x)$ con $y \in C^2([-a, a])$ in modo che:

- $y(0) = -1$;
- $e^{x-y(x)} + x^2 - y(x)^2 - e(x+1) + 1 = 0$ per ogni $x \in [-a, a]$;
- $y'(x) = \frac{e^{x-y(x)} + 2x - e}{e^{x-y(x)} + 2y(x)}$.

Risulta ovviamente $y'(0) = 0$, calcoliamo ora y'' . Poniamo

$$\begin{aligned} N(x) &= e^{x-y(x)} + 2x - e & N(0) &= 0 \\ D(x) &= e^{x-y(x)} + 2y(x), & D(0) &= e - 2 \\ N'(x) &= e^{x-y(x)}(1 - y'(x)) + 2, & N'(0) &= e + 2 \\ D'(x) &= e^{x-y(x)}(1 - y'(x)) + 2y'(x), & D'(0) &= e \\ y''(x) &= \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{D^2(x)} \\ y''(0) &= \frac{(e+2) \cdot (e-2)}{(e-2)^2} = \frac{e+2}{e-2} > 0. \end{aligned}$$

Pertanto $x = 0$ è un punto di minimo per $y = y(x)$.

1B) Risulta $f(1, 0) = 0$, inoltre $f \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ e $\nabla f = (y - \frac{1}{x}, (e^y + x - 2) + ye^y)$.

$\nabla f(1, 0) = (-1, 0)$, quindi per il Teorema di Dini, la f è esplicitabile in un intorno $U_{y=0} = [-a, a]$ come $x = x(y)$ con $x \in C^2([-a, a])$ in modo che:

- $x(0) = 1$;
- $y(e^y + x(y) - 2) - \ln(x(y)) = 0$ per ogni $y \in [-a, a]$;
- $x'(y) = \frac{(e^y + x(y) - 2) + ye^y}{\frac{1}{x(y)} - y}$.

Risulta ovviamente $x'(0) = 0$, calcoliamo ora x'' . Poniamo

$$\begin{aligned} N(y) &= e^y + x(y) - 2 + ye^y, & N(0) &= 0 \\ D(y) &= \frac{1}{x(y)} - y, & D(0) &= 1 \\ N'(y) &= e^y + x'(y) + e^y + ye^y = 2e^y + ye^y + x'(y), & N'(0) &= 2 \\ D'(y) &= \left(-\frac{x'(y)}{x(y)^2} \right) - 1, & D'(0) &= -1 \\ x''(0) &= \frac{N'(0)D(0) - N(0)D'(0)}{D(0)^2} = 2. \end{aligned}$$

Quindi $y = 0$ è un punto di minimo locale per la funzione $x(y)$.

1C) Risulta $f(-1, 0) = 0$, inoltre $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $\nabla f = (-e^{y-x} - 2x, e^{y-x} + 2y - e)$.
 $\nabla f(-1, 0) = (2 - e, 0)$, quindi per il Teorema di Dini, la f è esplicitabile in un intorno $U_{y=0} = [-a, a]$ come $x = x(y)$ con $x \in C^2([-a, a])$ in modo che:

- $x(0) = -1$;
- $y^2 + e^{y-x(y)} - x^2(y) - e(y+1) + 1 = 0$ per ogni $y \in [-a, a]$;
- $x'(y) = \frac{e^{y-x(y)} + 2y - e}{e^{y-x(y)} + 2x(y)}$.

Risulta ovviamente $x'(0) = 0$, calcoliamo ora x'' . Poniamo

$$\begin{aligned} N(y) &= e^{y-x(y)} + 2y - e & N(0) &= 0 \\ D(y) &= e^{y-x(y)} + 2x(y), & D(0) &= e - 2 \\ N'(y) &= e^{y-x(y)}(1 - x'(y)) + 2, & N'(0) &= e + 2 \\ D'(y) &= e^{y-x(y)}(1 - x'(y)) + 2x'(y), & D'(0) &= e \\ x''(y) &= \frac{N'(y)D(y) - N(y)D'(y)}{D^2(y)} \\ x''(0) &= \frac{(e+2) \cdot (e-2)}{(e-2)^2} = \frac{e+2}{e-2} > 0. \end{aligned}$$

Pertanto $y = 0$ è un punto di minimo per $x = x(y)$.

1D) Risulta $f(0, 0) = 0$, inoltre $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e

$$\nabla f = \left(+\sin(y^2 + x) + 2x \cos(y + x^2), +2y \sin(y^2 + x) + \cos(y + x^2) \right).$$

$\nabla f(0, 0) = (0, 1)$, quindi per il Teorema di Dini, la f è esplicitabile in un intorno $U_{x=0} = [-a, a]$ come $y = y(x)$ con $y \in C^2([-a, a])$ in modo che:

- $y(0) = 0$;
- $1 - \cos(y(x)^2 + x) + \sin(y(x) + x^2) = 0$ per ogni $x \in [-a, a]$;

•

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}.$$

Risulta

$$y'(0) = -\frac{f_x(0, 0)}{f_y(0, 0)} = 0.$$

Poniamo ora

$$N(x) = -f_x(x, y(x)) = -\sin(y(x)^2 + x) - 2x \cos(y(x) + x^2), \quad N(0) = 0$$

$$D(x) = f_y(x, y(x)) = 2y(x) \sin(y(x)^2 + x) + \cos(y(x) + x^2), \quad D(0) = 1$$

$$N'(x) = -\cos(y(x)^2 + x)(2y(x)y'(x) + 1) - 2 \cos(y(x) + x^2) + 4x^2 \sin(y(x) + x^2) + 2xy'(x) \sin(y(x) + x^2), \quad N'(0) = -3$$

$$D'(x) = 2y'(x) \sin(y(x)^2 + x) + 2y(x) \cos(y(x)^2 + x)(2y(x)y'(x) + 1) + -\sin(y(x) + x^2)(y'(x) + 2x) \quad D'(0) = 0$$

$$y''(0) = \frac{N'(0)D(0) - N(0)D'(0)}{D(0)^2} = -3.$$

Quindi $x = 0$ è un punto di massimo locale per la funzione $y = y(x)$.

1E) Risulta $f(0, 1) = 0$, inoltre $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ e

$$\nabla f = ((e^x + y - 2) + xe^x, x - \frac{1}{y}).$$

$\nabla f(0, 1) = (0, -1)$, quindi per il Teorema di Dini, la f è esplicitabile in un intorno $U_{x=0} = [-a, a]$ come $y = y(x)$ con $y \in C^2([-a, a])$ in modo che:

- $y(0) = 1$;
- $x(e^x + y(x) - 2) - \ln(y(x)) = 0$ per ogni $x \in [-a, a]$;
- $y'(x) = \frac{(e^x + y(x) - 2) + xe^x}{\frac{1}{y(x)} - x}.$

Risulta ovviamente $y'(0) = 0$, calcoliamo ora y'' . Poniamo

$$\begin{aligned} N(x) &= e^x + y(x) - 2 + xe^x, & N(0) &= 0 \\ D(x) &= \frac{1}{y(x)} - x, & D(0) &= 1 \\ N'(x) &= 2e^x + xe^x + y'(x), & N'(0) &= 2 \\ D'(x) &= \left(-\frac{y'(x)}{y(x)^2}\right) - 1, & D'(0) &= -1 \\ y''(0) &= \frac{N'(0)D(0) - N(0)D'(0)}{D^2(0)} = 2. \end{aligned}$$

Quindi $x = 0$ è un punto di minimo locale per la funzione $y(x)$.

1F) Risulta $f(0, 0) = 0$, inoltre $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e

$$\nabla f = (2x \sin(x^2 + y) + \cos(x + y^2), \sin(x^2 + y) + 2y \cos(x + y^2)).$$

Si ha quindi

$$\nabla f(0, 0) = (1, 0),$$

quindi per il Teorema di Dini la f è esplicitabile in un intorno $U_{y=0} = [-a, a]$ come $x = x(y)$ con $x \in C^2([-a, a])$ in modo che:

- $x(0) = 0$;
- $1 - \cos(x(y)^2 + y) + \sin(x(y) + y^2) = 0$ per ogni $y \in [-a, a]$;
-

$$x'(y) = -\frac{f_y(x(y), y)}{f_x(x(y), y)}.$$

Risulta

$$x'(0) = -\frac{f_y(0, 0)}{f_x(0, 0)} = 0.$$

Poniamo ora

$$N(y) = -f_y(x(y), y) = -\sin(x(y)^2 + y) - 2y \cos(x(y) + y^2), \quad N(0) = 0,$$

$$D(y) = f_x(x(y), y) = 2x(y) \sin(x(y)^2 + y) + \cos(x(y) + y^2), \quad D(0) = 1,$$

$$N'(y) = -\cos(x(y)^2 + y) \cdot (2x(y)x'(y) + 1) - 2 \cos(x(y) + y^2) + \\ 4y^2 \sin(x(y) + y^2) + 2yx'(y) \sin(x(y) + y^2), \quad N'(0) = -3,$$

$$D'(y) = 2x'(y) \sin(x(y)^2 + y) + 2x(y) \cos(x(y)^2 + y) \cdot (2x(y)x'(y) + 1) + \\ -\sin(x(y) + y^2) \cdot (x'(y) + 2y), \quad D'(0) = 0,$$

$$x''(0) = \frac{N'(0)D(0) - N(0)D'(0)}{D(0)^2} = -3.$$

Quindi $y = 0$ è un punto di massimo locale per la funzione $x = x(y)$.

2) La funzione è definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se $xy \neq 0$, il segno di xy è costante in un intorno del punto e vale

$$|xy| = \begin{cases} xy & \text{se } xy > 0, \\ -xy & \text{se } xy < 0. \end{cases}$$

In tali regioni la funzione coincide con un polinomio.

- Caso $xy > 0$:

$$f(x, y) = xy(x + y - 1).$$

Allora

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(x + y - 1) + xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x(x + y - 1) + xy.$$

Caso $xy < 0$:

$$f(x, y) = -xy(x + y - 1),$$

per cui

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -[y(x + y - 1) + xy], \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -[x(x + y - 1) + xy].$$

- Studio sui punti con $xy = 0$

Derivata parziale rispetto a x nel punto $(0, y_0)$. Per $h \neq 0$:

$$\frac{|hy_0|}{h} = |y_0| \frac{|h|}{h} = |y_0| \operatorname{sgn}(h).$$

Quindi

$$\frac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = |y_0| \operatorname{sgn}(h)(h + y_0 - 1).$$

Calcoliamo i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} = |y_0|(y_0 - 1), \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} = -|y_0|(y_0 - 1).$$

Il limite esiste se e solo se coincidono, cioè se

$$|y_0|(y_0 - 1) = 0.$$

Pertanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) \text{ esiste} \iff y_0 = 0 \text{ oppure } y_0 = 1.$$

In tali casi il valore della derivata è 0.

- Derivata parziale rispetto a y nel punto $(x_0, 0)$

Analogamente,

$$\frac{f(x_0, k) - f(x_0, 0)}{k} = \frac{|x_0 k|(x_0 + k - 1)}{k}.$$

Allora

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} = |x_0|(x_0 - 1), \quad \lim_{k \rightarrow 0^-} = -|x_0|(x_0 - 1).$$

Il limite esiste se e solo se

$$|x_0|(x_0 - 1) = 0,$$

cioè

$$x_0 = 0 \text{ oppure } x_0 = 1.$$

Anche in questo caso la derivata vale 0. Dunque le derivate parziali di f esistono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{per tutti i punti con } xy \neq 0, \\ \text{nei punti } (0, 0), (0, 1), (1, 0). \end{array} \right.$$

- Determiniamo ora i punti di differenziabilità della f .

Nei punti tali che $xy \neq 0$ f è un polinomio e dunque è di classe C^∞ in tali punti. In particolare è differenziabile in tutti i punti tali che $xy \neq 0$. Resta da studiare la differenziabilità nei punti $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, nei punti rimanenti non può esserlo perché non ammette gradiente.

Studio nel punto $(0, 0)$

Poiché $f(0, 0) = 0$, e dalle derivate parziali calcolate in precedenza risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

Allora f è differenziabile nel punto solo se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy||x+y-1|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

In un intorno dell'origine la funzione $|x+y-1|$ è limitata, ad esempio

$$|x+y-1| \leq C$$

per qualche costante $C > 0$.

Inoltre vale la disuguaglianza

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Dunque

$$\frac{|xy||x+y-1|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq C \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Poiché

$$C\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

segue che il limite è zero.

Quindi f è differenziabile in $(0, 0)$.

- Differenziabilità nel punto $(0, 1)$

Si ha $f(0, 1) = 0$. Dalle derivate parziali risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 0.$$

Verifichiamo la definizione:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{|xy||x+y-1|}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}.$$

Poniamo $u = x$, $v = y - 1$. Allora $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ e

$$x + y - 1 = u + v, \quad y = 1 + v.$$

Quindi

$$f(x, y) = |u(1 + v)||u + v|.$$

Per (u, v) piccoli, $|1 + v|$ è limitato inferiormente e superiormente; in particolare esiste $C > 0$ tale che

$$|1 + v| \leq C.$$

Allora

$$|f(x, y)| \leq C|u||u + v|.$$

Poiché

$$|u + v| \leq \sqrt{2}\sqrt{u^2 + v^2},$$

si ottiene

$$|f(x, y)| \leq C\sqrt{2}|u|\sqrt{u^2 + v^2}.$$

Dividendo per $\sqrt{u^2 + v^2}$:

$$\frac{|f(x, y)|}{\sqrt{u^2 + v^2}} \leq C\sqrt{2}|u| \rightarrow 0.$$

Dunque f è differenziabile in $(0, 1)$.

- Differenziabilità nel punto $(1, 0)$

Si procede in modo del tutto analogo al caso precedente ponendo

$$u = x - 1, \quad v = y.$$

Si ottiene ancora una stima del tipo

$$|f(x, y)| \leq C|v|\sqrt{u^2 + v^2},$$

da cui segue che il rapporto incrementale tende a zero. Quindi f è differenziabile in $(1, 0)$.

- lo studio del segno di f ci permette di dire che $(0, 1)$ e $(1, 0)$ sono punti sella; i punti $(h, 0)$ e $(0, k)$ con $h < 1, k < 1$ sono di massimo relativo; se invece $h > 1, k > 1$ sono di minimo relativo.

3A,3D) Possiamo osservare che $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ e $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$ sono funzioni di classe almeno $C^2(\mathbb{R}^3)$. Inoltre $f(x, y, z) \geq 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ne segue che i punti

$$\{(x, y, z) : z = -x - y \quad \& \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0\}$$

sono di minimo assoluto per f . La prima è l'equazione di un piano, la seconda quella di un ellissoide. Quindi i minimi assoluti si troveranno nei punti dell'ellisse che si ottiene intersecando le due figure.

Osserviamo che l'ellissoide è un compatto, f è continua e dunque per il Teorema di Weierstrass ammetterà anche massimi assoluti vincolati.

Infine $Z_g \cap \nabla g = \emptyset$. Infatti $\nabla g = (2x, 4y, 6z) = (0, 0, 0)$ solo nell'origine e $(0, 0, 0) \notin Z_g$.

Costruiamo la Lagrangiana

$$L(x, y, z, a) = (x + y + z)^2 + a(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1)$$

e applichiamo a lei il Teorema di Fermat. Risulta

$$L'_x = 2(x + y + z) + 2ax = 0$$

$$L'_y = 2(x + y + z) + 4ay = 0$$

$$L'_z = 2(x + y + z) + 6az = 0$$

$$L'_a = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0.$$

Ricaviamo $2(x + y + z)$ dalle prime 3 equazioni. Eguagliando i termini si ottiene

$$2ax = 4ay, \quad 2ax = 6az.$$

Se $a = 0$ si riottengono i punti di minimo trovati precedentemente; se $a \neq 0$ allora $y = x/2, z = x/3$, che sostituiti nel vincolo forniscono

$$\left(\sqrt{\frac{6}{11}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{11}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{11}}\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{6}{11}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{11}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{11}}\right).$$

La funzione in questi due punti assume il valore $\frac{11}{6}$ che è quindi il massimo assoluto vincolato cercato.

3B,3E) Possiamo osservare che $f(x, y, z) = (-x - y + z)^2$ e $g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ sono funzioni di classe almeno $C^2(\mathbb{R}^3)$. Inoltre $f(x, y, z) \geq 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ne segue che i punti

$$\{(x, y, z) : z = x + y \quad \& \quad 2x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

sono di minimo assoluto per f . La prima è l'equazione di un piano, la seconda quella di un ellissoide. Quindi i minimi assoluti si troveranno nei punti dell'ellisse che si ottiene intersecando le due figure.

L'ellissoide è un compatto, f è continua e dunque per il Teorema di Weierstrass ammetterà anche massimi assoluti vincolati.

Osserviamo che $Z_g \cap \nabla g = \emptyset$. Infatti $\nabla g = (4x, 2y, 2z) = (0, 0, 0)$ solo nell'origine e $(0, 0, 0) \notin Z_g$.

Costruiamo la Lagrangiana

$$L(x, y, z, a) = (-x - y + z)^2 + a(2x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

e applichiamo a lei il Teorema di Fermat. Risulta

$$L'_x = -2(-x - y + z) + 4ax = 0$$

$$L'_y = -2(-x - y + z) + 2ay = 0$$

$$L'_z = 2(-x - y + z) + 2az = 0$$

$$L'_a = 2x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Ricaviamo $2(-x - y + z)$ dalle prime 3 equazioni. Eguagliando i termini si ottiene

$$4ax = 2ay, \quad 4ax = -2az.$$

Se $a = 0$ si riottengono i punti di minimo trovati precedentemente; se $a \neq 0$ allora $y = 2x$, $z = -2x$, che sostituiti nel vincolo forniscono

$$\left(\sqrt{\frac{1}{10}}, 2\sqrt{\frac{1}{10}}, -2\sqrt{\frac{1}{10}}\right), \quad \left(-\sqrt{\frac{1}{10}}, -2\sqrt{\frac{1}{10}}, 2\sqrt{\frac{1}{10}}\right),.$$

La funzione in questi due punti assume il valore $\frac{5}{2}$ che è quindi il massimo assoluto vincolato cercato.

3C,3F) Possiamo osservare che $f(x, y, z) = (x - y + z)^2$ e $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$ sono funzioni di classe almeno $C^2(\mathbb{R}^3)$. Inoltre $f(x, y, z) \geq 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ne segue che i punti

$$\{(x, y, z) : z = -x + y \quad \& \quad x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0\}$$

sono di minimo assoluto per f . La prima è l'equazione di un piano, la seconda quella di un ellissoide. Quindi i minimi assoluti si troveranno nei punti dell'ellisse che si ottiene intersecando le due figure.

L'ellissoide è un compatto, f è continua e dunque per il Teorema di Weierstrass ammetterà anche massimi assoluti vincolati.

Osserviamo che $Z_g \cap \nabla g = \emptyset$. Infatti $\nabla g = (2x, 4y, 4z) = (0, 0, 0)$ solo nell'origine e $(0, 0, 0) \notin Z_g$.

Costruiamo la Lagrangiana

$$L(x, y, z, a) = (x - y + z)^2 + a(x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1)$$

e applichiamo a lei il Teorema di Fermat. Risulta

$$L'_x = 2(x - y + z) + 2ax = 0$$

$$L'_y = -2(x - y + z) + 4ay = 0$$

$$L'_z = 2(x - y + z) + 4az = 0$$

$$L'_a = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0.$$

Ricaviamo $2(x - y + z)$ dalle prime 3 equazioni. Eguagliando i termini si ottiene

$$2ax = -4ay, \quad 2ax = 4az.$$

Se $a = 0$ si riottengono i punti di minimo trovati precedentemente; se $a \neq 0$ allora $y = -x/2$, $z = x/2$, che sostituiti nel vincolo forniscono

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

La funzione in questi due punti assume il valore $\frac{1}{2}$ che è quindi il massimo assoluto vincolato cercato.

**Esonero 23 Aprile 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $x^2 y''(x) + 2xy'(x) + y(x) = \ln x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.**a)** Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

$$y(x) =$$

b) scrivere una soluzione particolare della equazione completa

$$\bar{y}(x) =$$

c) Determinare le costanti che risolvono il problema di Cauchy

$$c_1 = \quad c_2 =$$

2) Risolvere il sistema: $y'(t) = x(t) + 3y(t)$, $x'(t) = 3x(t) + y(t)$.**a)** equazione di secondo grado associata

b) $x(t) =$

c) $y(t) =$

3) Risolvere l'equazione $y' - 2y = y^2$.

$$y(x) =$$

**Esonero 23 Aprile 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.**a)** Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

$$y(x) =$$

b) scrivere una soluzione particolare della equazione completa

$$\bar{y}(x) =$$

c) Determinare le costanti che risolvono il problema di Cauchy

$$c_1 = \quad c_2 =$$

2) Risolvere il sistema: $y'(t) = 2x(t) + y(t)$, $x'(t) = x(t) + 2y(t)$.**a)** equazione di secondo grado associata

b) $x(t) =$

c) $y(t) =$

3) Risolvere l'equazione $y' + 3y = y^2$.

$$y(x) =$$

**Esonero 23 Aprile 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $x^2y''(x) + 5xy'(x) + 6y(x) = 11x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.**a)** Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

$$y(x) =$$

b) scrivere una soluzione particolare della equazione completa

$$\bar{y}(x) =$$

c) Determinare le costanti che risolvono il problema di Cauchy

$$c_1 =$$

$$c_2 =$$

2) Risolvere il sistema: $y'(t) = x(t) + 4y(t)$, $x'(t) = 4x(t) + y(t)$.**a)** equazione di secondo grado associata

b) $x(t) =$

c) $y(t) =$

3) Risolvere l'equazione $y' + 2y = y^2$.

$$y(x) =$$

**Esonero 23 Aprile 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.**a)** Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

$$y(x) =$$

b) scrivere una soluzione particolare della equazione completa

$$\bar{y}(x) =$$

c) Determinare le costanti che risolvono il problema di Cauchy

$$c_1 = \quad c_2 =$$

2) Risolvere il sistema: $y'(t) = x(t) + 2y(t)$, $x'(t) = 2x(t) + y(t)$.**a)** equazione di secondo grado associata

b) $x(t) =$

c) $y(t) =$

3) Risolvere l'equazione $y' + y = y^2$.

$$y(x) =$$

**Esonero 23 Aprile 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $x^2 y''(x) + 2xy'(x) + y(x) = \ln x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.

a) Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right)$$

b) scrivere una soluzione particolare della equazione completa

$$\bar{y}(x) = \ln x - 1$$

c) Determinare le costanti che risolvono il problema di Cauchy

$$c_1 = 2 \qquad c_2 = 2\sqrt{3}$$

2) Risolvere il sistema: $y'(t) = x(t) + 3y(t)$, $x'(t) = 3x(t) + y(t)$.

a) equazione di secondo grado associata

$$\alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0$$

b) $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$

c) $y(t) = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$

3) Risolvere l'equazione $y' - 2y = y^2$.

$$y(x) = \frac{2}{2ce^{-2x} - 1}$$

**Esonero 23 Aprile 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

a) Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

$$y(x) = c_1x + c_2x \ln x$$

b) scrivere una soluzione particolare della equazione completa

$$\bar{y}(x) = \frac{x}{2}(\ln x)^2$$

c) Determinare le costanti che risolvono il problema di Cauchy

$$c_1 = 1 \qquad c_2 = 1$$

2) Risolvere il sistema: $y'(t) = 2x(t) + y(t)$, $x'(t) = x(t) + 2y(t)$.

a) equazione di secondo grado associata

$$\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$$

b)

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{3t}$$

c)

$$y(t) = -c_1e^{-t} + c_2e^{3t}$$

3) Risolvere l'equazione $y' + 3y = y^2$.

$$y(x) = \frac{3}{3ce^{3x} + 1}$$

**Esonero 23 Aprile 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $x^2y''(x) + 5xy'(x) + 6y(x) = 11x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

a) Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

$$y(x) = \frac{1}{x^2} (c_1 \cos(\sqrt{2} \ln x) + c_2 \sin(\sqrt{2} \ln x))$$

b) scrivere una soluzione particolare della equazione completa

$$\bar{y}(x) = x$$

c) Determinare le costanti che risolvono il problema di Cauchy

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0$$

2) Risolvere il sistema: $y'(t) = x(t) + 4y(t)$, $x'(t) = 4x(t) + y(t)$.

a) equazione di secondo grado associata

$$\alpha^2 - 8\alpha + 15 = 0$$

b) $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t}$

c) $y(t) = -c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t}$

3) Risolvere l'equazione $y' + 2y = y^2$.

$$y(x) = \frac{2}{2ce^{2x} + 1}$$

**Esonero 23 Aprile 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.**a)** Scrivere l'integrale generale della equazione omogenea

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

b) scrivere una soluzione particolare della equazione completa

$$\bar{y}(x) = x$$

c) Determinare le costanti che risolvono il problema di Cauchy

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = -1$$

2) Risolvere il sistema: $y'(t) = x(t) + 2y(t)$, $x'(t) = 2x(t) + y(t)$.**a)** equazione di secondo grado associata

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$$

b) $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$ **c)** $y(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{3t}$ **3)** Risolvere l'equazione $y' + y = y^2$.

$$y(x) = \frac{1}{ce^x + 1}$$

Cenni di svolgimento

1) Si tratta di un problema di Cauchy composto da una equazione equidimensionale di Eulero del secondo ordine, completa e dai dati iniziali che si trovano nel semipiano $x > 0$; utilizziamo allora la sostituzione $x = e^z$. Pertanto $z = \ln x$, $xy'(x) = y'(z)$, $x^2y''(x) = y''(z) - y'(z)$.

1A)

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) + y(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad y''(z) + y'(z) + y(z) = z.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ che ammette come soluzioni $\alpha = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'integrale generale della equazione omogenea, nella variabile z , è

$$y(z) = e^{-z/2} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \right).$$

Una soluzione particolare della equazione completa è banalmente $y(z) = z - 1$. Riscrivendo l'integrale generale in x si ha:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right) + \ln x - 1.$$

Imponendo le condizioni iniziali, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$, si ottiene: $c_1 = 2$, $c_2 = 2\sqrt{3}$.

1B)

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x \quad \Rightarrow \quad y''(z) - 2y'(z) + y(z) = e^z.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea è $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$ che ammette come soluzioni $\alpha = +1$, con molteplicità 2. L'integrale generale della equazione omogenea, nella variabile z , è

$$y(z) = c_1 e^z + c_2 z e^z.$$

Poiché $\alpha = 1$ è una soluzione dell'eq. caratteristica con molteplicità 2 cerchiamo una soluzione della equazione completa del tipo $\bar{y}(z) = az^2 e^z$

ed otterremo $\alpha = 1/2$. Riscrivendo l'integrale generale in x si ha:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x \ln x + \frac{x}{2} (\ln x)^2.$$

Imponendo le condizioni iniziali, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$. si ottiene: $c_1 = c_2 = 1$.

1C)

$$x^2 y''(x) + 5xy'(x) + 6y(x) = 11x \implies y''(z) + 4y'(z) + 6y(z) = 11e^z.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea, nella variabile z , è $\alpha^2 + 4\alpha + 6 = 0$ che ammette come soluzioni $\alpha = -2 \pm i\sqrt{2}$. L'integrale generale della equazione omogenea è

$$y(z) = e^{-2z} (c_1 \cos(\sqrt{2}z) + c_2 \sin(\sqrt{2}z)).$$

Una soluzione particolare della equazione completa nella variabile x è banalmente $y(x) = x$. Riscrivendo l'integrale generale in x si ha:

$$y(x) = \frac{1}{x^2} (c_1 \cos(\sqrt{2} \ln x) + c_2 \sin(\sqrt{2} \ln x)) + x.$$

Imponendo le condizioni iniziali, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, si ottiene: $c_1 = c_2 = 0$.

1D)

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x \implies y''(z) - 4y'(z) + 4y(z) = e^z.$$

L'equazione caratteristica associata alla equazione omogenea, nella variabile z , è $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ che ammette come soluzioni $\alpha = 2$ con molteplicità 2. L'integrale generale della equazione omogenea è

$$y(z) = c_1 e^{2z} + c_2 z e^{2z}.$$

Una soluzione particolare della equazione completa nella variabile z è banalmente $y(z) = e^z$. Riscrivendo l'integrale generale in x si ha:

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x + x.$$

Imponendo le condizioni iniziali, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, si ottiene: $c_1 = 0$, $c_2 = -1$.

2) Si tratta di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti. Derivo la $x(t)$ e ricavo una equazione differenziale del secondo ordine.

2A) $y'(t) = x(t) + 3y(t)$, $x'(t) = 3x(t) + y(t)$.

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) + y(t), & y(t) &= x'(t) - 3x(t) \\ x''(t) &= 3x'(t) + y'(t) = 3x'(t) + x(t) + 3y(t) = \\ &= 3x'(t) + x(t) + 3(x'(t) - 3x(t)) = 6x'(t) - 8x(t). \end{aligned}$$

L'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti $x''(t) - 6x'(t) + 8x(t) = 0$ ha equazione caratteristica $\alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0$ che ha soluzioni $\alpha = 2, \alpha = 4$. Pertanto

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}, & x'(t) &= 2c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{4t} \\ y(t) &= x'(t) - 3x(t) = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}. \end{aligned}$$

2B) $y'(t) = 2x(t) + y(t)$, $x'(t) = x(t) + 2y(t)$.

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + 2y(t), & 2y(t) &= x'(t) - x(t) \\ x''(t) &= x'(t) + 2y'(t) = x'(t) + 4x(t) + 2y(t) = \\ &= x'(t) + 4x(t) + x'(t) - x(t) = 2x'(t) + 3x(t). \end{aligned}$$

L'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 0$ ha equazione caratteristica $\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$ che ha soluzioni $\alpha = -1, \alpha = 3$. Pertanto

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}, & x'(t) &= -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{3t} \\ y(t) &= \frac{1}{2}(x'(t) - x(t)) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}. \end{aligned}$$

2C) $y'(t) = x(t) + 4y(t)$, $x'(t) = 4x(t) + y(t)$.

$$\begin{aligned} x'(t) &= 4x(t) + y(t), & y(t) &= x'(t) - 4x(t) \\ x''(t) &= 4x'(t) + y'(t) = 4x'(t) + x(t) + 4y(t) = \\ &= x'(t) + x(t) + 4(x'(t) - 4x(t)) = 8x'(t) - 15x(t). \end{aligned}$$

L'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti $x''(t) - 8x'(t) + 15x(t) = 0$ ha equazione caratteristica $\alpha^2 - 8\alpha + 15 = 0$ che ha soluzioni $\alpha = 3, \alpha = 5$. Pertanto

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t}, & x'(t) &= 3c_1 e^{3t} + 5c_2 e^{5t} \\ y(t) &= x'(t) - 4x(t) = -c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t}. \end{aligned}$$

2D) $y'(t) = x(t) + 2y(t)$, $x'(t) = 2x(t) + y(t)$.

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) + y(t), & y(t) &= x'(t) - 2x(t) \\ x''(t) &= 2x'(t) + y'(t) = 2x'(t) + x(t) + 2y(t) = \\ &= 2x'(t) + x(t) + 2(x'(t) - 2x(t)) = 4x'(t) - 3x(t). \end{aligned}$$

L'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0$ ha equazione caratteristica $\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$ che ha soluzioni $\alpha = 1, \alpha = 3$. Pertanto

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{3t}, & x'(t) &= c_1 e^t + 3c_2 e^{3t} \\ y(t) &= x'(t) - 2x(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{3t}. \end{aligned}$$

3) Si tratta di una equazione di Bernoulli. Moltiplichiamo ambo i membri per y^{-2} e poi utilizziamo la sostituzione $z = y^{-1}$.

3A)

$$\begin{aligned} y' - 2y &= y^2 \implies y^{-2}y' - 2y^{-1} = 1 \quad (z = y^{-1}) \implies -z' - 2z = 1 \\ z' + 2z &= -1 \quad (\text{lineare primo ordine}) \quad z = ce^{-2x} - 1/2 \implies \\ y &= \frac{2}{2ce^{-2x} - 1}. \end{aligned}$$

3B)

$$\begin{aligned} y' + 3y &= y^2 \implies y^{-2}y' + 3y^{-1} = 1 \quad (z = y^{-1}) \implies -z' + 3z = 1 \\ z' - 3z &= -1 \quad (\text{lineare primo ordine}) \quad z = ce^{3x} + 1/3 \implies \\ y &= \frac{3}{3ce^{3x} + 1}. \end{aligned}$$

3C)

$$\begin{aligned}y' + 2y = y^2 &\implies y^{-2}y' + 2y^{-1} = 1 \quad (z = y^{-1}) \implies -z' + 2z = 1 \\z' - 2z = -1 &\text{ (lineare primo ordine) } z = ce^{2x} + 1/2 \implies \\y &= \frac{2}{2ce^{2x} + 1}.\end{aligned}$$

3D)

$$\begin{aligned}y' + y = y^2 &\implies y^{-2}y' + y^{-1} = 1 \quad (z = y^{-1}) \implies -z' + z = -1 \\z' - z = -1 &\text{ (lineare primo ordine) } z = ce^x + 1 \implies y = \frac{1}{ce^x + 1}.\end{aligned}$$



Esonero 27 Aprile 2026

Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni e tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x| - 1)^2, |x| \leq 1\}$; calcolare

$$I := \iint_D (\cos x \tan y + |x|) dx dy.$$

- a)** Disegnare l'insieme D nel foglio
b) scrivere il risultato finale dell'integrale.

$$I =$$

2) Calcolare il volume del tronco di paraboloido $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. Inoltre se $\rho(x, y, z) = z$ è la funzione densità, calcolarne la massa e il baricentro.

a) $V =$ $M =$

b) $x_G =$ $y_G =$ $z_G =$

3) Calcolare $I = \int_{+\partial D} (xy + e^x) dx + (\ln(y^2 + 1) - y) dy$, dove D è la porzione di piano che si trova nel primo quadrante ed è delimitata da $y = x^2$ e dalla retta $y = 1$.

a) $D =$

b) $I =$

**Esonero 27 Aprile 2026**

Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (1 - |x|)^3, |x| \leq 1\}$; calcolare

$$I := \iint_D (e^x \tan y - |x|) dx dy.$$

- a)** Disegnare l'insieme D nel foglio
b) scrivere il risultato finale dell'integrale.

$I =$

2) Calcolare il volume del tronco di cono $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$. Inoltre se $\rho(x, y, z) = z$ è la funzione densità, calcolarne la massa e il baricentro.

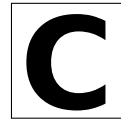
a) $V =$ $M =$

b) $x_G =$ $y_G =$ $z_G =$

3) Calcolare $I = \int_{+\partial D} (\sin x - xy) dx + (e^{y^2} - y) dy$, dove D è la porzione di piano che si trova nel primo quadrante ed è delimitata da $y = 2x - x^2$ e dalla retta $y = 1$.

a) $D =$

b) $I =$

**Esonero 27 Aprile 2026**

Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x| - 1)^2, |x| \leq 1\}$; calcolare

$$I := \iint_D (\sin x \tan y + |x|) dx dy.$$

- a)** Disegnare l'insieme D nel foglio
b) scrivere il risultato finale dell'integrale.

$$I =$$

2) Calcolare il volume del tronco di paraboloido $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. Inoltre se $\rho(x, y, z) = 1 - z$ è la funzione densità, calcolarne la massa e il baricentro.

a) $V =$ $M =$

b) $x_G =$ $y_G =$ $z_G =$

3) Calcolare $I = \int_{+\partial D} (xy + \cos x) dx + (\arctan y - y) dy$, dove D è la porzione di piano che si trova nel primo quadrante ed è delimitata da $y = x^2$ e dalla retta $y = 1$.

a) $D =$

b) $I =$



Esonero 27 Aprile 2026

Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (1 - |x|)^3, |x| \leq 1\}$; calcolare

$$I := \iint_D (\ln(x^2 + 1) \tan y - |x|) dx dy.$$

a) Disegnare l'insieme D nel foglio

b) scrivere il risultato finale dell'integrale.

$I =$

2) Calcolare il volume del tronco di cono $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

Inoltre se $\rho(x, y, z) = 1 - z$ è la funzione densità, calcolarne la massa e il baricentro.

a) $V =$ $M =$

$V =$	$M =$
-------	-------

b) $x_G =$ $y_G =$ $z_G =$

$x_G =$	$y_G =$	$z_G =$
---------	---------	---------

3) Calcolare $I = \int_{+\partial D} (\ln(1 + x^2) - xy) dx + (\cos(y + 1) - y) dy$, dove D è la porzione di piano che si trova nel primo quadrante ed è delimitata da $y = 2x - x^2$ e dalla retta $y = 1$.

a) $D =$

$D =$

b) $I =$

$I =$

**Esonero 27 Aprile 2026**

Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni e tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x| - 1)^2, |x| \leq 1\}$; calcolare

$$I := \iint_D (\cos x \tan y + |x|) dx dy.$$

- a)** Disegnare l'insieme D nel foglio
b) scrivere il risultato finale dell'integrale.

$$I = 1/3$$

2) Calcolare il volume del tronco di paraboloido $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. Inoltre se $\rho(x, y, z) = z$ è la funzione densità, calcolarne la massa e il baricentro.

a) $V = \pi/2$ $M = \pi/3$

b) $x_G = 0$ $y_G = 0$ $z_G = 3/4$

3) Calcolare $I = \int_{+\partial D} (xy + e^x) dx + (\ln(y^2 + 1) - y) dy$, dove D è la porzione di piano che si trova nel primo quadrante ed è delimitata da $y = x^2$ e dalla retta $y = 1$.

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$

b) $I = -1/4$



Esonero 27 Aprile 2026

Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (1 - |x|)^3, |x| \leq 1\}$; calcolare

$$I := \iint_D (e^x \tan y - |x|) dx dy.$$

- a)** Disegnare l'insieme D nel foglio
b) scrivere il risultato finale dell'integrale.

$$I = -1/5$$

2) Calcolare il volume del tronco di cono $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$. Inoltre se $\rho(x, y, z) = z$ è la funzione densità, calcolarne la massa e il baricentro.

a) $V = \pi/3$ $M = \pi/4$

b) $x_G = 0$ $y_G = 0$ $z_G = 4/5$

3) Calcolare $I = \int_{+\partial D} (\sin x - xy) dx + (e^{y^2} - y) dy$, dove D è la porzione di piano che si trova nel primo quadrante ed è delimitata da $y = 2x - x^2$ e dalla retta $y = 1$.

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x - x^2 \leq y \leq 1\}$

b) $I = 1/12$

**Esonero 27 Aprile 2026**
 Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x| - 1)^2, |x| \leq 1\}$; calcolare

$$I := \iint_D (\sin x \tan y + |x|) dx dy.$$

- a)** Disegnare l'insieme D nel foglio
b) scrivere il risultato finale dell'integrale.

$$I = 1/3$$

2) Calcolare il volume del tronco di paraboloido $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. Inoltre se $\rho(x, y, z) = 1 - z$ è la funzione densità, calcolarne la massa e il baricentro.

a) $V = \pi/2$ $M = \pi/6$

b) $x_G = 0$ $y_G = 0$ $z_G = 1/2$

3) Calcolare $I = \int_{+\partial D} (xy + \cos x) dx + (\arctan y - y) dy$, dove D è la porzione di piano che si trova nel primo quadrante ed è delimitata da $y = x^2$ e dalla retta $y = 1$.

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$

b) $I = -1/4$

**Esonero 27 Aprile 2026**
 Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Svolgere gli esercizi con le motivazioni ed tutti i passaggi. Relativamente all'esercizio 2 nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Sia $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (1 - |x|)^3, |x| \leq 1\}$; calcolare

$$I := \iint_D (\ln(x^2 + 1) \tan y - |x|) dx dy.$$

a) Disegnare l'insieme D nel foglio

b) scrivere il risultato finale dell'integrale.

$$I = -1/5$$

2) Calcolare il volume del tronco di cono $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

Inoltre se $\rho(x, y, z) = 1 - z$ è la funzione densità, calcolarne la massa e il baricentro.

a) $V = \pi/3$ $M = \pi/12$

b) $x_G = 0$ $y_G = 0$ $z_G = 3/5$

3) Calcolare $I = \int_{+\partial D} (\ln(1 + x^2) - xy) dx + (\cos(y + 1) - y) dy$, dove D è la porzione di piano che si trova nel primo quadrante ed è delimitata da $y = 2x - x^2$ e dalla retta $y = 1$.

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x - x^2 \leq y \leq 1\}$

b) $I = 1/12$

Cenni di svolgimento

1A,1C) Svolgimento L'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (|x| - 1)^2, |x| \leq 1\}$ è y -semplice e per ogni $x \in [-1, 1]$ si ha

$$-(|x| - 1)^2 \leq y \leq (|x| - 1)^2.$$

La funzione integranda f è continua in D , infatti per ogni $x \in [-1, 1]$:

$$0 \leq |y| \leq (|x| - 1)^2 \leq 1 < \frac{\pi}{2}.$$

Applicando le formule di riduzione l'integrale diventa

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-(|x|-1)^2}^{(|x|-1)^2} (\cos x \tan y + |x|) dy dx \\ &= \left[I = \int_{-1}^1 \cos x \left(\int_{-(|x|-1)^2}^{(|x|-1)^2} \tan y dy \right) dx + \int_{-1}^1 |x| \left(\int_{-(|x|-1)^2}^{(|x|-1)^2} dy \right) dx. \right. \end{aligned}$$

La funzione $\tan y$ è dispari, quindi

$$\int_{-a}^a \tan y dy = 0.$$

Dunque il primo termine è nullo. Nel calcolo del secondo addendo osserviamo che

$$\int_{-(|x|-1)^2}^{(|x|-1)^2} dy = 2(|x| - 1)^2,$$

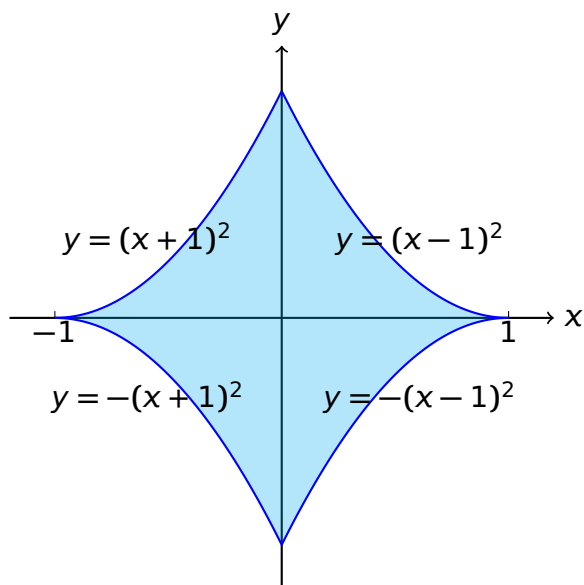
quindi

$$I = \int_{-1}^1 |x| \cdot 2(|x| - 1)^2 dx = 2 \int_{-1}^1 |x|(|x| - 1)^2 dx.$$

Per simmetria:

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^1 x(x-1)^2 dx = 4 \int_0^1 (4x^3 - 8x^2 + 4x) dx = \\ &= \left[x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Il disegno dell'insieme D è il seguente:



Comandi maple per ottenere la figura:

`with(plots):`

`p1 := plot((abs(x)-1)^2, x=-1..1, color=blue):`

`p2 := plot(-(abs(x)-1)^2, x=-1..1, color=blue):`

`regionplot(abs(y) <= (abs(x)-1)^2 and abs(x)<=1, x=-1..1, y=-1..1);`

L'esercizio 1C dà la stessa figura e lo stesso risultato, in quanto le integrazioni differiscono solo per un fattore contenuto nel primo addendo che dà contributo nullo.

1B, 1D) Il dominio è

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq (1 - |x|)^3, |x| \leq 1\}.$$

Il dominio è simmetrico rispetto all'asse y e all'asse x . La frontiera è composta da quattro curve:

$$Fr(D) := \begin{cases} y = (1 - x)^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ y = (1 + x)^3, & -1 \leq x \leq 0, \\ y = -(1 - x)^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ y = -(1 + x)^3, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

La funzione integranda è continua in D , quindi l'integrale si scrive come

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-(1-|x|)^3}^{(1-|x|)^3} (e^x \tan y - |x|) dy dx = \\ &= \int_{-1}^1 e^x \left(\int_{-(1-|x|)^3}^{(1-|x|)^3} \tan y dy \right) dx - \int_{-1}^1 |x| \left(\int_{-(1-|x|)^3}^{(1-|x|)^3} dy \right) dx. \end{aligned}$$

La funzione $\tan y$ è dispari, quindi per ogni $a > 0$:

$$\int_{-a}^a \tan y dy = 0.$$

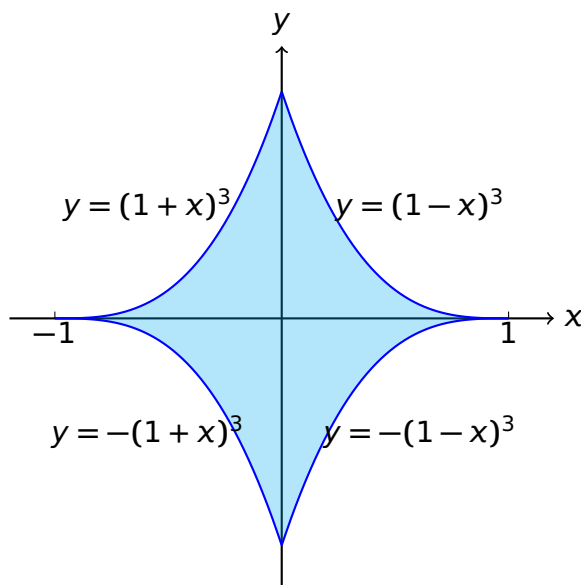
Dunque il primo termine è nullo. Nel calcolo del secondo addendo osserviamo che

$$\int_{-(1-|x|)^3}^{(1-|x|)^3} dy = 2(1-|x|)^3.$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-1}^1 |x| \cdot 2(1-|x|)^3 dx = -2 \int_{-1}^1 |x|(1-|x|)^3 dx. = \\ &= -4 \int_0^1 x(1-x)^3 dx = -4 \int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4) dx = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Il disegno dell'insieme D è il seguente:



Comandi maple per ottenere la figura:

with(plots):

p1 := plot((1-abs(x))^3, x=-1..1, color=blue):

p2 := plot(-(1-abs(x))^3, x=-1..1, color=blue):

regionplot(abs(y) <= (1-abs(x))^3 and abs(x)<=1, x=-1..1, y=-1..1,);

L'esercizio 1D dà la stessa figura e lo stesso risultato, in quanto le integrazioni differiscono solo per un fattore contenuto nel primo addendo che dà contributo nullo.

2A) Si vuole calcolare il volume del solido compreso tra: il paraboloide $z = x^2 + y^2$, e il piano $z = 1$.

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

La proiezione sul piano xy di E si ottiene imponendo $x^2 + y^2 \leq 1$.

Il volume è

$$V = \iiint_E 1 dV = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_{x^2+y^2}^1 dz dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 1 - (x^2 + y^2) dx dy.$$

Poniamo

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dx dy = r dr d\theta.$$

Il dominio diventa: $0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Quindi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)r dr d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 (r-r^3) dr \right) = \\ &= 2\pi \int_0^1 (r-r^3) dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Si supponga ora che la densità sia $\rho(x, y, z) = z$. La massa è

$$\begin{aligned} M &= \iiint_E z dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 z r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{r^2}^1 r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1-r^4}{2} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r-r^5) dr \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Per simmetria si ha: $x_G = 0$, $y_G = 0$.

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{M} \iiint_E z^2 dV = \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 z^2 r dz dr d\theta = \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{z^3}{3} \right]_{r^2}^1 r dr d\theta \\ &= \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1-r^6}{3} r dr d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r-r^7) dr \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^8}{8} \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2B) Si vuole calcolare il volume del solido compreso tra: il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, e il piano $z = 1$.

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}.$$

La proiezione sul piano xy di E si ottiene imponendo $x^2 + y^2 \leq 1$. Il volume è $V = \frac{\pi}{3}$. Si supponga ora che la densità sia $\rho(x, y, z) = z$. La massa è

$$\begin{aligned} M &= \iiint_E z dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 z r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_r^1 r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2} \right) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{2} \right) dr d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{8} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Per simmetria: $x_G = 0$, $y_G = 0$.

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{M} \iiint_E z^2 dV = \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 z^2 r dz dr d\theta \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{z^3}{3} \right]_r^1 r dr d\theta = \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{r^3}{3} \right) r dr d\theta \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot 2\pi \int_0^1 \left(\frac{r}{3} - \frac{r^4}{3} \right) dr = 8 \left[\frac{r^2}{6} - \frac{r^5}{15} \right]_0^1 = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

2C) L'insieme E è lo stesso dell'esercizio 2A), quindi il volume è $V = \frac{\pi}{2}$. Si supponga ora che la densità sia $\rho(x, y, z) = 1 - z$. La massa è

$$\begin{aligned} M &= \iiint_E (1-z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 (1-z) r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[z - \frac{z^2}{2} \right]_{r^2}^1 r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - r^2 + \frac{r^4}{2} \right) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{r}{2} - r^3 + \frac{r^5}{2} \right) dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4} + \frac{r^6}{12} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Per simmetria si ha: $x_G = 0$, $y_G = 0$.

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{M} \iiint_E z(1-z) \, dV = \frac{6}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 z(1-z) r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{6}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 (z - z^2) r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{6}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_{r^2}^1 r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{6}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{r^4}{2} + \frac{r^6}{3} \right) r \, dr \, d\theta = \frac{6}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{6} r - \frac{r^5}{2} + \frac{r^7}{3} \right) dr \, d\theta \\ &= \frac{6}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^2}{12} - \frac{r^6}{12} + \frac{r^8}{24} \right]_0^1 = \frac{6}{\pi} \cdot 2\pi \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2D) L'insieme E è lo stesso dell'esercizio 2B), quindi il volume è $V = \frac{\pi}{3}$. Si supponga ora che la densità sia $\rho(x, y, z) = 1 - z$. La massa è

$$\begin{aligned} M &= \iiint_E (1-z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 (1-z) r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[z - \frac{z^2}{2} \right]_r^1 r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - r + \frac{r^2}{2} \right) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{r}{2} - r^2 + \frac{r^3}{2} \right) dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{8} \right]_0^1 = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Per simmetria si ha: $x_G = 0$, $y_G = 0$.

$$\begin{aligned}
 z_G &= \frac{1}{M} \iiint_E z(1-z) dV = \frac{12}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 (z-z^2) r dz dr d\theta \\
 &= \frac{12}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_r^1 r dr d\theta = \frac{12}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{6} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right) r dr d\theta \\
 &= \frac{12}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{r}{6} - \frac{r^3}{2} + \frac{r^4}{3} \right) dr d\theta = \frac{12}{\pi} \cdot 2\pi \left[\frac{r^2}{12} - \frac{r^4}{8} + \frac{r^5}{15} \right]_0^1 \\
 &= \frac{3}{5}.
 \end{aligned}$$

3) Se D è un dominio regolare di \mathbb{R}^2 e $P, Q \in C^1(D)$, allora per le formule di Green, si ottiene

$$\oint_{+\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

3A), 3C) D è la regione nel primo quadrante delimitata dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = 1$. La regione D è un dominio regolare rispetto all'asse y , infatti $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$. Le funzioni integrande

$$3A) P(x, y) = xy + e^x, \quad Q(x, y) = \ln(y^2 + 1) - y;$$

$$3C) P(x, y) = xy + \cos x, \quad Q(x, y) = \arctan y - y$$

sono di classe $C^1(D)$, dunque,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - x = -x.$$

Perciò,

$$\begin{aligned}
 I &= - \iint_D x dx dy = - \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{\sqrt{y}} x dx dy = - \int_{y=0}^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{y}} dy = \\
 &= - \int_0^1 \frac{y}{2} dy = - \frac{1}{2} \int_0^1 y dy = - \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

3B), 3D) D è la regione nel primo quadrante delimitata dalla parabola $y = 2x - x^2$ e dalla retta $y = 1$. La regione D è un dominio regolare rispetto all'asse x , infatti $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x - x^2 \leq y \leq 1\}$. Le funzioni integrande

$$3B) P(x, y) = \sin x - xy, \quad Q(x, y) = e^{y^2} - y.;$$

$$3D) P(x, y) = \ln(1 + x^2) - xy, \quad Q(x, y) = \cos(y + 1) - y$$

sono di classe $C^1(D)$, dunque,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x.$$

Quindi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - (-x) = x.$$

Pertanto

$$I = \iint_D x \, dx \, dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=2x-x^2}^1 x \, dy \, dx;$$

$$\int_{y=2x-x^2}^1 x \, dy = x[y]_{y=2x-x^2}^1 = x(1 - (2x - x^2)) = x(1 - 2x + x^2) = x^3 - 2x^2 + x;$$

$$I = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$



Esonero 25 Maggio 2026

Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x \right) dy,$$

dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1: y = 2 + \cos x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \quad \gamma_2: y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}.$$

a) ω è esatta? Si No

b)

2) Calcolare

$$J := \int_S (y+z) dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}.$$

3) Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ e sia Σ la superficie laterale del cilindro

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) \mathbf{F} è irrotazionale? Si NO

b) Calcolare

c) Scrivere la normale esterna alla superficie laterale del cilindro.

$n_e =$

4) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{1+n^2x^2}.$$

a) Converge puntualmente in

b) Converge assolutamente in

c) Converge totalmente in ogni intervallo del tipo

$[-a, a]$, $0 < a < 1$?

Si

NO

**Esonero 25 Maggio 2026**
 Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy,$$

 dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

 a) ω è esatta? Si NO

 b)
2) Calcolare

$$\iint_S z \, dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0\}.$$

3) Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-yz, 0, 0)$$

e la superficie laterale del cilindro ellittico

$$\Sigma : x^2 + 2z^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

 a) \mathbf{F} è irrotazionale? Si NO

b) Scrivere una parametrizzazione della superficie laterale del cilindro ellittico.

c) Calcolare il flusso uscente

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e \, dS =$$

4) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{1 + n^3 x^2}.$$

a) Converge per $x = -1$? Si NO

b) Converge puntualmente in

c) Converge uniformemente in

**Esonero 25 Maggio 2026**
 Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x \right) dy,$$

 dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 2 + \cos x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}.$$

a) ω è esatta?
 Si NO
b) $L =$

2) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$J := \int_S y dS, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}.$$

3) Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ e sia Σ la superficie laterale del cilindro

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) Calcolare

b) Il campo \mathbf{F} è conservativo in \mathbb{R}^3 ? Si No

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$$

dove γ è la circonferenza inferiore del cilindro, cioè il bordo della base $z = 0$, percorsa in senso antiorario rispetto all'asse z .

4) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{1+n^2x^2}.$$

a) Converge per $|x| > 1$? Si No

b)

c)

**Esonero 25 Maggio 2026**
 Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy,$$

 dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

 a) ω è esatta? Si No

 b)
2) Calcolare

$$J := \int_S x \, dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2, y \geq 0\}.$$

3) Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-yz, 0, 0)$$

e la superficie laterale del cilindro ellittico

$$\Sigma : x^2 + 2z^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

 a) Il campo \mathbf{F} è conservativo in \mathbb{R}^3 ? Si No

b) Scrivere la normale esterna alla superficie laterale del cilindro.

$$n_e =$$

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$$

dove γ è l'ellisse alla base $y = 0$, cioè il bordo della sezione ellittica

$$x^2 + 2z^2 = 1, \quad y = 0,$$

percorsa in senso antiorario guardando nella direzione positiva dell'asse y .

4) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{1 + n^3 x^2}.$$

a) Converge assolutamente in

b) Converge puntualmente in

c) Converge totalmente in ogni intervallo del tipo $[-a, a]$, $0 < a < 1$?

Si

No

**Esonero 25 Maggio 2026**
 Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x \right) dy,$$

 dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 2 + \cos x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}.$$

a) ω è esatta? NO
b)
2) Calcolare

$$J := \int_S (y+z) dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}.$$

3) Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ e sia Σ la superficie laterale del cilindro

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) \mathbf{F} è irrotazionale? NO
b) Calcolare

c) Scrivere la normale esterna alla superficie laterale del cilindro.

$$n_e = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

4) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{1+n^2x^2}.$$

a) Converge puntualmente in $(-1, 1]$

b) Converge assolutamente in $(-1, 1)$

c) Converge totalmente in ogni intervallo del tipo

$[-a, a]$, $0 < a < 1$?

Si



Esonero 25 Maggio 2026

Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy,$$

dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

a) ω è esatta? NO

b)

2) Calcolare

$$\iint_S z \, dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0\}.$$

3) Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-yz, 0, 0)$$

e la superficie laterale del cilindro ellittico

$$\Sigma : x^2 + 2z^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) \mathbf{F} è irrotazionale? No

- b)** Scrivere una parametrizzazione della superficie laterale del cilindro ellittico.

$$\phi(\theta, y) = (\cos \theta, y, \sin \theta / \sqrt{2}), \quad (\theta, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

- c)** Calcolare il flusso uscente

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e dS = \pi/2$$

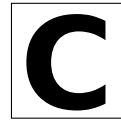
- 4)** Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{1 + n^3 x^2}.$$

- a)** Converge per $x = -1$? NO

- b)** Converge puntualmente in $(-1, 1]$

- c)** Converge uniformemente in $[-a, a], a < 1$
-

**Esonero 25 Maggio 2026**
 Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x \right) dy,$$

 dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 2 + \cos x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}.$$

a) ω è esatta? No

b) $L = 1 - \pi/4$

2) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$J := \int_S y \, dS, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}.$$

$$J = 18$$

3) Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ e sia Σ la superficie laterale del cilindro

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) Calcolare

$$\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 2)$$

b) Il campo \mathbf{F} è conservativo in \mathbb{R}^3 ? No

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$$

dove γ è la circonferenza inferiore del cilindro, cioè il bordo della base $z = 0$, percorsa in senso antiorario rispetto all'asse z .

4) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{1+n^2x^2}.$$

a) Converge per $|x| > 1$?

b)

c)


Esonero 25 Maggio 2026

 Meccanica iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy,$$

 dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

a) ω è esatta? No

b)
2) Calcolare

$$J := \int_S x \, dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2, y \geq 0\}.$$

3) Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-yz, 0, 0)$$

e la superficie laterale del cilindro ellittico

$$\Sigma : x^2 + 2z^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) Il campo \mathbf{F} è conservativo in \mathbb{R}^3 ? No

b) Scrivere la normale esterna alla superficie laterale del cilindro.

$$n_e = \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, 0, \sin \theta \right) / \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{2} + \sin^2 \theta}$$

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

dove γ è l'ellisse alla base $y = 0$, cioè il bordo della sezione ellittica

$$x^2 + 2z^2 = 1, \quad y = 0,$$

percorsa in senso antiorario guardando nella direzione positiva dell'asse y .

4) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{1 + n^3 x^2}.$$

a)

b)

c) Converge totalmente in ogni intervallo del tipo $[-a, a]$, $0 < a < 1$?

Cenni di svolgimento**1A) 1C)** Poniamo:

$$\begin{aligned}\omega &= \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4}\right)dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x\right)dy, \\ \omega &= \omega_1 + \omega_2, \\ \omega_1 &= \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4}\right)dx + \left(\frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x\right)dy, \\ \omega_2 &= x dy.\end{aligned}$$

Poniamo:

$$P(x, y) = \frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4}, \quad Q(x, y) = \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x.$$

 $P, Q \in C^1(A)$, con $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, Si verifica:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

quindi ω_1 è chiusa e dunque esatta perché A è semplicemente connesso, dunque :

$$\int_{\gamma} \omega_1 = 0.$$

Complessivamente, ω non è esatta. Rimane:

$$L = \int_{\gamma} x dy = \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy.$$

Parametrizziamo γ_1 :

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 2 + \cos t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \quad dy = -\sin t dt.$$

Quindi:

$$\int_{\gamma_1} x dy = \int_{\pi/2}^{\pi} t(-\sin t) dt = -\int_{\pi/2}^{\pi} t \sin t dt.$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int t \sin t dt &= -t \cos t + \int \cos t dt = -t \cos t + \sin t, \\ -\int_{\pi/2}^{\pi} t \sin t dt &= -\left[-t \cos t + \sin t\right]_{\pi/2}^{\pi} = -(\pi - 1) = 1 - \pi.\end{aligned}$$

Parametizziamo la γ_2

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 3 - \frac{2}{\pi}t, \end{cases} \quad x \in \pi \geq t \geq \frac{\pi}{2}, \quad dy = -\frac{2}{\pi}dt.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} x dy &= \int_{\pi}^{\pi/2} x \left(-\frac{2}{\pi}\right) dx = -\frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\pi/2} x dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} x dx. \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{4} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3\pi^2}{4} = \frac{3\pi}{4}. \\ L &= \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy = (1 - \pi) + \frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

1B) 1D) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy,$$

dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1: y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2: y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

La curva γ è chiusa e generalmente regolare. Poniamo:

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy; \\ \omega &= \omega_1 + \omega_2, \\ \omega_1 &= \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(\frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy, \\ \omega_2 &= x dy. \end{aligned}$$

Poniamo:

$$P(x, y) = \frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4}, \quad Q(x, y) = \frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x.$$

$P, Q \in C^1(A)$, con $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{\cos y}}{x} \right) &= \frac{-\sin y e^{\cos y}}{x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) &= \frac{2y(1+x^2y^4) - y^2(4x^2y^3)}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{2y - 2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2} \implies \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-\sin y e^{\cos y}}{x} + \frac{2y - 2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2xy}{1+x^2y^4} \right) = \frac{2y(1+x^2y^4) - 2xy(2xy^4)}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{2y - 2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (-\sin y e^{\cos y} \ln x) = -\sin y e^{\cos y} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-\sin y e^{\cos y}}{x} + \frac{2y - 2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2}.$$

Pertanto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Quindi ω_1 è chiusa. Poiché A è una regione priva di buchi allora è semplicemente connessa e quindi ω_1 è esatta. Ne segue:

$$\int_{\gamma} \omega_1 = 0.$$

Complessivamente, ω non è esatta. Rimane:

$$L = \int_{\gamma} x dy = \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy$$

$$\gamma_1 : y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad dy = \cos x dx$$

$$\int_{\gamma_1} x dy = \int_{\pi}^{\pi/2} x \cos x dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x$$

$$\int_{\pi}^{\pi/2} x \cos x dx = [x \sin x + \cos x]_{\pi}^{\pi/2} = +1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \quad dy = -\frac{2}{\pi} dx$$

$$\int_{\gamma_2} x dy = \int_{\pi/2}^{\pi} x \left(-\frac{2}{\pi} \right) dx = -\frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} x dx$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} \right) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$L = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

2A) Parametrizzazione:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = u.$$

$$\|\varphi_t \times \varphi_u\| = 1.$$

$$\int_S (y+z) dS = \int_0^1 \int_0^\pi (\sin t + u) dt du = \int_0^1 (2 + \pi u) du = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

2B) Parametrizzazione:

$$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = u, \quad (t, u) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2].$$

$$\|\varphi_t \times \varphi_u\| = 3.$$

$$\iint_S z dS = \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u \cdot 3 dt du = 3 \int_0^2 u \cdot \pi du = 3\pi \cdot \frac{4}{2} = 6\pi.$$

2C) La superficie è la metà del cilindro di raggio 3 compresa tra $z = 0$ e $z = 1$.

Una parametrizzazione è:

$$\varphi(t, u) = \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \\ z = u \end{cases} \quad (t, u) \in [0, \pi] \times [0, 1].$$

Calcoliamo le derivate:

$$\varphi_t = (-3 \sin t, 3 \cos t, 0), \quad \varphi_u = (0, 0, 1).$$

Il prodotto vettoriale:

$$\varphi_t \times \varphi_u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 \sin t & 3 \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cos t, 3 \sin t, 0).$$

La norma è: $\|\varphi_t \times \varphi_u\| = 3$. Quindi: $dS = 3 dt du$. L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int_S y dS &= \int_0^1 \int_0^\pi (3 \sin t) \cdot 3 dt du = 9 \int_0^1 \left(\int_0^\pi \sin t dt \right) du \\ &= 9 \int_0^1 2 du = 18. \end{aligned}$$

2D) Parametrizzazione:

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = u, \quad (t, u) \in [0, \pi] \times [0, 2].$$

$$\|\varphi_t \times \varphi_u\| = 2.$$

$$\int_S x \, dS = \int_0^2 \int_0^\pi (2 \cos t) \cdot 2 \, dt \, du = 4 \int_0^2 \left(\int_0^\pi \cos t \, dt \right) du = 0.$$

3A) 3C) $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 2)$$

Parametrizzazione della superficie:

$$\Phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad (\theta, z) \in D := [0, 2\pi] \times [0, 1], \quad \Phi \in C^2(D).$$

La normale esterna è data da:

$$\mathbf{n}_e = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \|\mathbf{n}_e\| = 1.$$

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e = (0, 0, 2) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0) = 0.$$

Quindi il flusso del rotore di \mathbf{F} uscente da Σ è nullo.

Proviamolo anche facendo uso del Teorema di Stokes: Σ è una superficie di classe C^2 , regolare, orientata e con bordo.

La frontiera di D è data da:

$$\{(t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi\} \cup \{(2\pi, t), 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(t, 1), 2\pi \geq t \geq 0\} \cup \{(0, z), 1 \geq z \geq 0\}.$$

Il bordo di Σ ($\partial\Sigma$) è pertanto composto da quattro curve regolari:

- (circonferenza inferiore, $z = 0$) C_0 , parametrizzata da:

$$\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \gamma'_0(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

- (generatrice verticale; $t = 2\pi$) V_1 , parametrizzata da:

$$\delta_1(z) = (1, 0, z), \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \delta'_1(z) = (0, 0, 1)$$

- $z = 1$ (circonferenza superiore) C_1 , parametrizzata da:

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 1), \quad 2\pi \geq t \geq 0, \quad \gamma'_1(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

- (generatrice verticale; $t = 0$) V_2 parametrizzata da:

$$\delta_2(z) = (1, 0, z), \quad 1 \geq z \geq 0, \quad \delta'_2(z) = (0, 0, 1)$$

Quindi, per il Teorema di Stokes, posto $\omega := -ydx + xdy + z^2dz$,

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e dS = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \omega + \int_{C_0} \omega + \int_{V_1} \omega + \int_{V_2} \omega.$$

$$\mathbf{F}(\gamma_0(t)) \cdot \gamma'_0 = (-\sin t, \cos t, 0) \cdot ((-\sin t, \cos t, 0) = 1 \Rightarrow$$

$$\int_{C_0} \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

$$\mathbf{F}(\delta_1(z)) \cdot \gamma'_1 = (0, 1, z^2) \cdot (0, 0, 1) = z^2 \Rightarrow$$

$$\int_{V_1} \omega = \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma'_1 = (-\sin t, \cos t, 1) \cdot ((-\sin t, \cos t, 0) = 1 \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_{2\pi}^0 dt = -2\pi$$

$$\mathbf{F}(\delta_2(z)) \cdot \gamma'_2 = (0, 1, z^2) \cdot (0, 0, 1) = z^2 \Rightarrow$$

$$\int_{V_2} \omega = \int_1^0 z^2 dz = -\frac{1}{3}.$$

In particolare possiamo osservare che i due tratti verticali sono uguali ma percorsi in verso opposto. Sommando tutti gli addendi si ottiene

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

3B) 3D) $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yz & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -y, z).$$

Parametrizzazione della superficie:

$$\Phi(\theta, y) = \left(\cos \theta, y, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right), \quad (\theta, y) \in D := [0, 2\pi] \times [0, 1], \quad \Phi \in C^2(D).$$

La normale esterna, comprensiva del fattore d'area, è data da:

$$\mathbf{n}_e dS = \Phi_y \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, 0, \sin \theta \right).$$

Allora

$$(\nabla \times \mathbf{F})(\Phi(\theta, y)) = \left(0, -y, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right)$$

e

$$(\nabla \times \mathbf{F})(\Phi(\theta, y)) \cdot (\Phi_y \times \Phi_\theta) = \left(0, -y, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, 0, \sin \theta \right) = \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2}}.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2}} d\theta dy = \int_0^1 \frac{\pi}{\sqrt{2}} dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Quindi il flusso del rotore di \mathbf{F} uscente da Σ è

$$\boxed{\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e dS = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

Proviamolo anche facendo uso del Teorema di Stokes: Σ è una superficie di classe C^2 , regolare, orientata e con bordo.

La frontiera di D è data da:

$$\{(t, 0), 2\pi \geq t \geq 0\} \cup \{(0, y), 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(t, 1), 0 \leq t \leq 2\pi\} \cup \{(2\pi, y), 1 \geq y \geq 0\}.$$

Il bordo di Σ ($\partial\Sigma$) è pertanto composto da quattro curve regolari:

- (ellisse inferiore, $y = 0$) C_0 , parametrizzata da:

$$\gamma_0(t) = \left(\cos t, 0, \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right), \quad 2\pi \geq t \geq 0, \quad \gamma'_0(t) = \left(-\sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right).$$

- (generatrice verticale; $t = 0$) V_1 , parametrizzata da:

$$\delta_1(y) = (1, y, 0), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \delta'_1(y) = (0, 1, 0).$$

- (ellisse superiore, $y = 1$) C_1 , parametrizzata da:

$$\gamma_1(t) = \left(\cos t, 1, \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \gamma'_1(t) = \left(-\sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right).$$

- (generatrice verticale; $t = 2\pi$) V_2 , parametrizzata da:

$$\delta_2(y) = (1, y, 0), \quad 1 \geq y \geq 0, \quad \delta'_2(y) = (0, 1, 0).$$

Quindi, per il Teorema di Stokes, posto $\omega := -yz \, dx$,

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_0} \omega + \int_{V_1} \omega + \int_{C_1} \omega + \int_{V_2} \omega.$$

$$\mathbf{F}(\gamma_0(t)) \cdot \gamma'_0(t) = (0, 0, 0) \cdot \left(-\sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{C_0} \omega = 0,$$

$$\mathbf{F}(\delta_1(y)) \cdot \delta'_1(y) = (0, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{V_1} \omega = 0,$$

$$\mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma'_1(t) = \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \cdot \left(-\sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}} \, dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{F}(\delta_2(y)) \cdot \delta'_2(y) = (0, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{V_2} \omega = 0.$$

Sommando tutti gli addendi si ottiene

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 + 0 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$\boxed{\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

4A) 4C) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{1+n^2x^2}.$$

Studiamo il termine generale:

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{nx^n}{1+n^2x^2}.$$

Per $x = 0$:

$$a_n(0) = 0 \Rightarrow \text{la serie converge (somma nulla)}.$$

Per $x \neq 0$, osserviamo il comportamento asintotico:

$$\frac{nx^n}{1+n^2x^2} \sim \frac{nx^n}{n^2x^2} = \frac{x^{n-2}}{n}.$$

Quindi il termine si comporta come:

$$a_n(x) \sim (-1)^n \frac{x^{n-2}}{n}.$$

- Se $|x| < 1$, allora il termine generale è un infinitesimo di ordine maggiore di $\alpha > 1$ e quindi la serie converge per il confronto asintotico.
- Se $|x| > 1$, allora il termine generale non tende a zero e quindi la serie non converge.

- $x = 1$

$$f_n(1) = (-1)^n \frac{n}{1+n^2} \sim (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Serie a segni alterni che converge per il criterio di Leibniz.

- $x = -1$

$$f_n(-1) = \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n}.$$

Serie armonica divergente.

Converge per $x \in (-1, 1]$

Studiamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{nx^n}{1+n^2x^2} \right|.$$

Se $|x| < 1$:

$$\left| \frac{nx^n}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{n|x|^n}{1} = n|x|^n.$$

La serie $\sum n|x|^n$ converge per $|x| < 1$ e quindi la serie data converge assolutamente per il criterio del confronto. Se $|x| = 1$ la serie data diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} = +\infty$.

Convergenza assoluta: $(-1, 1)$

Supponiamo per assurdo che converga uniformemente in $] -1, 1]$, allora, per il Criterio di Cauchy per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ risulta

$$\left| f_n(x) + \dots + f_{n+p}(x) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in] -1, 1].$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left| f_n(x) + \dots + f_{n+p}(x) \right| = \frac{n}{1+n^2} + \dots + \frac{n+p}{1+(n+p)^2} \leq \varepsilon$$

e questo ci porterebbe a dire che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$ converge (assurdo). Dunque la convergenza non è nemmeno totale in $[-1, 1]$, questo perché non c'è convergenza uniforme in $] -1, 1]$ e non c'è convergenza assoluta se $x = -1$.

Proviamo che converge totalmente in $[-a, a]$ con $0 < a < 1$. Se $|x| \leq a < 1$ risulta:

$$|f_n(x)| = \frac{n|x|^n}{1+n^2x^2} \leq na^n = L_n.$$

Poiché:

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n < \infty,$$

allora la serie data converge totalmente e quindi anche uniformemente.

Convergenza uniforme e totale su ogni $[-a, a]$, $a < 1$.

4B) 4D) Si consideri la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{1 + n^3 x^2}.$$

Denotiamo

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{n^2 x^n}{1 + n^3 x^2}.$$

$x = 0$

$$f_n(0) = 0 \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

Sia $x \neq 0$. Se $|x| < 1$

$$|f_n(x)| \leq \frac{n^2 |x|^n}{1} = n^2 |x|^n.$$

Poiché $\sum n^2 |x|^n$ converge per $|x| < 1$, segue che la serie converge assolutamente (quindi anche puntualmente).

Se invece $|x| > 1$

$$|f_n(x)| \frac{n^2 x^n}{1 + n^3 x^2} \approx \frac{n^2 |x|^n}{n^3 x^2} = \frac{|x|^{n-2}}{n}.$$

Il termine generale allora non tende a zero e quindi la serie non converge.

Se $x = 1$ la serie diventa

$$f_n(1) = (-1)^n \frac{n^2}{1 + n^3} \sim (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Serie a segni alterni che converge per il Criterio di Leibnitz.

Se $x = -1$

$$a_n(-1) = (-1)^n \frac{n^2 (-1)^n}{1 + n^3} = \frac{n^2}{1 + n^3} \sim \frac{1}{n}.$$

Serie armonica \Rightarrow diverge.

Convergenza puntuale per $x \in (-1, 1]$.

Studiamo:

$$\sum |f_n(x)| = \sum \frac{n^2 |x|^n}{1 + n^3 x^2}.$$

Per $|x| < 1$:

$$\frac{n^2 |x|^n}{1 + n^3 x^2} \leq n^2 |x|^n, \quad \sum n^2 |x|^n < +\infty.$$

Per $|x| = 1$:

$$\frac{n^2}{1+n^3} \sim \frac{1}{n},$$

quindi diverge.

Convergenza assoluta: $(-1, 1)$.

Supponiamo per assurdo che converga uniformemente in $] - 1, 1]$, allora, per il Criterio di Cauchy per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ risulta

$$\left| f_n(x) + \dots + f_{n+p}(x) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in] - 1, 1].$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left| f_n(x) + \dots + f_{n+p}(x) \right| = \frac{n^2}{1+n^3} + \dots + \frac{(n+p)^2}{1+(n+p)^3} \leq \varepsilon$$

e questo ci porterebbe a dire che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^3}$ converge (assurdo).

Dunque la convergenza non è nemmeno totale in $[-1, 1]$, questo perché non c'è convergenza uniforme in $] - 1, 1]$ e non c'è convergenza assoluta se $x = -1$.

Convergenza totale su $[-a, a]$, $a < 1$. Se $|x| \leq a < 1$:

$$|f_n(x)| \leq n^2 a^n = L_n; \quad \sum n^2 a^n < \infty,$$

allora converge totalmente e quindi uniformemente in ogni $[-a, a]$, $0 < a < 1$.

Puntuale: $(-1, 1]$ Assoluta: $(-1, 1)$

Uniforme: su ogni $[-a, a]$, $a < 1$ Totale: su ogni $[-a, a]$, $a < 1$

**Esonero 26 Maggio 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare:

$$I := \iiint_D z^2 dx dy dz \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1 - z, 0 < z < 1\}.$$

$I =$

2) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$J := \int_S y dS, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}.$$

$J =$

3) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1 + x^2 y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1 + x^2 y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy,$$

dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1: y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2: y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

a) ω è esatta? Si NO**b)**

$L =$

4) Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-yz, 0, 0)$$

e la superficie laterale del cilindro ellittico

$$\Sigma: x^2 + 2z^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) Il campo \mathbf{F} è conservativo in \mathbb{R}^3 ? Si No

b) Scrivere la normale esterna alla superficie laterale del cilindro.

$$n_e =$$

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$$

dove γ è l'ellisse alla base $y = 0$, cioè il bordo della sezione ellittica

$$x^2 + 2z^2 = 1, \quad y = 0,$$

percorsa in senso antiorario guardando nella direzione positiva dell'asse y .


Esonero 26 Maggio 2026

 Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$I := \iiint_D z \, dx \, dy \, dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 2 - z, 0 < z < 2\}$$

 $I =$
2) Calcolare

$$J := \int_S x \, dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2, y \geq 0\}.$$

 $J =$
3) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x \right) dy,$$

 dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 2 + \cos x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}.$$

a) ω è esatta? Si NO

b) $L =$
4) Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$$

e la superficie laterale del cilindro

$$\Sigma: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) Calcolare

$$\nabla \times \mathbf{F} =$$

b) Il campo \mathbf{F} è conservativo in \mathbb{R}^3 ?

Si

No

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$$

dove γ è la circonferenza inferiore del cilindro, cioè il bordo della base $z = 0$, percorsa in senso antiorario rispetto all'asse z .

**Esonero 26 Maggio 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$I := \iiint_D z^3 dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1 + z, 0 < z < 1\}$$

$I =$

2) Calcolare

$$J := \int_S (y + z) dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}.$$

$J =$

3) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1 + x^2 y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1 + x^2 y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy,$$

dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

a) ω è esatta? SI NO**b)** $L =$ **4) Si consideri il campo vettoriale**

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-yz, 0, 0)$$

e la superficie laterale del cilindro ellittico

$$\Sigma: x^2 + 2z^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) \mathbf{F} è irrotazionale? Si No

b) Scrivere una parametrizzazione della superficie laterale del cilindro ellittico.

c) Calcolare il flusso uscente

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e \, dS =$$

**Esonero 26 Maggio 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$I := \iiint_D (z+1) dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 3-z, 0 < z < 2\}$$

2) Calcolare

$$\iint_S z dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0\}.$$

3) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x \right) dy,$$

dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1: y = 2 + \cos x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \quad \gamma_2: y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}.$$

a) ω è esatta? Si NO**b)** **4) Si consideri il campo vettoriale**

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$$

e la superficie laterale del cilindro

$$\Sigma: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) \mathbf{F} è irrotazionale? Si No

b) Calcolare

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e dS =$$

c) Scrivere la normale esterna alla superficie laterale del cilindro.

$$\mathbf{n}_e =$$

**Esonero 26 Maggio 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare:

$$I := \iiint_D z^2 dx dy dz \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1 - z, 0 < z < 1\}.$$

$$I = \pi/12$$

2) Calcolare il seguente integrale di superficie:

$$J := \int_S y dS, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}.$$

$$J = 18$$

3) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1 + x^2 y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1 + x^2 y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy,$$

dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

a) ω è esatta? NO **b)** $L = 1 - \pi/4$ **4) Si consideri il campo vettoriale**

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-yz, 0, 0)$$

e la superficie laterale del cilindro ellittico

$$\Sigma: x^2 + 2z^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) Il campo \mathbf{F} è conservativo in \mathbb{R}^3 ?

b) Scrivere la normale esterna alla superficie laterale del cilindro.

$$n_e = \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, 0, \sin \theta \right) / \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{2} + \sin^2 \theta}$$

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

dove γ è l'ellisse alla base $y = 0$, cioè il bordo della sezione ellittica

$$x^2 + 2z^2 = 1, \quad y = 0,$$

percorsa in senso antiorario guardando nella direzione positiva dell'asse y .

**Esonero 26 Maggio 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$I := \iiint_D z \, dx \, dy \, dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 2 - z, 0 < z < 2\}$$

$$I = 4\pi/3$$

2) Calcolare

$$J := \int_S x \, dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2, y \geq 0\}.$$

$$J = 0$$

3) Calcolare

$$L := \int_\gamma \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x \right) dy,$$

dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1: y = 2 + \cos x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \quad \gamma_2: y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}.$$

a) ω è esatta? NO

$$\mathbf{b)} \quad L = 1 - \pi/4$$

4) Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$$

e la superficie laterale del cilindro

$$\Sigma: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) Calcolare

$$\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 2)$$

b) Il campo \mathbf{F} è conservativo in \mathbb{R}^3 ?

No

c) Calcolare

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$$

dove γ è la circonferenza inferiore del cilindro, cioè il bordo della base $z = 0$, percorsa in senso antiorario rispetto all'asse z .

**Esonero 26 Maggio 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$I := \iiint_D z^3 dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1 + z, 0 < z < 1\}$$

$$I = 9\pi/20$$

2) Calcolare

$$J := \int_S (y + z) dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}.$$

$$J = 2 + \pi/2$$

3) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1 + x^2 y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1 + x^2 y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy,$$

dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

a) ω è esatta? NO **b)** $L = 1 - \pi/4$ **4) Si consideri il campo vettoriale**

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-yz, 0, 0)$$

e la superficie laterale del cilindro ellittico

$$\Sigma: x^2 + 2z^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) \mathbf{F} è irrotazionale?

b) Scrivere una parametrizzazione della superficie laterale del cilindro ellittico.

$$\phi(\theta, y) = \left(\cos \theta, y, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right), \quad (\theta, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

c) Calcolare il flusso uscente

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \pi/\sqrt{2}$$

**Esonero 26 Maggio 2026**Civile iscritto al primo anno di corso SI NO BES/DSA

Nome: _____ Cognome _____ Matr. _____

Nei riquadri vanno riportate solo le risposte richieste

1) Calcolare

$$I := \iiint_D (z+1) dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 3 - z, 0 < z < 2\}$$

$$I = 22\pi/3$$

2) Calcolare

$$\iint_S z dS, \quad S = \{x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0\}.$$

$$J = 6\pi$$

3) Calcolare

$$L := \int_{\gamma} \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x \right) dy,$$

dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1: y = 2 + \cos x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \quad \gamma_2: y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}.$$

a) ω è esatta? NO

$$\mathbf{b)} \quad L = 1 - \pi/4$$

4) Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z^2)$$

e la superficie laterale del cilindro

$$\Sigma: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

orientata con normale uscente.

a) \mathbf{F} è irrotazionale?

b) Calcolare

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e \, dS = 0$$

c) Scrivere la normale esterna alla superficie laterale del cilindro.

$$\mathbf{n}_e = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

Cenni di svolgimento**1A)**

$$\iiint_D z^2 dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1 - z, 0 < z < 1\}.$$

Fissato $z \in (0, 1)$, la sezione è:

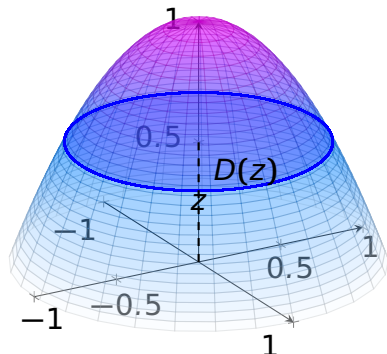
$$D(z) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 - z\}$$

cioè un disco di raggio $\sqrt{1-z}$.

$$\text{Area}(D(z)) = \pi(1-z)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \iiint_D z^2 dx dy dz &= \int_0^1 z^2 dz \iint_{D(z)} dx dy = \int_0^1 z^2 \text{Area}(D(z)) dz = \\ &= \int_0^1 z^2 \pi(1-z) dz = \pi \int_0^1 (z^2 - z^3) dz = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$



x

1B)

$$\iiint_D z dx dy dz, \quad D = \{x^2 + y^2 < 2 - z, 0 < z < 2\}$$

$$A(D(z)) = \pi(2-z)$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 z\pi(2-z) dz &= \pi \int_0^2 (2z - z^2) dz = \pi \left([z^2]_0^2 - \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^2 \right) = \\ &= \pi \left(4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

1C)

$$\iiint_D z^3 dx dy dz, \quad D = \{x^2 + y^2 < 1 + z, 0 < z < 1\}$$

$$A(D(z)) = \pi(1 + z)$$

$$\int_0^1 z^3 \pi(1 + z) dz = \pi \int_0^1 (z^3 + z^4) dz = \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{9\pi}{20}.$$

1D)

$$\iiint_D (z + 1) dx dy dz, \quad D = \{x^2 + y^2 < 3 - z, 0 < z < 2\}$$

$$A(D(z)) = \pi(3 - z)$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (z + 1)\pi(3 - z) dz &= \pi \int_0^2 (3z + 3 - z^2 - z) dz = \pi \int_0^2 (2z + 3 - z^2) dz = \\ &= \pi \left([z^2]_0^2 + [3z]_0^2 - \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^2 \right) = \pi \left(4 + 6 - \frac{8}{3} \right) = \frac{22\pi}{3}. \end{aligned}$$

2A) La superficie è la metà del cilindro di raggio 3 compresa tra $z = 0$ e $z = 1$.
Una parametrizzazione è:

$$\varphi(t, u) = \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \\ z = u \end{cases} \quad (t, u) \in [0, \pi] \times [0, 1].$$

Calcoliamo le derivate:

$$\varphi_t = (-3 \sin t, 3 \cos t, 0), \quad \varphi_u = (0, 0, 1).$$

Il prodotto vettoriale:

$$\varphi_t \times \varphi_u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 \sin t & 3 \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cos t, 3 \sin t, 0).$$

La norma è: $\|\varphi_t \times \varphi_u\| = 3$. Quindi: $dS = 3 dt du$. L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int_S y dS &= \int_0^1 \int_0^\pi (3 \sin t) \cdot 3 dt du = 9 \int_0^1 \left(\int_0^\pi \sin t dt \right) du. \\ &= 9 \int_0^1 2 du = 18. \end{aligned}$$

2B) Parametrizzazione:

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = u, \quad (t, u) \in [0, \pi] \times [0, 2].$$

$$\|\varphi_t \times \varphi_u\| = 2.$$

$$\int_S x dS = \int_0^2 \int_0^\pi (2 \cos t) \cdot 2 dt du = 4 \int_0^2 \left(\int_0^\pi \cos t dt \right) du = 0.$$

2C) Parametrizzazione:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = u.$$

$$\|\varphi_t \times \varphi_u\| = 1.$$

$$\int_S (y + z) dS = \int_0^1 \int_0^\pi (\sin t + u) dt du = \int_0^1 (2 + \pi u) du = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

2D) Parametrizzazione:

$$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = u, \quad (t, u) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2].$$

$$\|\varphi_t \times \varphi_u\| = 3.$$

$$\iint_S z dS = \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u \cdot 3 dt du = 3 \int_0^2 u \cdot \pi du = 3\pi \cdot \frac{4}{2} = 6\pi.$$

3A) 3C) Calcolare

$$L := \int_\gamma \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy,$$

dove γ è la curva chiusa composta da:

$$\gamma_1 : y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

La curva γ è chiusa e generalmente regolare. Poniamo:

$$\begin{aligned}\omega &= \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy; \\ \omega &= \omega_1 + \omega_2, \\ \omega_1 &= \left(\frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(\frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x \right) dy, \\ \omega_2 &= x dy.\end{aligned}$$

Poniamo:

$$P(x, y) = \frac{e^{\cos y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4}, \quad Q(x, y) = \frac{2xy}{1+x^2y^4} - \sin y e^{\cos y} \ln x.$$

$P, Q \in C^1(A)$, con $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, inoltre

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{\cos y}}{x} \right) &= \frac{-\sin y e^{\cos y}}{x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) &= \frac{2y(1+x^2y^4) - y^2(4x^2y^3)}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{2y - 2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2} \implies \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-\sin y e^{\cos y}}{x} + \frac{2y - 2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2xy}{1+x^2y^4} \right) &= \frac{2y(1+x^2y^4) - 2xy(2xy^4)}{(1+x^2y^4)^2} = \frac{2y - 2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} (-\sin y e^{\cos y} \ln x) &= -\sin y e^{\cos y} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{-\sin y e^{\cos y}}{x} + \frac{2y - 2x^2y^5}{(1+x^2y^4)^2}.\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Quindi ω_1 è chiusa. Poiché A è una regione priva di buchi allora è semplicemente connessa e quindi ω_1 è esatta. Ne segue:

$$\int_{\gamma} \omega_1 = 0.$$

Complessivamente, ω non è esatta. Rimane:

$$L = \int_{\gamma} x dy = \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy$$

$$\gamma_1 : y = 1 + \sin x, \quad \pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}, \quad dy = \cos x dx$$

$$\int_{\gamma_1} x dy = \int_{\pi}^{\pi/2} x \cos x dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x + \cos x \\ \int_{\pi}^{\pi/2} x \cos x dx &= [x \sin x + \cos x]_{\pi}^{\pi/2} = +1 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\gamma_2 : y = 3 - \frac{2}{\pi}x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \quad dy = -\frac{2}{\pi}dx$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} x dy &= \int_{\pi/2}^{\pi} x \left(-\frac{2}{\pi}\right) dx = -\frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} x dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} \right) = -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

$$L = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

3B) 3D) Poniamo:

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(x + \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x \right) dy, \\ \omega &= \omega_1 + \omega_2, \\ \omega_1 &= \left(\frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4} \right) dx + \left(\frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x \right) dy, \\ \omega_2 &= x dy. \end{aligned}$$

Poniamo:

$$P(x, y) = \frac{e^{\sin y}}{x} + \frac{y^2}{1+x^2y^4}, \quad Q(x, y) = \frac{2xy}{1+x^2y^4} + \cos y e^{\sin y} \ln x.$$

$P, Q \in C^1(A)$, con $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, Si verifica:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

quindi ω_1 è chiusa e dunque esatta perché A è semplicemente connesso, dunque :

$$\int_{\gamma} \omega_1 = 0.$$

Complessivamente, ω non è esatta. Rimane:

$$L = \int_{\gamma} x dy = \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy.$$

Parametrizziamo γ_1 :

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 2 + \cos t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \quad dy = -\sin t dt.$$

Quindi:

$$\int_{\gamma_1} x dy = \int_{\pi/2}^{\pi} t(-\sin t) dt = - \int_{\pi/2}^{\pi} t \sin t dt.$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int t \sin t dt &= -t \cos t + \int \cos t dt = -t \cos t + \sin t, \\ - \int_{\pi/2}^{\pi} t \sin t dt &= -[-t \cos t + \sin t]_{\pi/2}^{\pi} = -(\pi - 1) = 1 - \pi. \end{aligned}$$

Parametrizziamo la γ_2

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 3 - \frac{2}{\pi}t, \end{cases} \quad x \in \pi \geq t \geq \frac{\pi}{2}, \quad dy = -\frac{2}{\pi} dt.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} x dy &= \int_{\pi}^{\pi/2} x \left(-\frac{2}{\pi}\right) dx = -\frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\pi/2} x dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} x dx. \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{4} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3\pi^2}{4} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$L = \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy = (1 - \pi) + \frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

4A) 4C) $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yz & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -y, z).$$

Parametrizzazione della superficie:

$$\Phi(\theta, y) = \left(\cos \theta, y, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right), \quad (\theta, y) \in D := [0, 2\pi] \times [0, 1], \quad \Phi \in C^2(D).$$

La normale esterna, comprensiva del fattore d'area, è data da:

$$\mathbf{n}_e dS = \Phi_y \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, 0, \sin \theta \right).$$

Allora

$$(\nabla \times \mathbf{F})(\Phi(\theta, y)) = \left(0, -y, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right)$$

e

$$(\nabla \times \mathbf{F})(\Phi(\theta, y)) \cdot (\Phi_y \times \Phi_\theta) = \left(0, -y, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, 0, \sin \theta \right) = \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2}}.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2}} d\theta dy = \int_0^1 \frac{\pi}{\sqrt{2}} dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Quindi il flusso del rotore di \mathbf{F} uscente da Σ è

$$\boxed{\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e dS = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

Proviamolo anche facendo uso del Teorema di Stokes: Σ è una superficie di classe C^2 , regolare, orientata e con bordo.

La frontiera di D è data da:

$$\{(t, 0), 2\pi \geq t \geq 0\} \cup \{(0, y), 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(t, 1), 0 \leq t \leq 2\pi\} \cup \{(2\pi, y), 1 \geq y \geq 0\}.$$

Il bordo di Σ ($\partial\Sigma$) è pertanto composto da 4 curve regolari:

- (ellisse inferiore, $y = 0$) C_0 , parametrizzata da:

$$\gamma_0(t) = \left(\cos t, 0, \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right), \quad 2\pi \geq t \geq 0, \quad \gamma'_0(t) = \left(-\sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right).$$

- (generatrice verticale; $t = 0$) V_1 , parametrizzata da:

$$\delta_1(y) = (1, y, 0), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \delta'_1(y) = (0, 1, 0).$$

- (ellisse superiore, $y = 1$) C_1 , parametrizzata da:

$$\gamma_1(t) = \left(\cos t, 1, \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \gamma'_1(t) = \left(-\sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right).$$

- (generatrice verticale; $t = 2\pi$) V_2 , parametrizzata da:

$$\delta_2(y) = (1, y, 0), \quad 1 \geq y \geq 0, \quad \delta'_2(y) = (0, 1, 0).$$

Quindi, per il Teorema di Stokes, posto $\omega := -yz \, dx$,

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_0} \omega + \int_{V_1} \omega + \int_{C_1} \omega + \int_{V_2} \omega.$$

$$\mathbf{F}(\gamma_0(t)) \cdot \gamma'_0(t) = (0, 0, 0) \cdot \left(-\sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{C_0} \omega = 0,$$

$$\mathbf{F}(\delta_1(y)) \cdot \delta'_1(y) = (0, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{V_1} \omega = 0,$$

$$\mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma'_1(t) = \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \cdot \left(-\sin t, 0, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}} \, dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{F}(\delta_2(y)) \cdot \delta'_2(y) = (0, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{V_2} \omega = 0.$$

Sommando tutti gli addendi si ottiene

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 + 0 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$\boxed{\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

4B) 4D) $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 2)$$

Parametrizzazione della superficie:

$$\Phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad (\theta, z) \in D := [0, 2\pi] \times [0, 1], \quad \Phi \in C^2(D).$$

La normale esterna è data da:

$$\mathbf{n}_e = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \|\mathbf{n}_e\| = 1.$$

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e = (0, 0, 2) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0) = 0.$$

Quindi il flusso del rotore di \mathbf{F} uscente da Σ è nullo.

Proviamolo anche facendo uso del Teorema di Stokes: Σ è una superficie di classe C^2 , regolare, orientata e con bordo.

La frontiera di D è data da:

$$\{(t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi\} \cup \{(2\pi, t), 0 \leq z \leq 1\} \cup \\ \{(t, 1), 2\pi \geq t \geq 0\} \cup \{(0, z), 1 \geq z \geq 0\}.$$

Il bordo di Σ ($\partial\Sigma$) è pertanto composto da 4 curve regolari:

- (circonferenza inferiore, $z = 0$) C_0 , parametrizzata da:

$$\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \gamma'_0(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

- (generatrice verticale; $t = 2\pi$) V_1 , parametrizzata da:

$$\delta_1(z) = (1, 0, z), \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \delta'_1(z) = (0, 0, 1)$$

- $z = 1$ (circonferenza superiore) C_1 , parametrizzata da:

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 1), \quad 2\pi \geq t \geq 0, \quad \gamma'_1(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

- (generatrice verticale; $t = 0$) V_2 parametrizzata da:

$$\delta_2(z) = (1, 0, z), \quad 1 \geq z \geq 0, \quad \delta'_2(z) = (0, 0, 1)$$

Quindi, per il Teorema di Stokes, posto $\omega := -ydx + xdy + z^2dz$,

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_e dS = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \omega + \int_{C_0} \omega + \int_{V_1} \omega + \int_{V_2} \omega.$$

$$\mathbf{F}(\gamma_0(t)) \cdot \gamma'_0 = (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = 1 \Rightarrow$$

$$\int_{C_0} \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

$$\mathbf{F}(\delta_1(z)) \cdot \gamma'_1 = (0, 1, z^2) \cdot (0, 0, 1) = z^2 \Rightarrow$$

$$\int_{V_1} \omega = \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma'_1 = (-\sin t, \cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) = 1 \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} \omega = \int_{2\pi}^0 dt = -2\pi$$

$$\mathbf{F}(\delta_2(z)) \cdot \gamma'_2 = (0, 1, z^2) \cdot (0, 0, 1) = z^2 \Rightarrow$$

$$\int_{V_2} \omega = \int_1^0 z^2 dz = -\frac{1}{3}.$$

In particolare possiamo osservare che i due tratti verticali sono uguali ma percorsi in verso opposto. Sommando tutti gli addendi si ottiene

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$